RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
THE UNIVERSITY OF MAINE

From The Library of

Frank S. Beale

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COLLECTION CH. DE COMBEROUSSE

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS

AUX LICENCES ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

TOME QUATRIÈME

ALGÈBRE SUPÉRIEURE

SECONDE PARTIE

CINQUIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

R. DE MONTESSUS DE BALLORE

Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille
Professeur Libre à la Faculté des Sciences de Paris

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES

Quai des Grands-Augustins, 55

1923

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE DIXIÈME.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LES INFINIMENT PETITS.

Définitions préliminaires, p. 1. — *Comparaison des infiniment petits d'ordres différents*, 3. — *Opérations sur les infiniment petits*, 3. — *Exemples d'infiniment petits d'ordres différents*, 5. — *Condition de substitution des infiniment petits dans des limites de rapports ou de sommes*, 8.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE L'ACCROISSEMENT D'UN POLYNÔME ENTIER SUIVANT LES PUISSANCES DES ACCROISSEMENTS DES VARIABLES.

Cas d'une seule variable, 14. — *Cas de deux variables*, 19.

CHAPITRE III.

DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE ET DE LA DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE.

Définition de la dérivée, 27. — *Théorèmes généraux*, 32. — *Définition de la différentielle d'une fonction d'une seule variable*, différences, relation $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$, passage aux limites, *relation* $dy = f'(x)\,dx$, les théorèmes généraux qui concernent les dérivées s'étendent immédiatement aux différentielles, *représentation géométrique de la différentielle*, avantage que peut présenter l'emploi des différentielles sur celui des dérivées, 36.

CHAPITRE IV.

CLASSEMENT DES FONCTIONS.

Fonctions simples, algébriques et transcendantes, *tableau des dix fonctions simples*, fonctions de fonctions, fonctions composées. *Marche*

uniforme pouvant conduire aux dérivées et aux différentielles des dix fonctions simples, 43.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DES FONCTIONS INVERSES. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.

Théorème des fonctions inverses, 47. — *Différentiation des fonctions de fonctions*, 48. — Expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables, 49. — *Différentiation des fonctions composées*, 52.

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIATION D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT, D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE. — THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

Différentiation d'une *somme* de fonctions, 65. — Différentiation d'un *produit* de fonctions, introduction des différentielles logarithmiques, 57. — Différentiation d'un *quotient* de fonctions, 60. — Différentiation d'une *puissance quelconque*, entière ou fractionnaire, positive ou négative, d'une fonction, 62. — Solution des questions précédentes par le principe de la différentiation des fonctions composées, 65. — *Théorème des fonctions homogènes*, corollaire, 66. — Exemples et applications, 68.

CHAPITRE VII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS LOGARITHMIQUE ET EXPONENTIELLE.

Différentiation de la fonction logarithmique, utilité de la règle obtenue, 73. — *Différentiation de la fonction exponentielle*, 76. — Différentiation de la fonction composée u^v, 79. — Exemples choisis, 80.

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Différentiation des fonctions circulaires directes, 85. — Premier groupe : *sinus et cosinus*, 85. — Deuxième groupe : *tangente et cotangente*, 88. — Troisième groupe : *sécante et cosécante*, 91. — *Différentiation des fonctions circulaires inverses*, 92. — Premier groupe : *arc sinus et arc cosinus*, 93. — Deuxième groupe : *arc tangente et arc cotangente*, 96. — Troisième groupe : *arc sécante et arc cosécante*, 98. — Exemples choisis, 100.

CHAPITRE IX.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

Cas d'une seule fonction, exemples, 108. — Cas de plusieurs fonctions, 111. — Élimination des constantes, équations différentielles, exemples, 113.

CHAPITRE X.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS.

Théorème de Rolle, 117. — *Théorème des accroissements finis*, 118. — *Lorsque la dérivée d'une fonction est constamment nulle dans un certain intervalle, cette fonction se réduit à une constante dans le même intervalle*, 119.

CHAPITRE XI.

DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DIFFÉRENCES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Des différentielles des divers ordres des fonctions explicites, 122. — Exemples, 124. — Expression de la $n^{ième}$ dérivée d'un produit, 126. — Des différences des divers ordres, 128. — Des différentielles des divers ordres des fonctions implicites, 131.

CHAPITRE XII.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Dérivées et différentielles partielles successives d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, 134. — Exemples, 138. — *Différentielle totale* d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, 141. — *Différentielles totales des divers ordres* d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, 144. — Exemples, 147. — Différentielles totales des divers ordres d'une fonction composée de plusieurs variables indépendantes, 149. — *Différentielles des divers ordres des fonctions implicites*, 154.

CHAPITRE XIII.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS. — FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

Formule de Taylor, différentes formes du reste, condition de convergence de la série, introduction des différentielles, remarques essentielles, 162. — *Formule de* Maclaurin, 168. — *Extension des formules de Taylor et de Maclaurin* aux fonctions de plusieurs variables, 170.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DE LA FORMULE DE MACLAURIN A QUELQUES DÉVELOPPEMENTS IMPORTANTS.

Développement de la formule du binôme pour un exposant quelconque, examen des cas particuliers où le rapport des deux termes du binôme

est égal à ± 1, 175. — Développement des fonctions exponentielles, 181. — *Développement de* $l(1+x)$, 182. — Calcul des logarithmes népériens, 185. — Calcul des logarithmes vulgaires, 188. — Justification directe de l'emploi de la règle des parties proportionnelles dans les calculs par logarithmes, 190. — *Développement des fonctions* $\sin x$ *et* $\cos x$, 193. — *Développement de la fonction* arc tang x, 195. — Calcul de π, 198.

CHAPITRE XV.

RECHERCHE DES VRAIES VALEURS DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS FORME INDÉTERMINÉE.

Expressions se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, *Règle de* L'HOSPITAL, 201. — Exemples choisis, 205. — *Autres symboles d'indétermination :* cas où la fonction se présente sous la forme $0.\infty$, 207; cas où la fonction se présente sous la forme $\infty - \infty$, 208; cas où la fonction se présente sous l'une des trois formes, 0^0, ∞^0, 1^∞, 209. — Exemples, 210. — Cas particuliers, indétermination réelle, 213. — *Fonctions implicites*, marche à suivre lorsque la dérivée $\frac{dy}{dx}$ se présente sous forme $\frac{0}{0}$, 215.

CHAPITRE XVI.

VARIATION DES FONCTIONS. — THÉORIE DES MAXIMUMS ET DES MINIMUMS.

Croissance ou décroissance d'une fonction d'une seule variable, 217. — *Maximums et minimums des fonctions d'une seule variable*, condition fondamentale commune, caractères distinctifs, 219. — Applications, 224. — *Maximums et minimums des fonctions implicites d'une seule variable*, 234. — Exemple, 235. — *Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables indépendantes*, 241. — Cas d'une fonction de deux variables, 243. — Cas d'une fonction de trois variables, 245. — Applications, 248. — *Maximums et minimums des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes*, 252.

CHAPITRE XVII.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Équations différentielles, 255. — *Constantes arbitraires*, 257. — Applications, 257.

LIVRE ONZIÈME.

ÉLÉMENTS DE CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES INTÉGRALES.

Définitions et théorèmes fondamentaux : problème posé par le Calcul intégral, *la dérivée de l'aire d'une courbe est égale à l'ordonnée de cette courbe*, expression de l'aire d'une courbe, somme intégrale ou *Intégrale, limites d'une intégrale, intégrale indéfinie*, 261. — *Des intégrales définies*, élimination de la constante, 267. — *Procédés d'intégration les plus simples*, 272. — Intégration immédiate, 273. — Théorèmes de transformation et de décomposition, 276. — Intégration par substitution, 282. — Intégration par parties, 285. — *Cas particuliers des intégrales définies :* les limites de l'intégrale peuvent être infinies, 289. — La fonction dérivée placée sous le signe $\int$ peut devenir infinie pour l'une des limites de l'intégrale ou entre ses limites, 292. — Nouvelle démonstration de la série de Taylor, 295. — *Intégration par séries*, exemples, 297.

CHAPITRE II.

COMPLÉMENTS CONCERNANT LES INTÉGRALES INDÉFINIES.

Intégration des fractions rationnelles, 304. — *Intégration des différentielles algébriques les plus simples :* $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, 311 ; $\int \frac{dx}{(x-x_0)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, 313 ; $\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$, 314 ; $\int f(x,y)\,dx$, où f est une fonction rationnelle, x, y étant liés par une équation du second degré, 315 ; différentielle binôme $x^m(a+bz^n)^p\,dx$, 316. — Intégration des fonctions transcendantes : $\int f(e^{ax})\,dx$, 318 ; $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$, 318 ; $\int \frac{dx}{\sin x}$, 319 ; $\int x^m e^{nx}\,dx$, 319 ; $\int f(x, \log x, dx)$, 320 ; $\int f(x, \arcsin n)\,dx$, 320.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants dépourvues de second membre, 321. — Équations différentielles linéaires avec second membre, 325. — Équations différentielles linéaires à coefficients con-

stants dont le second membre est un polynôme en x, $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $\sin^x \gamma$, $\cos^x \gamma$, 329.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES.

Cas où l'intégration de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ peut être ramenée aux quadratures, 337. — Applications, 338. — Équations $\frac{dy}{dx} + X(x)\,y + X_1(x) = 0$, 346. — Équation de Bernoulli, 347. — Équation de Clairaut, 348.

LIVRE DOUZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

PREMIERS PRINCIPES,

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Définitions, 349. — Propriétés générales des polynômes, 350. — Principe fondamental de la théorie des équations, 356. — Points, racines, 361.

CHAPITRE II.

CONSÉQUENCE DU PRINCIPE FONDAMENTAL. — COMPOSITION DES ÉQUATIONS.

Facteurs linéaires d'une fonction entière, nombre de racines d'une équation, 363. — Points, racines, 361. — Exemples, 369. — Équations à coefficients réels, 370. — Racines imaginaires conjuguées, 374. — Relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique, 378. — Applications, 380.

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Définitions, 386. — Fonctions symétriques simples des racines d'une équation, *Formules de Newton*, 388. — Autre procédé fondé sur l'emploi des séries, exemple, 392. — Fonctions symétriques d'ordres supérieurs des racines d'une équation algébrique, 395. — Tableau des fonctions symétriques les plus simples de l'équation générale de degré m, 397. —

Toute fonction symétrique et rationnelle des racines d'une équation algébrique est une fonction rationnelle des coefficients de cette équation, 398. — *Méthode de Cauchy*, permettant de trouver directement une fonction symétrique et entière quelconque des racines d'une équation, 398. — Application à la recherche de la fonction symétrique qui représente le produit des carrés des différences des racines d'une équation donnée, prises deux à deux, 402. — Discriminants, 405.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DANS LES CAS LES PLUS SIMPLES ET LES PLUS USUELS. — THÉORIE DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

But qu'on se propose dans la transformation des équations, Transformation linéaire générale, 409. — Multiplier les racines d'une équation donnée par une quantité constante, 411. — Transformée en $-z$, 413. — Ramener les coefficients d'une équation à la forme entière, en conservant l'unité comme coefficient du premier terme, 414. — Faire disparaître un terme quelconque d'une équation, 416. — Former une équation dont les racines soient les inverses de celles d'une équation donnée, 420. — *Théorie des équations réciproques de première et de seconde espèce*, abaissement et formules de transformation, 423.

CHAPITRE V.

FACTEURS PREMIERS COMMUNS A DEUX FONCTIONS ENTIÈRES. — PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE. — RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS. — RECHERCHE DES DIVISEURS DES POLYNÔMES A UNE VARIABLE.

Facteurs premiers communs à deux fonctions entières, *Théorie du plus grand commun diviseur algébrique*, 433. — *Racines communes à deux équations*, 436. — Applications, 438. — *Recherche des diviseurs des polynômes à une variable*, 441. — *Recherche des diviseurs du second degré*, dans le cas des polynômes du troisième et du quatrième degré, 444.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Recherche du plus grand commun diviseur d'un polynôme et de sa dérivée, conséquences, 450. — Condition pour qu'une équation algébrique ait des racines égales, exemples, 452. — *Décomposition de toute équation qui a des racines égales*, en équations plus simples, faisant connaître chacune les racines des différents ordres de multiplicité, prises seulement une fois, 454. — Exemple, 457. — *Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique ait une racine d'un certain ordre de multiplicité*, 458. — Emploi des fonctions homogènes, 460. — *Cas général*, 464.

CHAPITRE VII.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES DÉRIVÉES DES POLYNÔMES.

Propriété fondamentale des dérivées des fonctions entières : cas où la fonction est à coefficients réels et où la variable est réelle, cas où la fonction et la variable sont imaginaires, 467.

LIVRE TREIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

(SUITE).

DE L'ÉLIMINATION.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLIMINATION PAR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Définitions et notions préliminaires, nombre de termes que peut contenir la fonction entière la plus générale d'un degré donné, 469. — *Élimination par les fonctions symétriques :* cas de deux équations à une seule inconnue, Résultant, son poids, sa formation, 474. — Les fonctions symétriques et rationnelles des groupes de solutions, communes à plusieurs équations, sont des fonctions rationnelles des coefficients de ces équations, 482. — Extension de la méthode d'élimination par les fonctions symétriques à un nombre quelconque d'équations, *méthode de Poisson*, 487. — Degré de l'équation finale, *théorème général de Bézout*, 490.

CHAPITRE II.

ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

Remarques préliminaires, simplifications qu'on peut apporter au calcul dans certains cas, 494. — *Élimination entre deux équations à deux inconnues par la méthode du plus grand commun diviseur*, 496. — Équation aux carrés des différences des racines, 501.

CHAPITRE III.

AUTRES MÉTHODES D'ÉLIMINATION, EXPRESSION DES RÉSULTANTS SOUS FORME DE DÉTERMINANTS.

Méthode de Bézout et d'Euler, 506. — Seconde méthode de Bézout, 510. — Méthode de Cauchy : Lorsque les équations données sont de même degré, on obtient comme résultant un déterminant symétrique, 514. — Calcul

de la racine commune, lorsqu'on suppose qu'il n'y en a qu'une, 521. — Exemple, 522. — Application de la méthode de Cauchy à la recherche de l'équation aux différences des racines d'une équation donnée, 523.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

Indications préliminaires, 525. — Méthode d'élimination de M. Sylvester, 526. — Recherche des racines communes, théorème fondamental, transformation du déterminant de M. Sylvester, 529. — Équations aux racines communes, 535. — Applications, 537.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION.

Transformation des équations, d'une manière générale, 544. — Équation aux sommes des racines prises deux à deux, 546. — Équation aux différences des racines prises deux à deux, 549. — Équation aux produits des racines prises deux à deux, 549. — Équation aux rapports des racines prises deux à deux, 551. — *De l'abaissement des équations*, 554. — *Recherche des racines imaginaires des équations algébriques*, exemple, 559. — *Disparition des radicaux*, exemple, cas particuliers, 560.

LIVRE QUATORZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

(SUITE).

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Définitions générales de la question, 565.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈME DE DESCARTES.

Définitions, propositions préliminaires, 567. — *Théorème de Descartes*, 570. — *Limites relatives au nombre des racines imaginaires*, théorème des lacunes, limite de Sturm, 573. — Exemples, 575. — *Formes du théorème de Descartes, lorsque l'équation proposée, complète ou incomplète, a toutes ses racines réelles*, 577. — *Détermination, dans la même hypothèse, du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres*

donnés, 579. — *Conditions de réalité de toutes les racines d'une équation, à l'aide de l'équation aux carrés des différences*, 580.

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE ROLLE.

Propositions préliminaires, 582. — *Théorème de Rolle :* Deux racines réelles consécutives d'une équation algébrique à coefficients réels comprennent toujours entre elles un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée, 584. — *Séparation des racines réelles d'une équation algébrique à coefficients réels, à l'aide du théorème de Rolle*, 586. — *Cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles*, 588. — Application du théorème de Rolle à la recherche des conditions de réalité des racines de l'équation du troisième degré privée de son second terme, 589. — Extension aux équations trinômes à exposants impairs, 594.

CHAPITRE III.

SÉPARATION DES RACINES RÉELLES PAR LA MÉTHODE DE M. BUDAN. THÉORÈME DE FOURIER. — MÉTHODE DE LAGRANGE.

Remarques préliminaires, 598. — *Méthode de M. Budan*, 599. — Exemples de son application, lorsque les racines de l'équation considérée sont toutes réelles, 601. — *Théorème de Fourier*, 604. — *Méthode de Lagrange*, elle est complètement rigoureuse, emploi de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation proposée, 611.

CHAPITRE IV.

THÉORÈME DE STURM.

Indications préliminaires, 614. — *Théorème de Sturm*, 615. — Remarques sur l'emploi du théorème, 619. — Cas où l'équation proposée a des racines égales, 620. — *Détermination du nombre des racines réelles d'une équation*, 621. — *Séparation des racines réelles d'une équation à l'aide du théorème de Sturm*, 621. — Séparation des racines réelles à l'aide du théorème de Sturm, 622. — Exemples, 623. — *Conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré donné*, maximum du nombre de ces conditions, comparaison avec le résultat fourni par l'équation aux carrés des différences, 625. — Application à l'équation du troisième degré, 626. — Nombre des racines imaginaires, lorsque la suite de Sturm est complète, 628. — *Conditions de substitution d'autres fonctions à celles de Sturm*, 629.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DE STURM (*suite*).

Suites de M. de Montessus de Ballore, 633. — Application du théorème de Sturm aux fonctions sphériques, 637. — Application du théorème de

Sturm à quelques équations transcendantes : $x \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a = 0$, 638; $x - \cos x = 0$, 640. — Étude d'équations transcendantes $y = 0$, pour lesquelles on forme une relation linéaire et homogène entre y, y', y'', 641 — Séparation des racines des équations trinômes, 645.

CHAPITRE VI.

RECHERCHE DES LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

Observations préliminaires, 650. — *Principe fondamental*, 651. — *Recherche d'une limite supérieure des racines positives d'une équation :* Limites immédiates (Limite de Maclaurin, limite plus resserrée en tenant compte du rang du premier terme négatif de l'équation), 653. — Méthode des groupements, 656. — Méthode de Newton, 657. — Méthode de M. Laguerre, 659. — Limite supérieure des racines positives de l'équation dérivée, 661. — *Recherche d'une limite inférieure des racines positives d'une équation*, 662. — *Recherche d'une limite inférieure et d'une limite supérieure des racines négatives*, 663. — Remarques, 663. — Exemple, 664. — *Recherche des limites des modules des racines d'une équation quelconque*, 665.

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION DES RACINES COMMENSURABLES DES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS RATIONNELS.

Observations préliminaires, 669. — *Détermination des racines entières*, conditions pour qu'un nombre entier a soit racine de l'équation proposée, 669. — Exemple, 673. — Théorème fondamental relatif aux racines fractionnaires, 675. — *Détermination indirecte des racines fractionnaires*, 676. — *Détermination directe de ces racines*, 678. — Exemple, 679. — La méthode des racines égales ne doit être appliquée aux équations à coefficients commensurables qu'au delà du cinquième degré, 680.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES. — MÉTHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES.

Indications générales, 684. — *Première recherche des racines incommensurables*, exemples choisis, 585. — *Méthode des parties proportionnelles*, 692. — Application, 696.

CHAPITRE IX.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES, — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON ET DE FOURIER.

Méthode d'approximation de Newton, 698. — *Perfectionnement de Fourier*, règle pratique, 700. — Limite de l'erreur commise, 703. — *Interprétation géométrique de la méthode de Newton*, 704. — *Emploi*

simultané de la méthode de Newton et de la méthode des parties proportionnelles, 709. — Applications, 710.

CHAPITRE X.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES. — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGRANGE.

Méthode d'approximation de Lagrange, Développement de la racine cherchée en fraction continue, 715. — Applications, 722.

CHAPITRE XI.

RECHERCHE DES RACINES IMAGINAIRES.

Méthode de Lagrange pour le calcul des racines imaginaires, emploi de l'équation aux carrés des différences, 728. — Exemple, 731. — *Élimination et méthode d'approximation de Newton combinées*, exemple, 732.

LIVRE QUINZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

(SUITE).

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS.

Observations préliminaires, 737.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Cas particulier de l'équation du troisième degré, 739. — Cas général de l'équation du troisième degré, 740. — Discussion de la formule de Cardan, lorsque les coefficients de l'équation p et q sont réels, 745. — *Cas irréductible*, 748. — Calcul des racines de l'équation du troisième degré, lorsqu'elle n'a qu'une seule racine réelle, 749. — Calcul des racines de l'équation du troisième degré, lorsqu'elle a ses trois racines réelles : cas irréductible, 751. — Applications, 756. — *Résolution trigonométrique du cas irréductible*, 759.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Méthode de Ferrari, 761. — Méthode de Descartes, 763. — Méthode de Lagrange, *Formules d'Euler*, 765. — Discussion, 767. — Remarque, 770. — Exemple, 770.

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES AU DELA DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Observations préliminaires, 772. — Fonctions algébriques, 773. — Autre forme générale des fonctions algébriques, 777. — Propriétés des fonctions algébriques qui satisfont à une équation donnée, proposition fondamentale : *Lorsqu'une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à l'une quelconque de ses racines une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée soient exprimées par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée*, 781. — Impossibilité de résoudre algébriquement les équations générales au delà du quatrième degré, 787. — Scolie générale, 791.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES ÉQUATIONS BINOMES.

Forme générale des équations binômes, 794. — *Propriétés des racines de l'équation binôme* $x^m = 1$, 795. — *Des racines primitives de l'équation* $x^m = 1$ *et de leur nombre*, 797. — Propriétés des équations binômes de degrés différents, 801. — *Résolution de l'équation binôme, lorsque son degré est un nombre composé quelconque*, 804. — *Résolution de l'équation binôme, lorsque son degré est un nombre impair*, 806. — Application de la théorie des équations binômes à la division de la circonférence en parties égales, 807. — Polygones réguliers, convexes et étoilés, 809. — Polygone régulier de dix-sept côtés, 813. — *Résolution des équations trinômes*, 815. — Théorèmes de Moivre et de Côtes, 817.

LIVRE SEIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

(SUITE ET FIN).

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

Définitions, 821. — *Formules symboliques*, 825. — Différences des fonctions, 828. — Différences des fonctions entières : *lorsqu'on substitue, dans une fonction entière de x de degré m, une suite de nombres en progression arithmétique, la différence d'ordre m de la fonction est une quantité constante*, conséquences, 829. — Applications, 831. —

Résolution des équations numériques, 835. — Équations du troisième degré, 837. — Exemple, 839. — Équations de degrés supérieurs, 841. — Exemple, 844. — *Construction de Tables numériques*, 846.

CHAPITRE II.

DE L'INTERPOLATION.

Définitions et observations préliminaires, 850. — *Formule d'interpolation de Newton*, 852. — Représentation exacte d'une fonction entière par la formule d'interpolation de Newton, 855. — Applications, 856. — Aire d'une courbe, formule de Thomas Simpson, 857. — Formule d'interpolation de Lagrange, 860.

CHAPITRE III.

NOTIONS SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Observations préliminaires, 863. — *Application de la théorie des différences à la résolution des équations transcendantes*, 865. — Problèmes et exemples, 866. — Des racines imaginaires des équations transcendantes, 878.

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Principe de la méthode et condition de son emploi, 885. — Application aux équations du second degré, 887. — Application aux équations transcendantes, 891.

CHAPITRE V.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES. DES SÉRIES RÉCURRENTES.

Définitions, 898. — *Premier cas :* l'équation $F(x) = 0$ n'a que des racines inégales, 899. — Transformation spéciale relative aux racines imaginaires simples, 901. — *Second cas :* l'équation $F(x) = 0$ a des racines égales, 902. — La décomposition effectuée n'est possible que d'une seule manière, 905. — Transformation spéciale relative aux racines imaginaires multiples, 906. — *Résumé*, 908. — Exemples, 912. — *Intégration des fractions rationnelles*, on a quatre cas à considérer, 917. — Exemple, 921. — Retour à la formule d'interpolation de Lagrange, 922. — *Des séries récurrentes*, leur liaison avec les fractions rationnelles, 924

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ.

Indications préliminaires, 933. — *Des systèmes de fonctions linéaires et homogènes*, 934. — *Propriétés fondamentales des polynômes homogènes du second degré*, 937. — Discriminant d'une forme quadra-

tique, 940. — Invariant, 944. — *Décomposition d'une forme quadratique en carrés*, méthode directe, 945. — Application, 947. — *Des décompositions irréductibles*, 949. — La méthode directe par réduction conduit à une décomposition irréductible, 952. — *Décomposition d'une forme quadratique en carrés, par l'emploi d'une substitution linéaire*, 953. — Conditions relatives au nombre des carrés de la décomposition, lorsque ce nombre est moindre que celui des variables de la forme quadratique, 956. — Conditions pour qu'une forme quadratique se réduise à un carré parfait *ou* à un produit de deux formes linéaires, 962 — *Loi d'inertie des formes quadratiques*, 966.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

SECONDE PARTIE.

EXERCICES concernant :

Le dixième Livre (n° 716 à 970), 1; — Le onzième Livre (971 à 1039), 261; — Le douzième Livre (1040 à 1153), 349; — Le treizième Livre (1154 à 1249), 469; — Le quatorzième Livre (1250 à 1415), 565; — Le quinzième Livre (1416 à 1487), 737; — Le seizième Livre (1488 à 1611), 821.

TABLEAUX.

Table des arcs, de leurs lignes trigonométriques exprimées en parties décimales du rayon 1, pour les 90 premiers degrés, p. 1027.

Tableau des différentielles fondamentales et des intégrales correspondantes, p. 1029.

ERRATA.

Tome quatrième.

Page 124, ligne 7, *au lieu de* 624, *lire* 753.
Page 195, ligne 4 en remontant, *au lieu de* 704, ***lire*** **915.**
Page 304, ligne 8, *au lieu de* ( ), *lire* (1544).
Page 304, ligne 14, *au lieu de* ( ), *lire* (1548).

Page 312, ligne 6, *au lieu de*

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left[\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+Ax+B\right]+\text{const.},$$

lire

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left[\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+Ax+B\right]+\text{const.}$$

Page 353, ligne 6, *au lieu de* ... mine, *lire* miner.
Page 353, ligne 6, *au lieu de* 1045, *lire* 1043.
Page 359, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $(1-\rho_n r^n)$, *lire* $1-\rho_n r^n$.
Page 361, ligne 5, *au lieu de* 1111, *lire* 1057.
Page 365, lignes 17 et 23, *au lieu de* 22, *lire* 1061.
Page 367, ligne 5 en remontant, *au lieu de* au 228, *lire* au n° 228.
Page 369, ligne 10, *au lieu de* 1024, *lire* 1068.
Page 373, lignes 4, 10, 17, 22, 27, *au lieu de* Fig. 76, 47, 48, 49, *lire* Fig. 21, 22, 23, 24.
Page 374, ligne 7, *au lieu de* Fig. 48, 49, *lire* Fig. 23, 24.
Page 381, ligne 8, *au lieu de* 1036, *lire* 1080.
Page 382, ligne 10 en remontant, *au lieu de* 1036, *lire* 1080.
Page 384, lignes 4 et 5 en remontant, *au lieu de* Fig. 50, *lire* Fig. 25.
Page 388, ligne 8, *au lieu de* 935, *lire* 887.
Page 388, ligne 13, *au lieu de* 1017, *lire* 1061.
Page 404, ligne 13, *au lieu de* 1036, *lire* 1030.
Page 404, ligne 2, en remontant, *au lieu de* 1051, *lire* 1095.
Page 416, ligne 2 en remontant, *au lieu de* 1061, *lire* 1107.
Page 438, ligne 20, *au lieu de* sera, *lire* sera (1105).
Page 440, ligne 5 en remontant, *au lieu de* 1061, *lire* 1107.
Page 448, ligne 9 en remontant, *au lieu de* 1036, *lire* 1080.
Page 450, ligne 12, *au lieu de* 1068, *lire* 1063.
Page 460, ligne 10 en remontant, *au lieu de* 580, *lire* 793.
Page 462, ligne 5, *au lieu de* 1101, *lire* 1147.
Page 464, ligne 15 en remontant, *au lieu de* 1089, *lire* 1135.
Page 770, ligne 2 en remontant, *au lieu de* 1389, *lire* 1435.
Page 771, ligne 11, *au lieu de* 1388, *lire* 1434.
Page 778, ligne 14, *au lieu de* 847, *lire* 118.
Page 782, ligne 6, *au lieu de* 1394, *lire* 1440.
Page 784, ligne 7, *au lieu de* 851, *lire* 122.
Page 877, ligne 24, *au lieu de* 1345, *lire* 1391.
Page 879, ligne 17, supprimer 975.
Page 879, ligne 21, *au lieu de* 820, *lire* 91.
Page 880, ligne 9 en remontant, supprimer 975.
Page 882, ligne 7 en remontant, supprimer 974.
Page 886, ligne 8 en remontant, *au lieu de* 1492, *lire* 1538.
Page 892, lignes 6 et 4 en remontant, *au lieu de* Fig. 83, *lire* Fig. 48.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME QUATRIÈME.

LIVRE DIXIÈME.

CALCUL DIFFERENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LES INFINIMENT PETITS.

Définitions préliminaires.

716. Nous avons déjà indiqué ce qu'on devait entendre par une *quantité infiniment petite* ou par un *infiniment petit* (478). C'est une quantité ou une grandeur variable qui diminue indéfiniment en tendant vers la limite zéro sans jamais l'atteindre.

717. On a souvent, dans une même question, à considérer plusieurs infiniment petits qui dépendent, en général, les uns des autres.

Bien qu'ils tendent simultanément vers zéro, il y a lieu de les distinguer d'après les limites de leurs rapports mutuels.

On est ainsi conduit à choisir arbitrairement l'un d'eux comme *infiniment petit principal,* et c'est à celui-là qu'on rapporte tous les autres.

718. Cela posé, les infiniment petits du *premier ordre* sont ceux dont le rapport à l'infiniment petit principal tend vers *une limite finie, différente de zéro,* lorsqu'ils tendent en même temps que lui vers zéro.

Les infiniment petits du *deuxième ordre* sont ceux dont le rapport au *carré* de l'infiniment petit principal tend vers *une limite finie;* les infiniment petits du *troisième ordre* sont ceux dont le rapport au *cube* de l'infiniment petit principal tend vers *une limite finie,* et ainsi de suite.

D'une manière générale, *on nomme infiniment petit du*

$n^{ième}$ ordre tout infiniment petit dont le rapport à la $n^{ième}$ puissance de l'infiniment petit principal tend vers une limite finie DIFFÉRENTE DE ZÉRO, *lorsqu'ils tendent simultanément vers zéro.*

719. On dit d'ailleurs que *deux infiniment petits sont du même ordre, lorsque leur rapport tend vers une limite finie,* DIFFÉRENTE DE ZÉRO.

720. Désignons par α l'infiniment petit principal, et par ρ un infiniment petit du $n^{ième}$ ordre. On aura à la fois, par définition,

$$\lim \alpha = 0, \qquad \lim \rho = 0.$$

Représentons par K une quantité finie quelconque, différente de zéro, et par h une quantité qui tend vers zéro en même temps que α. Nous aurons, par définition (718),

$$\lim \frac{\rho}{\alpha^n} = K \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho}{\alpha^n} = K + h,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \alpha^n (K + h).$$

Telle est la forme générale de tout infiniment petit du $n^{ième}$ ordre.

Si $n = 1$, on a

$$\rho = \alpha(K + h).$$

ρ est alors du premier ordre ou du même ordre (719) que l'infiniment petit principal.

721. On peut avoir à considérer des infiniment petits dont le rapport à une puissance fractionnaire de l'infiniment principal a une limite finie. Leur ordre devient, dans ce cas, *fractionnaire.*

Si l'on a, par exemple,

$$\rho = \alpha^{\frac{p}{q}} (K + h),$$

ρ est un infiniment petit de l'ordre $\frac{p}{q}$.

Comparaison des infiniment petits d'ordres différents.

722. Il est évident que, *de deux infiniment petits d'ordres différents, celui de l'ordre le plus élevé est infiniment petit par rapport à l'autre.*

Soient les deux infiniment petits ρ et ρ_1 rapportés à l'infiniment petit principal α et, n_1 étant plus grand que n, supposons qu'on ait (720)

$$\rho = \alpha^n(\mathrm{K} + h), \qquad \rho_1 = \alpha^{n_1}(\mathrm{K}_1 + h_1);$$

on en déduit

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\alpha^{n_1}(\mathrm{K}_1 + h_1)}{\alpha^n(\mathrm{K} + h)} = \alpha^{n_1 - n}\frac{\mathrm{K}_1 + h_1}{\mathrm{K} + h}.$$

La limite de ce rapport est évidemment zéro, puisque k_1 et k sont des quantités finies différentes de zéro, et que toute puissance positive de α, dont l'exposant est un nombre fini, tend vers zéro en même temps que α (489).

Il résulte de là que ρ_1 finit par devenir un infiniment petit relativement à ρ, de manière à pouvoir être négligé devant lui dans les cas appropriés.

Opérations sur les infiniment petits.

723. Soient des infiniment petits ρ, ρ_1, ρ_2, ... *d'ordres croissants* n, n_1, n_2, ..., rapportés à l'infiniment petit principal α.

1° *La somme de plusieurs infiniment petits est du même ordre que celui dont l'ordre est le moins élevé.*

On a, en effet,

$$\frac{\rho + \rho_1 + \rho_2 + \dots}{\alpha^n} = \frac{\rho}{\alpha^n} + \frac{\rho_1}{\alpha^n} + \frac{\rho_2}{\alpha^n} + \dots$$

Et le premier rapport du second membre tend vers une limite finie (718), tandis que tous les autres rapports tendent vers zéro (722); ce qui justifie l'énoncé.

On peut dire, de même, que *la différence de deux infiniment petits d'ordres différents est du même ordre que celui dont l'ordre est le moins élevé.*

2° *Quand on multiplie deux infiniment petits, l'ordre du produit est la somme des ordres des facteurs.*

On a, en effet, l'égalité

$$\frac{\rho}{\alpha^n}\,\frac{\rho_1}{\alpha^{n_1}} = \frac{\rho\rho_1}{\alpha^{n+n_1}}.$$

Chaque facteur du premier membre tendant vers une limite finie (718), il en est de même du produit indiqué dans le second membre (485), et l'énoncé est justifié (718).

3° *Quand on divise deux infiniment petits, l'ordre du quotient est la différence des ordres du dividende et du diviseur.*

On a, en effet, l'égalité

$$\frac{\rho_1}{\alpha^{n_1}} : \frac{\rho}{\alpha^n} = \frac{\dfrac{\rho_1}{\rho}}{\alpha^{n_1-n}}.$$

Chaque rapport du premier membre tendant vers une limite finie, il en est de même du quotient indiqué dans le second membre (486), et l'énoncé est justifié (718).

4° *Quand on élève un infiniment petit à une puissance, l'ordre de cette puissance est le produit de l'ordre de l'infiniment petit par l'exposant de la puissance.*

Soit l'infiniment petit ρ, qui est d'ordre n. Nous aurons, en désignant par p l'exposant de la puissance, l'égalité

$$\left(\frac{\rho}{\alpha^n}\right)^p = \frac{\rho^p}{\alpha^{np}};$$

comme le premier membre tend vers une limite finie, quel que soit p, pourvu qu'il ne soit pas infini (489), il en est de même du second membre; ce qui vérifie l'énoncé (718).

724. *Lorsqu'on remplace l'infiniment principal d'abord choisi par un autre infiniment petit du même ordre, tous les autres infiniment petits engagés dans la question conservent leur ordre.*

Soient ρ un certain infiniment petit du $n^{\text{ième}}$ ordre, et β l'infiniment petit du même ordre que α ou du premier ordre

(720), substitué à l'infiniment petit principal α. On a, identiquement,

$$\frac{\rho}{\beta^n} = \frac{\rho}{\alpha^n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n.$$

Chaque facteur du second membre tendant, évidemment, vers une limite finie (718, 719), il en est de même du premier membre (485), et ρ, comparé à α ou à β, reste toujours de l'ordre n.

725. Il n'est pas inutile de remarquer qu'un infiniment petit peut être d'un *ordre indéterminé*. C'est ce qui arrivera lorsque, en comparant deux infiniment petits α et β, aucune puissance de l'un d'eux pris comme infiniment petit principal ne pourra être du même ordre que l'autre (718, 719). Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ ne peut, dans ce cas, présenter une limite finie, différente de zéro, puisque les deux infiniment petits seraient alors du même ordre (719); et tout ce qu'on peut dire, c'est que, si ce même rapport a une limite nulle ou infinie, l'ordre de α est supérieur ou inférieur à celui de β (722).

Exemples d'infiniment petits d'ordres différents.

726. La Géométrie et la Trigonométrie fournissent de nombreux exemples d'infiniment petits d'ordres différents pouvant coexister dans une même question.

L'aire d'un rectangle, dont les côtés sont des infiniment petits du premier ordre, est un infiniment petit du deuxième ordre (723, 2°).

Si l'arc de cercle infiniment petit x est choisi comme infiniment petit principal, $\sin x$ et $\operatorname{tang} x$ sont des infiniment petits du premier ordre (719), puisque l'on a alors (*Trigon.*, 104)

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\operatorname{tang} x}{x} = 1.$$

La différence $1 - \cos x$ est, dans la même hypothèse, un infiniment petit du deuxième ordre (718); car on a, d'une manière générale (*Trigon.*, 66),

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1-\cos x}{x^2} = 2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Enfin la différence $x - \sin x$ est, à son tour, un infiniment petit du troisième ordre (718); car on a, d'une manière générale (*Trigon.*, 105),

$$0 < x - \sin x < \frac{x^3}{4},$$

d'où

$$0 < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{1}{4};$$

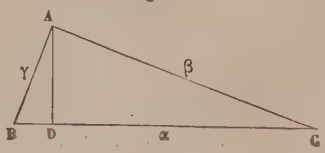
et le rapport $\frac{x-\sin x}{x^3}$, étant toujours compris entre 0 et $\frac{1}{4}$, tend nécessairement vers une limite qui ne peut surpasser $\frac{1}{4}$.

Nous verrons plus tard que cette limite est exactement $\frac{1}{6}$.

On pourrait multiplier ces exemples élémentaires. Nous ne nous y arrêterons pas ici; mais nous considérerons encore la question suivante, dont les résultats sont souvent utilisés.

727. *Soit un triangle rectangle* ABC (*fig.* 3), *dans lequel l'hypoténuse* BC *et l'angle aigu* C *sont des infiniment petits de même ordre.*

Fig. 3.



Désignons par α l'hypoténuse, par β et γ les deux côtés de l'angle droit, et prenons α pour infiniment petit principal. Cherchons l'ordre des autres côtés du triangle, nécessairement infiniment petits.

On a (*Trigon.*, 141)

$$\beta = \alpha\cos C, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \cos C, \qquad \lim\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Le côté β est donc un infiniment petit du premier ordre (719).

On a, d'autre part,

$$\gamma = \alpha \sin C.$$

L'angle C étant du premier ordre, il en est de même de son sinus (726). Par suite, γ, étant le produit de deux infiniment petits du premier ordre, est un infiniment petit du deuxième ordre (723, 2°).

Réciproquement, la relation

$$\sin C = \frac{\gamma}{\alpha}$$

prouve que si, dans un triangle rectangle infiniment petit, un côté γ est du deuxième ordre tandis que l'hypoténuse α est du premier, l'angle C opposé au côté γ est du premier ordre (723, 3°).

Si l'on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, on a

$$BD = \gamma \cos B = \gamma \sin C, \qquad CD = \beta \cos C, \qquad AD = \beta \sin C.$$

Par suite, BD est un infiniment petit du troisième ordre; CD est du premier ordre et AD, du deuxième ordre.

Supposons, maintenant, que C restant infiniment petit du premier ordre, l'hypoténuse α ait une longueur finie quelconque. La relation

$$\beta = \alpha \cos C$$

montre que β, projection de α sur β, est alors une quantité finie; mais la différence

$$\alpha - \beta = \alpha(1 - \cos C) = 2\alpha \sin^2 \frac{C}{2} \quad (726)$$

est un infiniment petit du deuxième ordre, puisque $\sin \frac{C}{2}$ est du premier ordre.

Il en résulte que, *lorsqu'on projette une droite finie sur une autre droite qui fait avec elle un angle infiniment petit, la différence entre la droite projetée et sa projection est un infiniment petit du deuxième ordre, relativement à l'angle considéré comme infiniment petit principal.*

Ce résultat est souvent invoqué en *Mécanique*.

728. Le triangle rectangle infiniment petit considéré plus haut conduit encore à une conséquence qu'il importe de signaler.

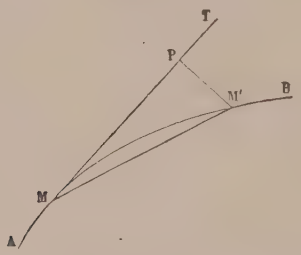
Sur une courbe AB (*fig.* 4), prenons deux points infiniment voisins M et M', et menons la tangente MT au point M. Si l'on

abaisse la perpendiculaire M′P sur MT, on a

$$M'P = MM' \sin M'MT.$$

Or, d'après la définition de la tangente (*Géom.*, 96), l'angle M′MT est un infiniment petit, et il en résulte que la distance M′P est à son tour un infiniment petit d'ordre supérieur.

Fig. 4.



Ainsi, *la distance de l'une des extrémités d'un arc infiniment petit à la tangente menée par l'autre extrémité est un infiniment petit d'ordre supérieur, quand on prend la distance des deux extrémités pour infiniment petit principal.*

Condition de substitution des infiniment petits dans des limites de rapports ou de sommes.

729. Premier principe. — *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites reste la même, quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports avec les premières ont respectivement l'unité pour limite.*

D'après l'énoncé même, les infiniment petits ainsi considérés sont deux à deux du même ordre (719).

Soient les deux couples d'infiniment petits α et α_1, β et β_1, tels qu'on ait

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1, \qquad \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1;$$

il faut prouver qu'on a, nécessairement,

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta}{\beta_1}.$$

C'est ce qui est, pour ainsi dire, évident; car (486) la relation

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ revient (486) à

$$\frac{\lim \alpha}{\lim \beta} = 1 \qquad \text{ou à} \qquad \lim \alpha = \lim \beta.$$

De même, la relation $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$ revient à

$$\frac{\lim \alpha_1}{\lim \beta_1} = 1 \qquad \text{ou à} \qquad \lim \alpha_1 = \lim \beta_1.$$

On a donc, en divisant membre à membre,

$$\frac{\lim \alpha}{\lim \alpha_1} = \frac{\lim \beta}{\lim \beta_1} \qquad \text{ou bien} \qquad \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta}{\beta_1}.$$

Appliquons ce premier principe à un exemple : x étant un arc infiniment petit et a et b étant des constantes, supposons qu'on ait à considérer les infiniment petits $\sin ax$ et $\sin bx$. Comme le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc est infiniment petit, on aura le droit de substituer au rapport $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ le rapport $\frac{ax}{bx}$, et il viendra immédiatement

$$\lim \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

730. On peut donner une autre forme, souvent plus commode, à ce premier principe.

En effet, *lorsque la limite du rapport de deux infiniment petits est égale à l'unité, la différence de ces infiniment petits est infiniment petite relativement à chacun d'eux; et, réciproquement, si la différence de deux infiniment petits est infiniment petite relativement à chacun d'eux, la limite de leur rapport est égale à l'unité.*

Soient α et β les deux infiniment petits, et δ leur différence.

Si l'on a

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha - \beta = \delta,$$

on déduit évidemment de la dernière égalité (483, 484)

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \lim \frac{\delta}{\beta} \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - \lim \frac{\delta}{\alpha}.$$

Ces deux relations justifient la proposition énoncée; car, si l'on a $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, ce qui entraîne $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, on a, à la fois

$$\lim \frac{\delta}{\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{\delta}{\beta} = 0;$$

et si l'on a, par exemple, $\lim \frac{\delta}{\alpha} = 0$, il en résulte

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \qquad \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

et, par conséquent, $\lim \frac{\delta}{\beta} = 0$.

On peut donc énoncer comme il suit le PREMIER PRINCIPE :

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas modifiée, lorsqu'on leur substitue d'autres quantités qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes.

731. LEMME. — *Si la somme de quantités infiniment petites, dont le nombre croît indéfiniment, a une valeur déterminée* S *ou tend vers une limite finie* S, *et qu'on les multiplie respectivement par d'autres quantités infiniment petites, la somme des produits obtenus a pour limite zéro ou est infiniment petite.*

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

les infiniment petits proposés dont la somme est S ou a pour limite S, quand n croît indéfiniment; soient

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

d'autres infiniment petits.

Formons la somme

$$\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \ldots + \alpha_n\omega_n.$$

Désignons par ω_i la valeur absolue de celui des infiniment petits de la seconde suite qui a la plus grande valeur absolue. Il est évident que la somme que nous venons d'indiquer sera

moindre, en valeur absolue, que le produit

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)\omega_i.$$

Or la limite de ce produit est égale (482, 485) à

$$S\lim\omega_i,$$

c'est-à-dire à zéro. Le lemme est donc démontré.

732. Deuxième principe. — *La limite de la somme de quantités infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, reste la même quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports avec les premières ont respectivement l'unité pour limite.*

Soient

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots,\quad \alpha_n$$

les infiniment petits considérés, et

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\quad \ldots,\quad \beta_n,$$

les infiniment petits dont les rapports aux précédents ont respectivement l'unité pour limite.

Le théorème est évident quand n est fini, puisque la limite d'une somme de quantités en nombre fini est égale à la somme des limites de ces quantités (484) et que, si l'on a

$$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=1,$$

on a aussi

$$\lim\alpha_1=\lim\beta_1.$$

Mais il ne l'est plus quand n est infini. Il faut alors une démonstration spéciale, qui nécessite le lemme que nous venons d'établir (731).

Si l'on a

$$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=1,\quad \lim\frac{\alpha_2}{\beta_2}=1,\quad \lim\frac{\alpha_3}{\beta_3}=1,\quad \ldots,\quad \lim\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1,$$

les rapports inverses ont aussi l'unité pour limite, et l'on peut poser

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=1+\omega_1,\quad \frac{\beta_2}{\alpha_2}=1+\omega_2,\quad \frac{\beta_3}{\alpha_3}=1+\omega_3,\quad \ldots,\quad \frac{\beta_n}{\alpha_n}=1+\omega_n,$$

en désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, d'autres infiniment petits tendant vers zéro en même temps que les précédents.

On déduit évidemment de ces égalités

$$\begin{aligned}&\lim(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_n)\\ &=\lim(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)\\ &\quad+\lim(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\alpha_3\omega_3+\ldots+\alpha_n\omega_n).\end{aligned}$$

Mais, en supposant que les conditions du lemme (731) soient remplies, la limite de la dernière somme du second membre de l'égalité résultante est zéro, et l'on a simplement

$$\lim(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_n)=\lim(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n).$$

733. On peut appliquer à l'énoncé du *deuxième principe* la même modification (730) qu'à l'énoncé du *premier principe*.

On peut donc théoriquement les réunir, et leur ensemble constitue le principe fondamental suivant :

Principe fondamental. — *Les limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits, dont le nombre augmente indéfiniment, ne sont pas modifiées, lorsqu'on leur substitue d'autres quantités qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites relativement à eux-mêmes.*

Cet énoncé général permet de supprimer respectivement, dans les quantités infiniment petites qu'on peut avoir à considérer, toutes les parties infiniment petites relativement à ces quantités elles-mêmes. Ainsi, *un infiniment petit d'ordre supérieur est*, en vertu de ce principe, *négligeable devant tout infiniment petit d'ordre moindre* (723). Les calculs peuvent être par là grandement simplifiés; et il n'en résulte aucune erreur dans la recherche des limites de rapports ou de sommes de ces quantités infiniment petites.

Nous en avons rencontré de nombreux exemples en *Géométrie* (t. II).

734. Les principes que nous venons de démontrer (729, 732, 733) ne sont autre chose, en réalité, que la Méthode infinitésimale elle-même, et celle-ci, comme on le voit, n'est qu'une des formes de la Méthode des limites (490).

Les quantités infiniment petites s'introduisent en effet, précisément, *dans le calcul des grandeurs déterminées*, soit en regardant une pareille grandeur comme la limite du rapport de deux infiniment petits, soit en la concevant comme décomposée en un nombre infiniment grand de parties infiniment petites. Le premier point de vue appartient aux modernes; le second point de vue a été celui des anciens et, notamment, d'ARCHIMÈDE.

Le *Calcul différentiel* découle du premier principe (729), tandis que le deuxième principe (732). se rapporte spécialement au *Calcul intégral*.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE L'ACCROISSEMENT D'UN POLYNOME ENTIER SUIVANT LES PUISSANCES DES ACCROISSEMENTS DES VARIABLES.

Cas d'une seule variable.

735. Soit un polynôme *entier par rapport à* x

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

dans lequel les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, sont des constantes réelles quelconques, et x la variable dont la valeur du polynôme dépend. Ce polynôme est alors une *fonction de* x et peut être représenté par $F(x)$ (*Alg. élémentaire*, 309).

Si l'on remplace x par $x + h$, h désignant une variation ou un accroissement quelconque de x, il vient

$$F(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m.$$

On peut alors développer chaque terme du second membre suivant la formule du binôme (265). On a ainsi

$$A_0\ (x+h)^m = A_0\ x^m + \frac{m}{1} A_0 x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} A_0 x^{m-2} h^2 + \ldots + \frac{m}{1} A_0 x h^{m-1} + A_0 h^m,$$

$$A_1\ (x+h)^{m-1} = A_1\ x^{m-1} + \frac{m-1}{1} A_1 x^{m-2} h + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A_1 x^{m-3} h^2 + \ldots + A_1 h^{m-1},$$

$$A_2\ (x+h)^{m-2} = A_2\ x^{m-2} + \frac{m-2}{1} A_2 x^{m-3} h + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} A_2 x^{m-4} h^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots

Si l'on considère le second membre de cette relation, on voit que les termes indépendants de h forment le polynôme proposé lui-même, comme cela doit être, puisque, pour $h = 0$, on doit retrouver $F(x)$.

Quant au coefficient de la première puissance de h, c'est ce qu'on appelle le *polynôme dérivé* ou la *dérivée* du polynôme proposé. On représente la dérivée du polynôme $F(x)$ à l'aide de la notation $F'(x)$.

Le polynôme dérivé

$$F'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}$$

se déduit du polynôme $F(x)$ suivant une loi très simple : *il suffit*, pour l'obtenir, *de multiplier chaque terme de ce polynôme par l'exposant de x dans ce terme, en diminuant en même temps l'exposant de x d'une unité.*

Le premier terme de $F'(x)$ est ainsi mA_0x^{m-1} et le dernier A_{m-1}, car le dernier terme A_m de $F(x)$ doit être regardé comme contenant x^0.

En examinant les coefficients de $\frac{h^2}{1.2}$, $\frac{h^3}{1.2.3}$, $\ldots$, on voit facilement que *chacun d'eux se déduit du précédent suivant la règle qu'on vient d'énoncer.* Il en résulte que le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ est la *dérivée* de $F'(x)$ ou ce qu'on appelle la *dérivée seconde* de $F(x)$. Cette seconde dérivée est représentée par la notation $F''(x)$. De même, le coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$ est la *dérivée* de $F''(x)$ ou la *dérivée seconde* de $F'(x)$ ou la *dérivée troisième* de $F(x)$, de sorte que sa notation est $F'''(x)$. On continuera de la même manière, jusqu'aux derniers termes du second membre de la relation que nous étudions.

Il faut observer, à ce sujet, que, si l'on applique la règle aux deux derniers coefficients (seuls représentés ci-dessous), *au lieu de les écrire directement d'après la formule du binôme* (265), comme nous l'avons fait, ces coefficients, qui sont ceux de h^{m-1} et de h^m, prendront la forme

$$m(m-1)(m-2)\ldots 2.A_0x + (m-1)(m-2)(m-3)\ldots 1\ A_1$$

et

$$m(m-1)(m-2)\ldots 2.1.A_0.$$

au lieu des expressions indiquées

$$mA_0x + A_1 \quad \text{et} \quad A_0.$$

Pour appliquer partout la même notation, nous écrirons donc les deux derniers termes du développement comme il suit, en désignant par $F^{(m-1)}(x)$ et par $F^{(m)}(x)$ la $(m-1)^{\text{ième}}$ et la $m^{\text{ième}}$ dérivée du polynôme $F(x)$:

$$F^{(m-1)}(x)\left|\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\right. + F^{(m)}(x)\left|\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}\right.\cdot$$

(On fera de même, s'il y a lieu, pour les termes précédents.)

Nous aurons finalement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) = F(x) &+ F'(x)\frac{h}{1} + F''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ &+ F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ F^{(m-1)}(x)\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \\ &+ F^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned}\right.$$

L'accroissement pris par le polynôme $F(x)$, *lorsque la variable* x *subit elle-même l'accroissement ou la variation positive ou négative* h, *a* donc *pour expression*

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) - F(x) = F'(x)&\frac{h}{1} + F''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ &+ F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ F^{(m-1)}(x)\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \\ &+ F^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned}\right.$$

736. Il est important de remarquer que, d'une manière générale, *lorsqu'on prend les dérivées successives d'un polynôme* $F(x)$, *le degré de chaque dérivée est moindre d'une unité.*

Ainsi, le polynôme proposé étant du degré m, sa dérivée première est du degré $m-1$, sa dérivée deuxième du degré

$m-2$, sa dérivée troisième du degré $m-3$, etc., sa $m^{\text{ième}}$ dérivée du degré $m-m$ ou zéro.

Cette $m^{\text{ième}}$ dérivée ne renferme donc *plus x, elle se réduit à une constante, et les dérivées suivantes sont nulles ou n'existent pas.*

A chaque nouvelle dérivée, il entre un coefficient de moins, parmi les coefficients les plus éloignés du polynôme donné, dans l'expression de la dérivée, et la $m^{\text{ième}}$ ou dernière dérivée ne contient plus que le coefficient A_0 du premier terme du polynôme supposé ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable x.

Prenons, par exemple,

$$F(x) = \overset{[A_0]}{2}x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 1;$$

il viendra (735)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 8x^3 - 21x^2 + 10x + 3, \\ F''(x) &= 24x^2 - 42x + 10, \\ F'''(x) &= 48x - 42, \\ F^{IV}(x) &= \overset{[A_0]}{48} = 1.2.3.4.2. \end{aligned}$$

737. Nous terminerons par une remarque qui nous sera utile plus tard.

Dans la formule (1) du n° 735, permutons x et h, ce qui ne modifiera pas l'expression du premier membre; nous aurons évidemment

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x+h) = F(h) &+ F'(h)\frac{x}{1} + F''(h)\frac{x^2}{1.2} \\ &+ F'''(h)\frac{x^3}{1.2.3} + \dots \\ &+ F^{(m)}(h)\frac{x^m}{1.2.3\dots m}. \end{aligned} \right.$$

Ce nouveau développement permet de calculer plus rapidement le résultat de la substitution de $x+h$ à la place de x dans le polynôme $F(x)$.

Cherchons, par exemple, ce que devient le polynôme ci-dessus (736), $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 1$, lorsqu'on y remplace x par $x+3$.

Il suffit, d'après la formule (3), de former les différentes dérivées de ce polynôme et d'y faire $x = 3$. On a ainsi, d'après les résultats précédents (736),

$$F'(3) = 60, \qquad F''(3) = 100, \qquad F'''(3) = 102, \qquad F^{IV}(3) = 48.$$

On a d'ailleurs

$$F(3) = 26.$$

On peut donc écrire, en renversant l'ordre des termes et en tenant compte des dénominateurs,

$$F(x+3) = 2x^4 + 17x^3 + 50x^2 + 60x + 26.$$

Cas de deux variables.

738. Nous devons d'abord donner quelques indications préliminaires.

Considérons un polynôme *entier par rapport à x et à y*, en désignant ainsi *deux variables indépendantes* ou deux quantités qui varient d'une manière arbitraire et indépendamment l'une de l'autre.

Ce polynôme entier sera alors une *fonction de x et de y*, et nous le représenterons par $F(x, y)$.

On peut, dans cette fonction, regarder y comme *constante*, et prendre le polynôme dérivé ou la dérivée de la fonction par rapport à la *variable* x (735). On obtient alors ce qu'on appelle la *dérivée partielle de la fonction par rapport à x*.

De même, si l'on regarde au contraire x comme *constante*, et si l'on prend le polynôme dérivé ou la dérivée de la fonction par rapport à la *variable* y, on obtient ce qu'on appelle la *dérivée partielle de la fonction par rapport à y*.

On représente ces deux dérivées partielles, qui sont des dérivées *premières* ou des dérivées *du premier ordre*, par les notations

$$F'_x(x, y) \quad \text{et} \quad F'_y(x, y)$$

ou, plus simplement, par les notations

$$F'_x \quad \text{et} \quad F'_y.$$

L'accent indique l'ordre de la dérivée partielle et, l'indice, la variable indépendante par rapport à laquelle on a pris cette dérivée partielle.

On peut former également les dérivées partielles des premières dérivées partielles obtenues, qui sont elles-mêmes, en général, des fonctions de x et de y. On trouve ainsi des dérivées partielles qui sont des dérivées *secondes* ou des dérivées partielles *du second ordre* de $\mathrm{F}(x, y)$.

Comme les deux dérivées successives peuvent être prises, soit deux fois par rapport à x, soit une fois par rapport à x et une fois par rapport à y, soit deux fois par rapport à y, on a, de cette manière, trois dérivées partielles du second ordre représentées par les notations

$$\mathrm{F}''_{x^2}(x, y), \quad \mathrm{F}''_{x,y}(x, y), \quad \mathrm{F}''_{y^2}(x, y),$$

ou par les notations

$$\mathrm{F}''_{x^2}, \quad \mathrm{F}''_{x,y}, \quad \mathrm{F}''_{y^2}.$$

On voit que l'ordre de dérivation correspond à l'accentuation de la lettre F et que l'indice de cette lettre indique les variables par rapport auxquelles les dérivées partielles successives ont été prises. L'indice x^2 ou l'indice y^2 remplace simplement, par convention, l'indice x, x ou l'indice y, y.

Si l'on forme encore les dérivées partielles des dérivées partielles du second ordre, on trouve des dérivées partielles *du troisième ordre* de $\mathrm{F}(x, y)$. Les trois dérivées partielles successives pouvant être prises, soit trois fois par rapport à x, soit deux fois par rapport à x et une fois par rapport à y, soit une fois par rapport à x et deux fois par rapport à y, soit trois fois par rapport à y, elles seront représentées par les notations

$$\mathrm{F}'''_{x^3}(x, y), \quad \mathrm{F}'''_{x^2,y}(x, y), \quad \mathrm{F}'''_{x,y^2}(x, y), \quad \mathrm{F}'''_{y^3}(x, y),$$

ou par les notations

$$\mathrm{F}'''_{x^3}, \quad \mathrm{F}'''_{x^2,y}, \quad \mathrm{F}'''_{x,y^2}, \quad \mathrm{F}'''_{y^3}.$$

On continuera de la même manière.

739. Lorsqu'il s'agit d'un polynôme, le degré des dérivées partielles des différents ordres va toujours en diminuant d'une unité (736). On arrive donc nécessairement à des constantes pour les dérivées partielles d'un certain ordre, et toutes les dérivées partielles suivantes sont nulles.

Soit, par exemple, la fonction entière du troisième degré

$$F(x,y) = A_0x^3 + A_1x^2y + A_2xy^2 + A_3y^3 + B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2 + C_0x + C_1y + D_0.$$

On en déduit successivement (735, 738),

$$F'_x = 3A_0x^2 + 2A_1xy + A_2y^2 + 2B_0x + B_1y + C_0,$$
$$F'_y = A_1x^2 + 2A_2xy + 3A_3y^2 + B_1x + 2B_2y + C_1,$$

$$F''_{x^2} = 6A_0x + 2A_1y + 2B_0,$$
$$F''_{x,y} = 2A_1x + 2A_2y + B_1,$$
$$F''_{y^2} = 2A_2x + 6A_3y + 2B_2;$$

$$F'''_{x^3} = 6A_0, \qquad F'''_{x^2,y} = 2A_1, \qquad F'''_{x,y^2} = 2A_2, \qquad F'''_{y^3} = 6A_3.$$

Toutes les dérivées partielles du troisième ordre étant des constantes, les dérivées partielles d'ordre supérieur sont toutes nulles.

On peut remarquer que l'on a

$$F''_{y,x} = 2A_1x + 2A_2y + B_1 = F''_{x,y},$$
$$F'''_{y,x^2} = 2A_1 = F'''_{x^2,y}, \qquad F'''_{y^2,x} = 2A_2 = F'''_{x,y^2}.$$

Il en résulte que, pour le cas considéré, si les indices de F sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants et que l'on prenne ces lettres dans un ordre quelconque, les dérivées partielles correspondantes demeurent identiques, c'est-à-dire que *l'ordre suivant lequel on forme les dérivées partielles successives est indifférent.*

740. Reprenons maintenant le polynôme entier quelconque $F(x,y)$ et donnons respectivement aux deux variables x et y (738) les accroissements h et k. Il s'agit de trouver le développement de $F(x+h, y+k)$, pour en déduire ensuite l'accroissement correspondant

$$F(x+h, y+k) - F(x,y)$$

subi par le polynôme.

Dans $F(x, y)$, nous pouvons d'abord faire varier x seulement, en regardant y comme une constante. Nous aurons alors évidemment, d'après ce qui précède (735, 738),

$$F(x+h, y) = F(x, y) + F'_x(x, y)\frac{h}{1} + F''_{x^2}(x, y)\frac{h^2}{1.2} + F'''_{x^3}(x, y)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + F^{(n)}_{x^n}(x, y)\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Dans cette relation, nous pouvons regarder x comme une constante et faire varier y à son tour en lui substituant la valeur $y+k$. Le premier membre deviendra alors l'expression $F(x+h, y+k)$ dont nous cherchons le développement, et les différents termes du second membre prendront les valeurs suivantes :

$$F\ (x, y+k) = F(x, y) + F'_y(x, y)\frac{k}{1} + F''_{y^2}(x, y)\frac{k^2}{1.2} + F'''_{y^3}(x, y)\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$F'_x\ (x, y+k)\frac{h}{1} = F'_x(x, y)\frac{h}{1} + F''_{x,y}(x, y)\frac{hk}{1} + F'''_{x,y^2}(x, y)\frac{hk^2}{1.2} + F^{IV}_{x,y^3}(x, y)\frac{hk^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$F''_{x^2}(x, y+k)\frac{h^2}{1.2} = F''_{x^2}(x, y)\frac{h^2}{1.2} + F'''_{x^2,y}(x, y)\frac{h^2k}{1.2} + F^{IV}_{x^2,y^2}(x, y)\frac{h^2k^2}{1.2.1.2} + F^{V}_{x^2,y^3}(x, y)\frac{h^2k^3}{1.2.1.2.3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots

En ordonnant le second membre suivant les puissances réunies des accroissements h et k, et en le disposant en colonnes verticales, on obtient la formule

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
F(x+h,y+k) = {} & F(x,y) + F'_x(x,y)\frac{h}{1} + F''_{x^2}(x,y)\ \frac{h^2}{1.2} + F'''_{x^3}(x,y)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + F^{(n)}_{x^n}(x,y)\ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots \\
& + F'_y(x,y)\frac{k}{1} + F''_{x,y}(x,y)\frac{h.k}{1} + F'''_{x^2,y}(x,y)\frac{h^2.k}{1.2} + \ldots + F^{(n)}_{x^{n-1},y}(x,y)\frac{h^{n-1}.k}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots \\
& + F''_{y^2}(x,y)\ \frac{k^2}{1.2} + F'''_{x,y^2}(x,y)\frac{h.k^2}{1.2} + \ldots + F^{(n)}_{x^{n-2},y^2}(x,y)\frac{h^{n-2}.k^2}{1.2.3\ldots(n-2).1.2} + \ldots \\
& + F'''_{y^3}(x,y)\ \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots + F^{(n)}_{x^{n-3},y^3}(x,y)\frac{h^{n-3}.k^3}{1.2.3\ldots(n-3)\ 1.2.3} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots \\
& + F^{(n)}_{x,y^{n-1}}(x,y)\frac{h.k^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots \\
& + F^{(n)}_{y^n}(x,y)\ \frac{k^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots \\
& + \ldots
\end{aligned}\right.
$$

Comme il s'agit d'un polynôme, ce développement se termine nécessairement comme le précédent (735, 736, 739). Quand le polynôme entier considéré est du degré m, le nombre des colonnes verticales du second membre est égal à $m+1$.

741. Remarquons que le terme général du développement obtenu, qui est le dernier écrit ci-dessus, revient à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[F^{(n)}_{x^n}(x,y)h^n + nF^{(n)}_{x^{n-1},y}(x,y)h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}F^{(n)}_{x^{n-2},y^2}(x,y)h^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}F^{(n)}_{x^{n-3},y^3}(x,y)h^{n-3}k^3 + \ldots + F^{(n)}_{y^n}(x,y)k^n\right].$$

En se reportant à la formule du binôme (263), on peut donc le mettre *sous la forme symbolique*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}[F'_x(x,y)h + F'_y(x,y)k]^n,$$

en convenant que les exposants qui doivent alors affecter successivement $F'_x(x,y)$ et $F'_y(x,y)$ indiqueront seulement le nombre d'accents de la lettre F et l'exposant de son indice. D'ailleurs, dans chaque terme du développement, les accents des deux lettres F devront s'ajouter, de manière que chacun d'eux contiendra $F^{(n)}(x,y)$, et l'on réunira en même temps, pour $F^{(n)}$, les indices x et y dont la somme des exposants sera toujours égale à n.

742. D'après la formule (1) (740), l'accroissement pris par le polynôme entier $F(x,y)$, lorsque les variables x et y reçoivent d'une manière indépendante les accroissements simultanés h et k, a pour expression

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x+h,y+k) - F(x,y)\\ &= F'_x(x,y)\frac{h}{1} + F''_{x^2}(x,y)\frac{h^2}{1.2} + F'''_{x^3}(x,y)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\\ &+ F'_y(x,y)\frac{k}{1} + F''_{x,y}(x,y)\frac{hk}{1} + F'''_{x^2,y}(x,y)\frac{h^2k}{1.2} + \ldots\\ &+ F''_{y^2}(x,y)\frac{k^2}{1.2} + F'''_{x,y^2}(x,y)\frac{hk^2}{1.2} + \ldots\\ &+ F'''_{y^3}(x,y)\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\\ &+ \ldots \end{aligned}\right.$$

ou, symboliquement (741) et en abrégeant l'écriture,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(x+h, y+k) - \mathrm{F}(x, y) \\ &\quad = (\mathrm{F}'_x h + \mathrm{F}'_y k) + \frac{1}{1.2}(\mathrm{F}'_x h + \mathrm{F}'_y k)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{1.2.3}(\mathrm{F}'_x h + \mathrm{F}'_y k)^3 + \dots \\ &\qquad + \frac{1}{1.2.3\dots n}(\mathrm{F}'_x h + \mathrm{F}'_y k)^n + \dots . \end{aligned}\right.$$

743. La démonstration donnée pour le cas de deux variables x et y peut s'étendre sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de variables.

On trouvera, par exemple, pour un polynôme entier $\mathrm{F}(x, y, z)$, fonction des trois variables indépendantes x, y, z, ces trois variables recevant respectivement les accroissements h, k, l, et en abrégeant l'écriture dans le second membre (738),

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(x+h, y+k, z+l) - \mathrm{F}(x, y, z) \\ &= \mathrm{F}'_x \frac{h}{1} + \mathrm{F}''_{x^2} \frac{h^2}{1.2} + \mathrm{F}'''_{x^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots \\ &+ \mathrm{F}'_y \frac{k}{1} + \mathrm{F}''_{y^2} \frac{k^2}{1.2} + \mathrm{F}'''_{y^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \dots \\ &+ \mathrm{F}'_z \frac{l}{1} + \mathrm{F}''_{z^2} \frac{l^2}{1.2} + \mathrm{F}'''_{z^3} \frac{l^3}{1.2.3} + \dots \\ &\quad + \mathrm{F}''_{x,y} \frac{hk}{1} + \mathrm{F}'''_{x^2,y} \frac{h^2 k}{1.2} + \dots \\ &\quad + \mathrm{F}''_{x,z} \frac{hl}{1} + \mathrm{F}'''_{x^2,z} \frac{h^2 l}{1.2} + \dots \\ &\quad + \mathrm{F}''_{y,z} \frac{kl}{1} + \mathrm{F}'''_{x,y^2} \frac{hk^2}{1.3} + \dots \\ &\qquad + \mathrm{F}'''_{x,z^2} \frac{hl^2}{1.2} + \dots \\ &\qquad + \mathrm{F}'''_{y^2,z} \frac{k^2 l}{1.2} + \dots \\ &\qquad + \mathrm{F}'''_{y,z^2} \frac{kl^2}{1.2} + \dots \\ &\qquad + \mathrm{F}'''_{x,y,z} \frac{hkl}{1} + \dots \\ &\qquad\qquad + \dots . \end{aligned}$$

Le terme général du développement serait ici, *sous forme symbolique* (741, 297),

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}(F'_x h + F'_y k + F'_z l)^n.$$

744. Les *développements* précédents (735, 740, 743) constituent ce qu'on appelle la *série de Taylor* appliquée aux polynômes entiers.

L'utilité de ces développements, que nous généraliserons en les appliquant à une fonction quelconque, apparaîtra complètement lorsque nous étudierons la Théorie des dérivées et des différentielles

CHAPITRE III.

DÉFINITIONS DE LA DÉRIVÉE ET DE LA DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE.

Définition de la dérivée.

745. Nous nous sommes occupé précédemment de l'expression de l'accroissement d'un polynôme entier en x et de degré m, suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable x. En représentant ce polynôme par $F(x)$ et en désignant l'accroissement de la variable par h, nous avons trouvé (735) l'importante formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h)-F(x)=F'(x)\frac{h}{1}+F''(x)\frac{h^2}{1.2}\\ +F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+F^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons donné alors au polynôme $F'(x)$ le nom de *polynôme dérivé* ou de *première dérivée* de $F(x)$, et nous avons indiqué suivant quelle loi simple il se déduit de $F(x)$. De même, $F''(x)$ est la dérivée de $F'(x)$ ou la *dérivée seconde* de $F(x)$; $F'''(x)$ est la dérivée de $F''(x)$ ou la dérivée seconde de $F'(x)$, ou la *dérivée troisième* de $F(x)$; et ainsi de suite.

746. Cela posé, on peut vouloir chercher le rapport de l'accroissement de la fonction considérée à l'accroissement de la variable. Il suffit, pour l'obtenir, de diviser par h les deux membres de la relation (1). Il vient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)+F''(x)\frac{h}{1.2}\\ +F'''(x)\frac{h^2}{1.2.3}+\ldots+F^{(m)}(x)\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned}\right.$$

La fonction entière $F(x)$ étant continue (612), si l'on fait tendre l'accroissement h de la variable vers zéro, en conservant à x une valeur fixe, il en sera de même (602) de l'accroissement de la fonction $F(x+h) - F(x)$. *Mais le rapport des deux accroissements ne sera pas indéterminé* (*Alg. élém.*, 116). En effet, la limite du premier membre de la relation (2) est égale à la limite du second membre. Dans ce second membre, tous les polynômes dérivés conservant des valeurs finies, tous les termes, *à partir du deuxième,* tendent vers zéro quand h tend vers zéro (482); et, comme ces termes sont en nombre fini, la limite de leur somme, égale à la somme de leurs limites (484), est zéro. On a donc, pour h infiniment petit,

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x). \tag{3}$$

Ce qui montre que *la dérivée du polynôme entier* $F(x)$ *est, pour une valeur quelconque de* x, *la limite du rapport de l'accroissement de ce polynôme à l'accroissement correspondant de la variable* x, *lorsque celui-ci tend indéfiniment vers zéro* [ou, plus rapidement, puisque la fonction entière $F(x)$ est continue, la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de la fonction et de la variable].

747. C'est la définition précédente qu'on adopte pour toutes les fonctions d'une seule variable, lors même qu'il serait impossible de les développer suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable, comme nous avons pu le faire pour les fonctions entières, telles que $F(x)$. Et l'on dit que :

La dérivée d'une fonction quelconque de x *telle que* $y = f(x)$ *est, pour une valeur donnée de* x, *la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro.*

On représente la dérivée par la notation

$$f'(x) \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}\,f(x) \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}y.$$

Quand il y a plus de deux variables, il peut être utile d'indiquer que la dérivée de la fonction y est prise spécialement

par rapport à la variable x, par exemple, et l'on emploie alors la notation

$$D_x y.$$

La *dérivée première* de la fonction $y = f(x)$ peut admettre, à son tour, une dérivée (745) qui est la *dérivée seconde* de la fonction. La dérivée seconde peut admettre elle-même une dérivée, qui est la dérivée seconde de la dérivée première ou la *troisième dérivée* de la fonction; et ainsi de suite. Ces dérivées successives de la fonction, à partir de la deuxième dérivée, seront représentées par les notations

$$\begin{aligned} &f''(x) \quad \text{ou} \quad D^2 f(x) \quad \text{ou} \quad D^2 y, \\ &f'''(x) \quad \text{ou} \quad D^3 f(x) \quad \text{ou} \quad D^3 y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &f^{(n)}(x) \quad \text{ou} \quad D^n f(x) \quad \text{ou} \quad D^n y. \end{aligned}$$

748. Il faut nous arrêter sur la définition que nous venons de donner de la dérivée d'une fonction d'une seule variable (534). Elle suppose implicitement que la limite du rapport des deux accroissements considérés est, *en général,* une quantité finie et déterminée; sans quoi, il n'y aurait pas lieu de s'occuper de cette limite.

Nous remarquerons qu'on a été conduit à la découverte du Calcul différentiel, qui n'est autre chose que la théorie des dérivées et des différentielles considérées dans leurs principes et leurs applications, en cherchant une méthode générale pour mener les tangentes aux courbes planes susceptibles d'une expression algébrique.

Supposons la fonction $y = f(x)$ et construisons la courbe AMB (*fig.* 5) qui la représente graphiquement, d'après le procédé indiqué en Algèbre élémentaire (*Alg. élém.,* 312 et suiv.), et en choisissant des axes rectangulaires Ox et Oy.

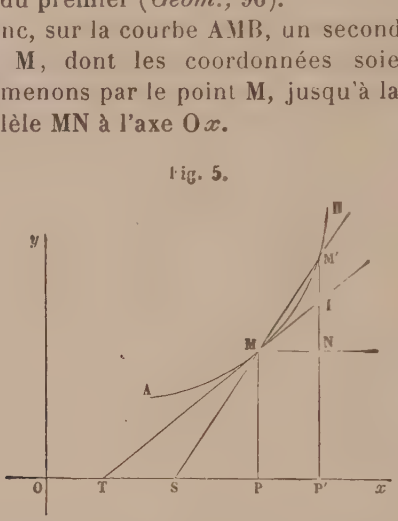
Les coordonnées x et y des points de cette courbe représentent les valeurs simultanées de la variable x et de la fonction y, et nous admettons que la courbe AMB est réelle et continue dans un certain intervalle, comme la fonction elle-même. Proposons-nous, dans cette hypothèse, de mener la tangente à la courbe au point M, dont les coordonnées sont $x = OP$ et $y = MP$.

Les modernes, depuis Descartes, définissent la tangente en un point d'une courbe, comme étant la limite des positions

d'une sécante variable passant par le point donné et par un second point d'intersection avec la courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier (*Géom.*, 96).

Prenons donc, sur la courbe AMB, un second point M′ voisin du point M, dont les coordonnées soient $x' = OP'$, $y' = M'P'$, et menons par le point M, jusqu'à la rencontre de M′P′, la parallèle MN à l'axe Ox.

Fig. 5.



Si nous désignons par h et par k les accroissements correspondants de la variable x et de la fonction y, quand on passe du point M au point M′ de la courbe AMB, les coordonnées du point M′ deviendront

$$OP' = OP + PP' = OP + MN = x + h,$$
$$M'P' = NP' + M'N = MP + M'N = y + k,$$

et nous aurons

$$h = MN, \qquad k = M'N.$$

Cela posé, le triangle rectangle MNM′ donne (*Trigon.*, 142)

$$\text{tang}\, M'MN = \frac{M'N}{MN} = \frac{k}{h}.$$

Quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, h diminue et tend indéfiniment vers zéro. En même temps, la sécante M′MS tend indéfiniment vers la tangente IMT au point M, et l'angle M′MN vers l'angle IMN, qui représente celui que fait cette tangente avec l'axe Ox. Les limites de deux quantités toujours égales étant égales (476), on a donc

$$\text{tang}\, IMN = \lim \text{tang}\, M'MN = \lim \frac{k}{h}.$$

Ainsi, *la limite de* $\frac{k}{h}$ *ou* $f'(x)$ (747) *se trouve représentée par la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe* AMB, *au point* M *dont l'abscisse est* x, *avec l'axe* Ox, tangente trigonométrique, en général, parfaitement déterminée.

Si l'on peut calculer la limite de $\frac{k}{h}$ à l'aide de l'équation de la courbe, la tangente trigonométrique de l'angle IMN sera connue, et la construction de la tangente au point M s'en déduira immédiatement.

Réciproquement, si, la courbe AMB étant construite, on peut lui mener une tangente au point M, la tangente trigonométrique de l'angle IMN fera connaître la valeur de la dérivée de la fonction correspondante $y = f(x)$, pour $x = OP$.

Il y a donc identité entre la recherche des dérivées des fonctions d'une seule variable et celle des tangentes aux courbes planes qui les représentent, et *la dérivée existe quand la tangente existe.*

Ajoutons que la limite du rapport $\frac{k}{h}$ ne dépend nullement de h, mais seulement de la valeur attribuée à x. La dérivée de $f(x)$ sera donc, en général, une nouvelle fonction de x (747).

749. Quand la limite du rapport $\frac{k}{h}$ existe, c'est-à-dire quand cette limite est finie et déterminée, il est clair que la fonction proposée est continue pour la valeur considérée de x (602). Car, si l'on prend h pour infiniment petit principal, le rapport $\frac{k}{h}$ tendant vers une limite finie quand h tend vers zéro, k est alors un infiniment petit du même ordre que h (719), et il ne peut y avoir d'exception que pour des valeurs toutes particulières de la variable x.

Lorsque $\lim \frac{k}{h} = f'(x)$ s'annule pour une certaine valeur de x, l'accroissement de la fonction est d'un ordre supérieur à celui de la variable. C'est le contraire lorsque $f'(x)$ devient infinie (722).

750. Réciproquement, lorsque $f(x)$ est une fonction con-

tinue, on démontre que la dérivée $f'(x)$ est, en général, elle-même une fonction continue, sauf pour des valeurs toutes spéciales de la variable x, pour lesquelles elle peut devenir infinie, indéterminée ou discontinue. Ces valeurs spéciales de x correspondent à leur tour à des directions particulières de la tangente à la courbe $y = f(x)$.

Nous laissons de côté cette démonstration, longue et délicate, que les faits vérifient constamment.

Théorèmes généraux.

751. I. *Une quantité constante,* c'est-à-dire indépendante de x, *a une dérivée constamment nulle,* puisque, quel que soit l'accroissement h donné à la variable x, l'accroissement correspondant k de la fonction n'existe pas.

Mais il n'est pas évident que toute fonction dont la dérivée est constamment nulle se réduise à une constante.

Pour établir cette importante *réciproque,* nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

752. II. *Le rapport des accroissements simultanés et finis* H *et* K *de x et de y, dans un intervalle où la fonction $y = f(x)$ est continue et où sa dérivée conserve des valeurs déterminées, est une moyenne entre toutes les valeurs prises par la dérivée $f'(x)$, lorsque la variable parcourt l'étendue renfermée entre ses valeurs extrêmes x et $x + \mathrm{H}$.*

Si nous donnons à x, en restant dans l'intervalle considéré, un accroissement fini H, il en résultera pour y un accroissement également fini K (604).

Nous pourrons alors faire passer la variable de sa première valeur x à sa dernière $x + \mathrm{H}$ par une suite d'accroissements *de même signe* $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$. Les accroissements correspondants de la fonction y seront $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$. Nous aurons donc

$$\mathrm{H} = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n, \qquad \mathrm{K} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n.$$

D'après un théorème connu (491), il en résulte

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n}{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n} = \mathrm{moy}\left(\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}\right),$$

et cette égalité reste vraie, quelque grand que soit n. Mais,

quand n croît indéfiniment, les éléments $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, et les rapports $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}$ tendent eux-mêmes, autant qu'on veut, vers les valeurs prises successivement par la dérivée $f'(x)$, pendant que x parcourt d'une manière continue l'étendue renfermée entre x et $x + \mathrm{H}$. On peut donc écrire à la limite, en employant une notation expressive,

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}} = \underset{x}{\overset{x+\mathrm{H}}{\mathrm{moy}}} f'(x). \tag{1}$$

753. III. *Toute fonction dont la dérivée est constamment nulle se réduit* nécessairement *à une constante.*

Supposons, en effet, en nous reportant au théorème que nous venons d'établir (752), que la dérivée $f'(x)$ soit constamment nulle dans l'étendue considérée. *Tous les rapports* $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}$ *auront alors respectivement zéro pour limite.* Il en sera donc de même de leur moyenne; et, comme cette moyenne est une quantité constante, elle sera rigoureusement nulle. Il résulte, par conséquent, de l'équation (1) du n° 752 que l'accroissement K de la fonction sera aussi constamment nul pour l'étendue considérée ou pour toute partie de l'intervalle proposé, c'est-à-dire que, dans cet intervalle, la fonction $y = f(x)$ se trouvera réduite à une constante.

Graphiquement, on voit que la fonction

$$y = \text{const.}$$

est représentée par une droite parallèle à l'axe $\mathrm{O}x$, et que les rapports $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}$ sont rigoureusement nuls.

754. *Si tous les rapports* $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}$ *tendaient vers l'infini,* leurs rapports inverses $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \frac{h_3}{k_3}, \ldots, \frac{h_n}{k_n}$ tendraient vers zéro.

D'après ce que nous avons dit des fonctions inverses (595), il est évident que, dans ce cas, c'est la fonction x (y étant regardée comme variable indépendante) qui devient une con

stante, et qu'elle est représentée graphiquement par une droite parallèle à l'axe Oy. Les rapports $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \frac{h_3}{k_3}, \ldots, \frac{h_n}{k_n}$ sont alors rigoureusement nuls, et les rapports $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \frac{k_3}{h_3}, \ldots, \frac{k_n}{h_n}$ rigoureusement infinis.

755. D'après ce qu'on vient de voir (753. 754), si le lieu de l'équation $y = f(x)$, supposé réel et continu dans un certain intervalle, ne renferme aucune portion de droite parallèle à l'un des axes, le rapport $\frac{k}{h}$ aura nécessairement une limite finie différente de zéro quand h tendra vers zéro, et les deux infiniment petits h et k seront du même ordre, sauf peut-être pour certaines valeurs particulières de la variable.

Les cas exceptionnels où l'on aura $\lim \frac{k}{h} = 0$ ou $\lim \frac{k}{h} = \infty$ correspondront précisément, comme on le verra plus tard (*Géom. anal.*, t. V), les axes coordonnés étant rectangulaires ou, plus généralement, rectilignes, aux points où la tangente à la courbe qui représente $y = f(x)$ se trouve parallèle à l'un ou à l'autre axe.

756. IV. *Lorsque deux fonctions* $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ *ne diffèrent que par une constante, pour les valeurs de* x *comprises dans un intervalle donné où elles sont continues, leurs dérivées sont égales pour ces mêmes valeurs de* x.

Réciproquement, *si les dérivées* $f'(x)$, $\mathrm{F}'(x)$ *de deux fonctions* $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ *sont égales entre elles pour les valeurs de* x *comprises dans un intervalle donné où elles sont continues, ces fonctions ne peuvent différer que par une constante pour ces mêmes valeurs de* x.

Soit, en effet, d'une manière générale, $\varphi(x)$ la différence des deux fonctions considérées. De la relation

$$\varphi(x) = f(x) - \mathrm{F}(x), \tag{1}$$

qui a lieu pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle proposé, on déduit, en donnant à la variable l'accroissement h,

$$\varphi(x+h) = f(x+h) - \mathrm{F}(x+h). \tag{2}$$

Il en résulte évidemment, en retranchant l'égalité (1) de l'égalité (2) et en divisant ensuite par h les deux membres de l'égalité résultante,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

En faisant tendre maintenant h vers zéro, on a, à la limite (747),

$$\varphi'(x)=f'(x)-F'(x). \tag{3}$$

Si $\varphi(x)$ est une constante, on a $\varphi'(x)=0$ (751), et l'égalité (3) donne

$$f'(x)=F'(x).$$

Réciproquement, si l'on a $f'(x)=F'(x)$, l'égalité (3) donne

$$\varphi'(x)=0,$$

et l'on a $\varphi(x)=$ const. (753).

757. Remarque. — Nous terminerons ces généralités par une remarque qui n'est pas sans intérêt :

Si la dérivée de la fonction $y=f(x)$ est continue dans un certain intervalle comme la fonction elle-même, le signe qu'on donne à l'accroissement h de la variable à partir d'une valeur de x comprise dans l'intervalle et telle que $x+h$ et $x-h$ y soient aussi renfermées n'influe pas sur la valeur que prend $f'(x)$ pour la valeur attribuée à x.

Donnons à h une valeur positive et soit

$$\lim\frac{k}{h}=f'(x).$$

Soit, maintenant, k_1 l'accroissement pris par la fonction y quand on donne à x l'accroissement $-h$. Il faut trouver la limite de $\frac{k_1}{-h}$.

Or, si, en partant de $x-h$, on donne à la variable l'accroissement h, on retombe sur x. Comme on retombe alors aussi sur y, il faut que la valeur de la fonction qui correspond à $x-h$ croisse en même temps de $-k_1$. On a donc, à la fois,

$$\lim\frac{k}{h}=f'(x) \qquad \text{et} \qquad \lim\frac{-k_1}{h}=\lim\frac{k_1}{-h}=f'(x-h).$$

Mais, par hypothèse, la fonction dérivée restant continue dans l'intervalle considéré, $f'(x-h)$ et $f'(x)$ diffèrent d'une quantité infiniment petite, si h est infiniment petit. Par suite (743), $f'(x)$ peut être regardée aussi bien comme la limite de $\frac{k_1}{-h}$ que comme celle de $\frac{k}{h}$.

Définition de la différentielle.

758. L'accroissement, positif ou négatif, d'une variable quelconque, indépendante ou non, est appelée la *différence* de cette variable; et on le désigne, en général, par la caractéristique Δ suivie de la lettre qui figure la variable.

Ainsi, les accroissements ou les *différences* des variables $x, y, z, \ldots$ seront représentées par

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots.$$

Nous avons dit précédemment (747) que les fonctions $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, ... ont, pour notations de leurs dérivées,

$$f'(x), \quad F'(x), \quad \varphi'(x), \quad \ldots,$$

ou, encore,

$$Df(x), \quad DF(x), \quad D\varphi(x), \quad \ldots,$$

ou, d'une manière générale, y étant la fonction de x dont il s'agit,

$$Dy.$$

Cela posé, d'après la notation des différences et la définition des dérivées (747), on peut écrire, pour toute fonction $y = f(x)$, et Δx tendant vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = Df(x) = Dy.$$

Par conséquent, avant d'arriver à la limite qui conduit à la dérivée, c'est-à-dire avant de supposer Δx infiniment petit ou aussi proche de zéro qu'on voudra, on aura, en désignant par α une certaine quantité, fonction de x et de Δx, tendant vers zéro en même temps que Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \tag{1}$$

et

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x. \qquad (2)$$

C'est là une relation très importante et très utile.

759. Admettons à présent qu'on fasse tendre Δx vers zéro.

La relation (2) (758) montre que l'accroissement infiniment petit d'une fonction continue quelconque peut être regardé comme composé de deux parties

$$f'(x)\,\Delta x \quad \text{et} \quad \alpha\,\Delta x.$$

Comme $f'(x)$ est supposée avoir une valeur finie différente de zéro et bien déterminée, si l'on prend Δx comme infiniment principal, la première partie est un infiniment petit du premier ordre et la deuxième partie est un infiniment petit d'ordre supérieur (521, 2°).

Or, d'après le principe fondamental de la méthode infinitésimale (743), les limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits ne sont pas modifiées lorsqu'on remplace ces infiniment petits par d'autres qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes. Il en résulte que, toutes les fois que Δy entrera dans un calcul comme terme d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits dont on cherche la limite, on aura le droit de le remplacer par

$$f'(x)\,\Delta x,$$

c'est-à-dire de lui substituer le produit de la dérivée de la fonction y par l'accroissement infiniment petit de la variable indépendante.

760. On donne le nom de *différentielles* à ces quantités plus simples que l'on peut substituer aux différences infiniment petites des fonctions.

Elles sont évidemment plus simples, puisqu'on néglige dans ces différences, sans aucun inconvénient relativement à la recherche que l'on poursuit, le terme $\alpha\,\Delta x$, en général extrêmement compliqué. Et ce sont, en réalité, les plus simples possibles, puisqu'elles sont le produit du facteur Δx qu'on ne peut évidemment supprimer par une fonction où ce facteur n'entre pas.

Les *différentielles,* quantités infiniment petites substituées

aux *différences infiniment petites* des fonctions dans les cas indiqués, sont désignées par la caractéristique d, substituée elle-même à la caractéristique Δ.

On a ainsi

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{3}$$

ou

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x). \tag{4}$$

Par conséquent, *le rapport de la différentielle dy à l'accroissement Δx de la variable est égal à la dérivée de la fonction $y = f(x)$* ou à la limite du rapport de la différence Δy de la fonction à ce même accroissement Δx.

C'est ainsi que la recherche des différentielles et des dérivées ne forme qu'une seule et même question.

761. Supposons que la fonction y soit la variable x elle-même, c'est-à-dire qu'on ait

$$y = x$$

ou la plus simple de toutes les fonctions. On aura alors constamment

$$\Delta y = \Delta x, \quad f'(x) = 1, \quad dy = \Delta x \text{ (760)}.$$

La différentielle de y ou celle de x est donc, dans ce cas, identique à Δx, et l'on a alors

$$dx = \Delta x.$$

[Si l'on avait

$$y = -x,$$

on aurait constamment

$$\Delta y = -\Delta x, \quad f'(x) = -1, \quad dy = -\Delta x,$$

et la différentielle de y serait identique à $-\Delta x$].

Comme il est naturel d'employer une seule caractéristique quand cela est possible, nous conviendrons, toutes les fois que nous aurons à prendre la différentielle d'une fonction de x, de représenter par dx l'accroissement arbitraire (mais infiniment petit) de x. Mais, lorsqu'il s'agira des accroisse-

ments exacts ou des différences des fonctions désignées par la caractéristique Δ, nous représenterons par Δx l'accroissement de x, qui pourra être alors fini ou infiniment petit.

762. D'après cette convention, on aura

$$dy = f'(x)\,dx \qquad (3\ bis)$$

et

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \qquad (4\ bis)$$

Et l'on voit que l'expression $\frac{dy}{dx}$ peut être considérée indifféremment, soit comme le quotient de dy par dx, soit comme un symbole représentant (758) la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Sous ce dernier point de vue, la formule (3 *bis*) peut encore s'écrire

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx. \qquad (5)$$

La dérivée $f'(x)$ étant, d'après la formule (3 *bis*), le quotient de la différentielle de la fonction par la différentielle de la variable, on lui a souvent donné le nom de *rapport* ou de *coefficient différentiel* de la fonction.

D'après cette même formule, la différentielle de la fonction étant le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable, qui ne peut pas être nulle, *les théorèmes généraux relatifs aux dérivées, qu'on a démontrés aux n^os* 751, 753, 756, *s'étendent immédiatement aux différentielles.*

763. La différentielle est susceptible, comme la dérivée (748), d'une représentation géométrique.

Reprenons la figure 5 (p. 40), et soit la courbe AMB qui représente la fonction $y = f(x)$ rapportée aux deux axes Ox et Oy. On a (748)

$$\text{tang IMN} = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

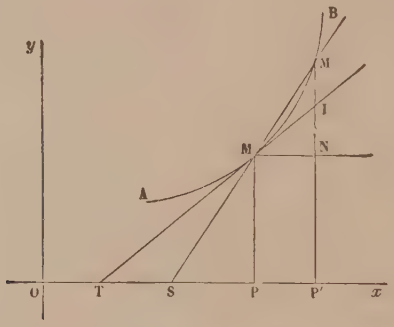
On a aussi

$$\text{IN} = \text{MN tang IMN} = f'(x)\,\Delta x = dy \quad (547).$$

Nous voyons par là que la *différence* de la fonction, $\Delta y = k$, étant représentée par M′N, sa *différentielle* dy est représentée par IN.

Ainsi, remplacer la différence par la différentielle revient, lorsqu'on cherche quel est l'accroissement de l'ordonnée pour un accroissement infiniment petit de l'abscisse en partant du point M, à substituer, dans une étendue infiniment petite, à la courbe elle-même, sa tangente (727).

Fig. 5.



764. L'avantage que peut présenter l'emploi des différentielles sur celui des dérivées, c'est que, dans la formule (3 *bis*) (762), dy et dx figurent absolument de la même manière.

y étant une fonction de x, l'une des différentielles dy et dx est arbitraire, et leur rapport est égal à celui des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément les deux variables.

Or, d'après ce que nous avons dit des fonctions inverses (595), rien n'oblige de prendre pour variable indépendante l'une des deux variables plutôt que l'autre, quand il s'agit des différentielles, tandis que l'emploi des dérivées exige nécessairement qu'on ait fait un choix, la dérivée n'ayant un sens déterminé que lorsqu'on sait par rapport à quelle variable on la prend.

Si l'on part de la relation

$$dy = f'(x)\,dx$$

et si c'est x qui est la variable dépendante, si c'est x qui est

regardée comme une fonction de y, on en déduit immédiatement

$$dx = \frac{1}{f'(x)}\,dy.$$

C'est dy qui reçoit alors une valeur arbitraire infiniment petite, et dx s'ensuit.

On comprendra tout à fait l'importance de cette remarque, lorsque nous parlerons plus loin des dérivées et des différentielles des fonctions inverses.

765. Nous terminerons ces notions fondamentales en observant qu'on peut avoir à considérer, dans une même question, une variable indépendante x et plusieurs fonctions y, z, u, v, ... de cette variable.

Représentons par Δy, Δz, Δu, Δv, ..., les accroissements pris par ces fonctions ou leurs *différences* pour un même accroissement ou une même différence Δx ou dx de x. Leurs *différentielles* dy, dz, du, dv, ..., seront toutes dans des rapports constants avec dx et, par conséquent, *les unes avec les autres,* quand dx tendra vers zéro (762). Ces rapports constants sont d'ailleurs les limites des rapports des différences correspondantes, qui ne diffèrent alors des différentielles que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes (760).

On a, par exemple,

$$\frac{du}{dy} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta y} = \mathrm{D}_y u \quad (747), \tag{1}$$

et $\dfrac{du}{dy}$ est la dérivée de u *par rapport à* y, quelle que soit d'ailleurs la variable commune à laquelle on ait rapporté les différentielles du et dy.

Si l'on a $u = f(x)$ et $y = \mathrm{F}(x)$, on a aussi (762)

$$du = f'(x)\,dx, \qquad dy = \mathrm{F}'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire (1)

$$\mathrm{D}_y u = \frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}. \tag{2}$$

On peut donc énoncer cette proposition :

La dérivée d'une variable u par rapport à une autre va-

riable y est égale au rapport des dérivées de u et de y prises relativement à une même variable quelconque x, dont elles sont regardées comme dépendantes.

766. Nous engageons le lecteur à bien s'assimiler avant tout les généralités qui précèdent. Ce n'est qu'à cette condition qu'il pourra étudier avec fruit les Chapitres qui suivent.

Nous allons, dans ces Chapitres, passer à la recherche pratique des dérivées et des différentielles, que les détails dans lesquels nous venons d'entrer nous permettront de ne plus séparer.

CHAPITRE IV.

CLASSEMENT DES FONCTIONS.

767. Trouver la différentielle d'une fonction, c'est exécuter l'opération désignée sous le nom de *différentiation*.

Il y a une infinité de fonctions; mais il en existe un nombre très limité auxquelles on donne le nom de *fonctions simples*, et c'est à ces fonctions que toutes les autres se trouvent ramenées au point de vue de leur différentiation.

768. *Les fonctions simples* correspondent aux opérations *connues jusqu'à présent.*

Elles sont au nombre de *dix*, du moins lorsqu'on représente chacune d'elles par son type le plus simple ou par un seul type, et elles se partagent en fonctions algébriques et en fonctions transcendantes.

Les fonctions algébriques simples correspondent aux six opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances et extraction des racines.

Les fonctions transcendantes simples, dont l'emploi exige la construction de Tables calculées d'avance, sont les fonctions exponentielle et logarithmique, et les fonctions étudiées en Trigonométrie, c'est-à-dire les fonctions trigonométriques proprement dites ou circulaires directes et les fonctions circulaires inverses.

769. Les dix fonctions simples se partagent naturellement en cinq groupes, chaque groupe contenant une opération directe et l'opération inverse.

770. D'après cela, nous présenterons comme il suit le Tableau des dix fonctions simples, en désignant par x la va-

riable indépendante, par y la fonction, par a et par m des constantes.

TABLEAU DES DIX FONCTIONS SIMPLES.

Fonctions algébriques.

1er groupe.	Somme	$y = a + x$
	Différence	$y = a - x$
2e groupe.	Produit	$y = ax$
	Quotient	$y = \frac{a}{x}$
3e groupe.	Puissance	$y = x^m$
	Racine	$y = \sqrt[m]{x}$
	(m, nombre entier et positif.)	

Fonctions transcendantes.

4e groupe.	Fonction exponentielle	$y = a^x$, $y = e^x$
	Fonction logarithmique	$y = \log_a x$, $y = \mathrm{L}x$
	(a, nombre positif.)	
5e groupe.	Fonction circulaire directe.	$y = \sin x$
	Fonction circulaire inverse.	$y = \arc\sin x$ (*Trigon.*, 44.)

771. Pour les fonctions trigonométriques, directes ou inverses, nous n'avons indiqué qu'un seul type; et il est clair qu'on pourrait regarder aussi, comme fonctions simples de cette espèce,

$$y = \cos x, \quad y = \arc\cos x, \quad y = \operatorname{tang} x, \quad y = \arc\operatorname{tang} x, \quad \ldots.$$

Mais, en considérant le cercle de rayon 1 et en supposant l'arc moindre que $\frac{\pi}{2}$, la connaissance d'un seul rapport trigonométrique de cet arc entraîne celle de tous les autres (*Trigon.*, 9). On peut, par suite, en partant du sinus, par exemple, ne voir dans les autres rapports que des fonctions dépendantes. Ainsi, l'on a

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

.....

772. Dans chaque fonction simple, sauf dans les deux premières, on peut remplacer la seule lettre x par une fonction simple. On obtient ainsi ce qu'on appelle une *fonction de fonction*. La même transformation peut être répétée plusieurs fois, de manière à conduire à des *fonctions de fonctions*. On *superpose* ainsi évidemment les opérations qui correspondent aux fonctions simples.

Prenons la fonction produit $y = ax$ et remplaçons x par $\mathrm{L}x$, nous aurons la *fonction de fonction* $y = a\mathrm{L}x$. Remplaçons de nouveau x par $\sin x$, nous aurons la *fonction de fonctions* $y = a\mathrm{L}\sin x$. Dans le premier exemple, deux opérations se trouvent superposées; il y en a trois dans le deuxième exemple.

773. D'une manière générale, toute fonction qui dépend de *plusieurs fonctions* de x est une *fonction composée*.

C'est le cas ordinaire des *fonctions explicites* (598), où les opérations à effectuer sur la variable pour calculer la fonction sont directement indiquées.

774. On peut trouver facilement, bien qu'un peu longuement, les dérivées des dix fonctions simples et, par suite, leurs différentielles, en suivant une marche parfaitement uniforme, que nous indiquerons ici immédiatement.

Soit la fonction

$$y = f(x). \tag{1}$$

Il suffit de donner à x un certain accroissement Δx. Il en résulte pour y un accroissement Δy, et l'équation (1) devient

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

On a alors, en retranchant (1) de (2),

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Si l'on fait tendre maintenant Δx indéfiniment vers zéro dans le second membre de la relation (3), ce second membre tend lui-même indéfiniment vers la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour Δx in-

finiment petit, c'est-à-dire vers la dérivée $f'(x)$ que l'on cherche.

Une fois qu'on connaît l'expression de la dérivée $f'(x)$, on a la différentielle dy par la relation fondamentale (762)

$$dy = f'(x)\,dx.$$

775. Dès que l'on connaît les dérivées et les différentielles des dix fonctions simples, on peut passer à celles des fonctions de fonctions et des fonctions composées qui en dépendent nécessairement, en établissant certains théorèmes généraux.

Mais il est plus simple et beaucoup plus rapide de suivre la marche inverse.

Nous commencerons donc par démontrer les principes à l'aide desquels on peut ramener la détermination des dérivées et des différentielles de toutes les fonctions à celle des dérivées et des différentielles des dix fonctions simples; et nous nous occuperons ensuite des fonctions simples elles-mêmes. La question se trouvera d'ailleurs résolue pour quelques-unes d'entre elles, par suite de nos premières recherches.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DES FONCTIONS INVERSES. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.

Théorème des fonctions inverses.

776. Soit la fonction

$$y = f(x). \tag{1}$$

Admettons qu'en la résolvant par rapport à x, on en déduise

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Les fonctions indiquées par les signes f et φ sont, comme nous l'avons déjà dit (595), des fonctions *inverses l'une de l'autre.*

Comme les équations (1) et (2) sont la même équation sous deux formes différentes, elles donneront toutes deux les mêmes accroissements *correspondants* pour les variables x et y. En d'autres termes, si l'accroissement Δx conduit dans la première équation à l'accroissement Δy, l'accroissement Δy conduira nécessairement dans la seconde équation à l'accroissement Δx.

Cela posé, on aura (747)

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

On arrive donc à cette proposition importante (551), connue sous le nom de *théorème des fonctions inverses.*

Quand deux fonctions sont inverses au point de vue algébrique, leurs dérivées sont inverses au point de vue arithmétique.

Supposons qu'on sache trouver la dérivée de la fonction $\varphi(y)$ et qu'on ne connaisse pas encore la dérivée de la fonction $f(x)$. Il suffira, pour obtenir $f'(x)$, de prendre l'inverse $\frac{1}{\varphi'(y)}$ de $\varphi'(y)$ et d'y remplacer y par $f(x)$.

Différentiation des fonctions de fonctions.

777. Considérons une fonction de fonctions de x (772) définie par les équations

$$y = F(u), \qquad u = f(v), \qquad v = \varphi(x).$$

On voit que y dépend de u, qui dépend de v, qui dépend de x. Finalement, y dépend donc de x et est une fonction de fonctions de x. En éliminant v et u, on pourrait obtenir cette fonction sous la forme

$$y = F\{f[\varphi(x)]\};$$

mais il est facile d'éviter cette substitution.

Supposons, en effet, qu'on donne à x un accroissement Δx. Il en résultera pour v, u et y, les accroissements correspondants Δv, Δu et Δy. On aura alors, identiquement,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{1}$$

Si l'on fait tendre maintenant Δx indéfiniment vers zéro et si le nombre des fonctions superposées dans l'expression de y est fini, la limite du premier membre de l'identité (1) sera égale au produit des limites des facteurs du second membre (484), et il viendra, par définition (747),

$$D_x y = F'(u)\,f'(v)\,\varphi'(x). \tag{2}$$

On peut donc énoncer cette règle fondamentale :

La dérivée d'une fonction de fonctions est égale au produit des dérivées des fonctions successives, chacune de ces dérivées étant prise par rapport à la variable dont la fonction considérée dépend immédiatement.

778. Si l'on veut passer à la différentielle de y, on a (762)

$$D_x y = \frac{dy}{dx}.$$

En substituant dans la relation (2) du n° 564 et en multipliant par dx, il vient

$$(1) \qquad dy = F'(u) f'(v) \varphi'(x) dx.$$

Telle est l'expression du *principe de la différentiation des fonctions de fonctions*. Comme on a (766, 762)

$$F'(u) = \frac{dy}{du}, \qquad f'(v) = \frac{du}{dv}, \qquad \varphi'(x) dx = dv,$$

on peut encore écrire

$$dy = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dv}\right) dv$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad dy = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv} dv.$$

Il faut remarquer avec soin que dy et dv sont les *différentielles* de y et de v prises par rapport à x, tandis que $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dv}$ sont des symboles représentant les *dérivées* de y par rapport à u et de u par rapport à v. Dans $\frac{dy}{du}$, u représente la variable indépendante; dans $\frac{du}{dv}$, u représente la fonction.

Expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables.

779. Nous avons déjà indiqué ce qu'on devait entendre par les *dérivées partielles* d'une fonction de plusieurs variables, quand cette fonction était entière (472). Nous allons généraliser cette notion fondamentale, en y ajoutant celle des *différentielles partielles* et en considérant une fonction composée quelconque.

Nous prendrons d'abord une fonction y dépendant de deux variables u et v, et nous allons voir que l'accroissement infi-

niment petit d'une pareille fonction peut s'exprimer comme celui d'une fonction d'une seule variable, à l'aide d'une expression simple qui n'en diffère aussi que d'une portion infiniment petite de sa propre valeur.

Soit donc la fonction

$$y = f(u, v).$$

Nous allons donner à u et à v des accroissements *infiniment petits* Δu, Δv, qui seront ou non indépendants l'un de l'autre, suivant que les variables u et v seront ou non elles-mêmes indépendantes l'une de l'autre; y prendra alors un accroissement correspondant Δy, et l'on aura

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

c'est-à-dire, par soustraction,

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

En ajoutant et en retranchant dans le second membre la même quantité $f(u + \Delta u, v)$, on peut évidemment mettre cette valeur de Δy sous la forme suivante (628) :

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta y = f(u + \Delta u, v) - f(u, v) \\ \quad + f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v). \end{cases}$$

Cela posé, désignons pour un instant par $f'_u(u, v)$ la *dérivée partielle* de $f(u, v)$ ou de y *par rapport à* u, c'est-à-dire la dérivée de la fonction prise en regardant u comme une variable indépendante et v comme une constante.

L'accroissement de la fonction, quand on donne à u seulement l'accroissement Δu, étant

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v),$$

nous pourrons alors écrire (545)

$$(2) \qquad f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [f'_u(u, v) + \alpha]\,\Delta u,$$

α étant une quantité qui tend vers zéro et qui s'annule en même temps que Δu.

De même, désignons par $f'_v(u + \Delta u, v)$ la *dérivée partielle* de la fonction $f(u + \Delta u, v)$ *par rapport à* v, c'est-à-dire la dérivée de cette fonction prise en regardant v à son tour comme une variable indépendante et $u + \Delta u$ comme une constante.

L'accroissement de la fonction $f(u+\Delta u, v)$, quand on donne à v seulement l'accroissement Δv, étant

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v),$$

nous pourrons écrire encore (758)

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v) = [f'_v(u+\Delta u, v) + \beta]\,\Delta v,$$

β étant une quantité qui tend vers zéro et qui s'annule en même temps que Δv.

Il est clair d'ailleurs que, si $f'_v(u, v)$ est la *dérivée partielle* de $f(u, v)$ ou de y par rapport à v, elle ne peut différer de $f'_v(u+\Delta u, v)$ que d'une quantité infiniment petite γ qui s'annulera avec Δu. En posant $\beta+\gamma=\alpha'$, l'expression précédente deviendra donc

$$(3)\quad f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v) = [f'_v(u, v) + \alpha']\,\Delta v.$$

En ajoutant membre à membre les équations (1), (2), (3) et en simplifiant, il reste évidemment

$$\Delta y = [f'_u(u, v) + \alpha]\,\Delta u + [f'_v(u, v) + \alpha']\,\Delta v.$$

$\alpha\,\Delta u$ est infiniment petit par rapport à la première partie de la valeur de Δy, et il en est de même de $\alpha'\,\Delta v$ par rapport à la seconde partie de cette valeur (722, 733). Par suite, en désignant par ω une quantité infiniment petite par rapport à Δy, on peut poser

$$\omega = \alpha\,\Delta u + \alpha'\,\Delta v$$

et écrire

$$(4)\qquad \Delta y = f'_u(u, v)\,\Delta u + f'_v(u, v)\,\Delta v + \omega.$$

C'est l'expression que nous voulions obtenir.

On représente ordinairement les deux *dérivées partielles* $f'_u(u, v)$ et $f'_v(u, v)$ par les notations

$$\frac{df(u, v)}{du},\quad \frac{df(u, v)}{dv},\quad \text{ou}\quad \frac{dy}{du},\quad \frac{dy}{dv}.$$

Seulement, il faut bien remarquer que, dans les expressions $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, les deux dy sont différents, puisqu'ils représentent respectivement les différentielles de y relatives à la variation d'une seule des variables u, v, ou les *différentielles partielles* de y par rapport à u et par rapport à v.

Pour éviter toute ambiguïté, on écrit souvent les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}.$$

On ne le fera pas, en comptant sur l'attention du lecteur bien prévenu.

Avec cette notation des dérivées partielles, on a

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \omega. \tag{5}$$

D'après ce qui précède, l'infiniment petit d'ordre supérieur ω se compose d'une première partie $\alpha\,\Delta u$ qui, divisée par Δu, devient encore nulle pour $\Delta u = 0$, et d'une seconde partie $\alpha'\Delta v$ ou $(\beta+\gamma)\Delta v$ qui, après avoir été divisée par Δv, contient des termes s'annulant, les uns pour $\Delta u = 0$, les autres pour $\Delta v = 0$.

On aurait des résultats analogues, comme il est facile de s'en assurer, pour un nombre quelconque de variables, dépendantes ou non les unes des autres ou d'autres variables.

Ces résultats vont nous conduire immédiatement à la différentiation des fonctions composées.

Différentiation des fonctions composées.

780. Soit la fonction

$$y = f(u, v, w, \ldots)$$

et

$$u = \mathrm{F}(x), \qquad v = \varphi(x), \qquad w = \psi(x), \qquad \ldots.$$

y sera alors une *fonction composée* de x.

Nous aurons, d'après ce qu'on vient de démontrer (779), en supposant toujours des accroissements infiniment petits,

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \frac{dy}{dw}\Delta w + \ldots + \omega,$$

ω étant infiniment petit relativement à Δy.

En divisant par Δx les deux membres de cette relation, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{dy}{dv}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{dy}{dw}\frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots + \frac{\omega}{\Delta x}.$$

En passant alors aux limites (747), ce qui est permis si le nombre des variables u, v, w, ..., est limité (483), on trouve évidemment (485), puisque (779) $\frac{\omega}{\Delta x}$ devient nul,

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \dots.$$

Il ne faut pas oublier (779) que, dans cette expression, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$, ..., sont les *dérivées partielles* de la fonction y par rapport aux différentes variables u, v, w, ..., tandis que $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, ..., sont les *dérivées* des variables ou des fonctions u, v, w, ..., par rapport à x.

Quant au premier membre de l'expression (1), c'est, si l'on veut, la *dérivée complète* de la fonction y, dans laquelle on fait varier toutes les quantités dépendantes de x.

On peut observer à ce sujet que, s'il arrivait qu'on eût, par exemple, $u = x$, $\frac{dy}{du}$ deviendrait, dans le second membre de l'expression (1), $\frac{dy}{dx}$ et serait la dérivée partielle de la fonction par rapport à x seulement, le premier membre représentant toujours sa dérivée complète.

En résumé :

La dérivée de la fonction composée y est la somme de toutes ses dérivées partielles par rapport aux variables dont elle dépend, chaque dérivée partielle étant multipliée par la dérivée de la variable correspondante par rapport à x.

En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par dx, on a (762)

$$(2) \qquad dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \dots.$$

Si l'on regardait u comme seule variable, on aurait (762), pour la différentielle dy,

$$dy = \frac{dy}{du}du.$$

On peut donc dire, dans le cas de plusieurs variables, que $\frac{dy}{du}du$ est la *différentielle partielle* de la fonction y relativement à u.

D'après l'expression (2), le *principe de la différentiation des fonctions composées* s'énoncera alors comme il suit :

La différentielle d'une fonction composée est égale à la somme de ses différentielles partielles par rapport à chacune des variables qui y entrent explicitement.

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIATION D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT, D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE. — THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

Différentiation d'une somme.

781. Soit la fonction composée

$$y = u + v - t, \tag{1}$$

où u, v, t, sont des fonctions de x dont les différentielles sont supposées connues et dont le nombre peut être quelconque, pourvu qu'il soit fini.

Si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour les autres variables les accroissements simultanés

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta t, \quad \Delta y,$$

et l'on a

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - t - \Delta t. \tag{2}$$

Si l'on retranche la relation (1) de la relation (2), il vient

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta t$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

En passant aux limites, ce qui est permis si le nombre des termes, soit positifs, soit négatifs, du second membre est limité, on trouve (762)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dt}{dx}$$

et, en multipliant de part et d'autre par dx,

$$dy = du + dv - dt.$$

La dérivée ou la différentielle d'une somme algébrique de fonctions de x est donc *égale à la somme algébrique des dérivées ou des différentielles de ces fonctions.*

Si l'une des fonctions considérées se réduit à une constante, sa dérivée est nulle ainsi que sa différentielle (762). Ainsi, dans la dérivation ou la différentiation de la *fonction somme* entendue dans un sens général, *toute constante disparaît.*

782. Soient les deux premières *fonctions simples* (770)

$$y = a + x, \qquad y = a - x.$$

a étant une constante, nous aurons, pour la *fonction simple somme,*

$$\frac{dy}{dx} = 1, \qquad dy = dx$$

et, pour la *fonction simple différence,*

$$\frac{dy}{dx} = -1, \qquad dy = -dx.$$

Dans le cas de cette dernière, la dérivée et la différentielle sont négatives parce que, lorsque la variable augmente, la fonction diminue. Les accroissements des variables sont alors de signes contraires, et leur rapport est négatif.

On aurait directement, en suivant la marche indiquée au n° 774,

$$y = a + x,$$
$$y + \Delta y = a + x + \Delta x;$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = \Delta x, \qquad \frac{dy}{dx} = 1, \qquad dy = dx.$$

On aurait, de même,

$$y = a - x,$$
$$y + \Delta y = a - x - \Delta x;$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = -\Delta x, \qquad \frac{dy}{dx} = -1; \qquad dy = -dx.$$

Différentiation d'un produit.

783. Soit d'abord la fonction composée

$$y = uv, \tag{1}$$

où u et v sont des fonctions de x.

Si l'on donne à x un accroissement Δx, u, v et y prennent les accroissements simultanés

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta y.$$

On a donc

$$\begin{cases} y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \\ \qquad = uv + v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v. \end{cases} \tag{2}$$

Si l'on retranche la relation (1) de la relation (2), il vient

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v$$

ou, en divisant de part et d'autre par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

En passant aux limites, ce qui est permis lorsque le second membre ne renferme qu'un nombre limité de termes (484), le dernier terme de ce second membre s'évanouit à cause de $\lim \Delta x = 0$, et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

ou, en multipliant les deux membres par dx,

$$dy = v\,du + u\,dv.$$

La dérivée ou la différentielle du produit de deux fonctions est donc *égale à la somme des produits obtenus en multipliant chaque fonction par la dérivée ou la différentielle de l'autre.*

784. Supposons que la fonction u devienne une *constante* c, et que l'on ait

$$y = cv.$$

Il faudra faire dans les résultats précédents (783, 762) $\frac{du}{dx} = 0$, $du = 0$, et l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{dv}{dx} \qquad \text{et} \qquad dy = c\,dv.$$

La dérivée ou la différentielle d'une fonction multipliée par une constante est donc *égale à la dérivée ou à la différentielle de cette fonction multipliée par la même constante.*

Si l'on considère spécialement la troisième *fonction simple* (770)

$$y = ax,$$

on a immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = a, \qquad dy = a\,dx.$$

On aurait directement, en suivant la marche indiquée au n° 774,

$$y = ax,$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x);$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = a\,\Delta x, \qquad \frac{dy}{dx} = a, \qquad dy = a\,dx.$$

785. Revenons au produit de deux fonctions u et v (783) et à la formule

$$dy = v\,du + u\,dv.$$

En divisant les deux membres par le produit $y = uv$, on en déduit

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Le rapport de la différentielle d'une fonction à cette fonction a reçu le nom de *différentielle logarithmique* de la fonction.

On peut donc dire encore que *la différentielle logarithmique du produit de deux fonctions est égale à la somme des différentielles logarithmiques de ces fonctions.*

Cette propriété, analogue à la propriété fondamentale des logarithmes, explique la dénomination employée.

Elle va nous permettre de trouver rapidement et élégamment la règle de différentiation du produit d'un nombre quelconque de fonctions, pourvu que ce nombre soit fini (783)

786. Soit, par exemple,

$$y = u_1 u_2 u_3 \dots u_n,$$

n étant fini et u_1, u_2, u_3, ..., u_n représentant des fonctions de x.

Nous pourrons considérer le produit donné comme un produit de deux facteurs, u_1 d'une part, et $u_2 u_3 \dots u_n$ d'autre part; puis, ce dernier produit comme un produit de deux facteurs u_2 et $u_3 \dots u_n$; et ainsi de suite. Nous aurons alors successivement (785)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2 u_3 \dots u_n)}{u_2 u_3 \dots u_n} \\
&= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d(u_3 \dots u_n)}{u_3 \dots u_n} \\
&= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \frac{d(\dots u_n)}{\dots u_n} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

La dernière égalité ainsi obtenue sera

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \dots + \frac{du_n}{u_n},$$

et elle exprime que *la différentielle logarithmique du produit d'un nombre quelconque de fonctions,* ce nombre étant fini, *est égale à la somme des différentielles logarithmiques de ces fonctions.*

En multipliant les deux membres de cette égalité par y et en les divisant par dx, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{y}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{y}{u_3}\frac{du_3}{dx} + \dots + \frac{y}{u_n}\frac{du_n}{dx}.$$

Si l'on multiplie seulement par y les deux membres de la même égalité, on trouve

$$dy = \frac{y}{u_1} du_1 + \frac{y}{u_2} du_2 + \frac{y}{u_3} du_3 + \dots + \frac{y}{u_n} du_n.$$

On peut donc dire que *la dérivée ou la différentielle du produit d'un nombre quelconque n de fonctions*, *n* étant fini, *est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée ou la différentielle de chaque fonction par le produit de toutes les autres fonctions.*

Si l'une des fonctions se réduit à une *constante*, le terme qui contient sa dérivée ou sa différentielle disparaît du second membre (751, 762); mais cette constante se retrouve dans tous les autres termes et peut être mise en facteur commun. Ainsi, dans la dérivation ou la différentiation de la *fonction produit*, entendue dans un sens général, *toute constante persiste* (781).

Différentiation d'un quotient.

787. Soit la fonction composée

$$y = \frac{u}{v},$$

où u et v sont des fonctions de x.

On en déduit

$$yv = u$$

et, en appliquant le théorème des différentielles logarithmiques (783),

$$\frac{dy}{y} + \frac{dv}{v} = \frac{du}{u}.$$

Il en résulte

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

La différentielle logarithmique du quotient de deux fonctions est donc *égale à la différentielle logarithmique du dividende moins la différentielle logarithmique du diviseur.*

Multiplions par $y = \frac{u}{v}$ les deux membres de la relation précédente. Nous aurons

$$dy = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv$$

ou

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$$

et, en divisant par dx les deux membres de cette égalité,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

La dérivée ou la différentielle d'un quotient de deux fonctions est donc *égale à la dérivée ou à la différentielle du dividende multipliée par le diviseur moins la dérivée ou la différentielle du diviseur multipliée par le dividende, le tout divisé par le carré du diviseur.*

788. Si l'on considère spécialement la *fonction simple* quotient (770)

$$y = \frac{a}{x},$$

on doit faire le dividende u égal à une constante et le diviseur v égal à x. On a ainsi (762)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}, \qquad dy = -\frac{a\,dx}{x^2}.$$

La dérivée ou la différentielle est ici négative, parce que la fonction diminue quand la variable augmente. Les deux accroissements sont ainsi de signes contraires, et leur rapport est négatif.

On aurait directement, en suivant la marche indiquée au n° 774.

$$y = \frac{a}{x},$$

$$y + \Delta y = \frac{a}{x + \Delta x};$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x}$$

$$= \frac{-a\,\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

On en déduit évidemment, en divisant par Δx et en passant aux limites,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2} \quad \text{et} \quad dy = -\frac{a\,dx}{x^2}.$$

Différentiation d'une puissance quelconque.

789. Soit la fonction composée

$$y = u^m,$$

où u est une fonction de x et m une constante.

Pour arriver à une règle complètement générale, nous devons distinguer plusieurs cas :

1° *m est entier et positif.*

y étant alors le produit de m facteurs égaux à u, sa différentielle logarithmique (786) est égale à la différentielle logarithmique de u répétée m fois. On a donc

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u},$$

et, en multipliant de part et d'autre par $y = u^m$, il vient

$$dy = mu^{m-1}\,du.$$

2° *m est fractionnaire et positif.*

Soit $m = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et positifs. Il en résulte

$$y = u^{\frac{p}{q}}.$$

En élevant à la puissance q les deux membres de cette égalité, on a

$$y^q = u^p.$$

Ces deux fonctions étant constamment égales, leurs différentielles le sont (762), et il en est de même de leurs différentielles logarithmiques (785). On peut donc poser

$$\frac{dy^q}{y^q} = \frac{du^p}{u^p},$$

c'est-à-dire, puisque p et q sont entiers et positifs (1°),

$$q\frac{dy}{y} = p\frac{du}{u}.$$

On en déduit, en divisant par q et en multipliant par $y = u^{\frac{p}{q}}$,

$$dy = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}} \frac{du}{u} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du,$$

ou encore

$$dy = mu^{m-1} du.$$

3° *m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire.*

Soit $m = -n$, n étant un nombre positif, entier ou fractionnaire. Il en résulte

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

ou

$$y u^n = 1.$$

En appliquant au produit $y u^n$ le théorème de la différentielle logarithmique (786) et en remarquant que 1 est une constante dont la différentielle est nulle (762), il vient

$$\frac{dy}{y} + \frac{du^n}{u^n} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque n est entier et positif (1°),

$$\frac{dy}{y} = -\frac{du^n}{u^n} = -n\frac{du}{u}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $y = u^{-n}$, on trouve

$$dy = -nu^{-n}\frac{du}{u} = -nu^{-n-1} du,$$

ou encore

$$dy = mu^{m-1} du.$$

Cette dernière formule est donc complètement générale et reste vraie, que l'exposant m de la puissance u^m soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En divisant par dx les deux membres de la formule, on a, également d'une manière générale,

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

La dérivée ou la différentielle de la puissance $m^{ième}$ d'une

fonction est donc *égale à m fois le produit de la puissance* $(m-1)^{ième}$ *de la fonction par sa dérivée ou sa différentielle.*

790. La différentiation des radicaux est comprise dans la règle précédente.

Soit la fonction composée

$$y = \sqrt[m]{u} = u^{\frac{1}{m}}.$$

Nous aurons (789)

$$dy = \frac{1}{m} u^{\frac{1}{m}-1} du,$$

c'est-à-dire

$$dy = \frac{1}{m} u^{\frac{1-m}{m}} du = \frac{du}{m u^{\frac{m-1}{m}}}$$

ou

$$dy = \frac{du}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

et, en divisant par dx de part et d'autre,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}.$$

La dérivée ou la différentielle de la racine $m^{ième}$ *d'une fonction est* donc *égale à sa dérivée ou à sa différentielle divisée par m fois la racine* $m^{ième}$ *de la puissance* $(m-1)^{ième}$ *de la fonction.*

Dans le cas particulier de $m = 2$, qui se présente fréquemment, on a

$$y = \sqrt{u}$$

et

$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}.$$

La dérivée ou la différentielle de la racine carrée d'une fonction est donc *égale à sa dérivée ou à sa différentielle divisée par le double du radical.*

791. D'après ce qu'on vient de voir (789, 790), si l'on con-

sidère la cinquième *fonction simple* (557)

$$y = x^m,$$

on a, pour sa différentielle et sa dérivée,

$$dy = m x^{m-1} dx, \qquad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

Si l'on considère la sixième *fonction simple* (770)

$$y = \sqrt[m]{x},$$

on a, également, pour sa différentielle et sa dérivée,

$$dy = \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

Solution des questions précédentes par le principe de la différentiation des fonctions composées.

792. On peut résoudre facilement toutes les questions précédentes, à l'aide du principe de la différentiation des fonctions composées (780).

Somme algébrique. — Soit la fonction composée

$$y = u + v - t,$$

où u, v, t, sont des fonctions de x. Nous aurons immédiatement (780)

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dt} dt.$$

Mais $\frac{dy}{du}$, dérivée partielle de la fonction par rapport à u, est égale à 1, et l'on a, de même (782), $\frac{dy}{dv} = 1$ et $\frac{dy}{dt} = -1$.

Il vient, par suite, comme précédemment (568),

$$dy = du + dv - dt.$$

Produit. — Soit la fonction composée

$$y = uvt,$$

où u, v, t, sont des fonctions de x. On a toujours (780)

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dt} dt;$$

mais, ici (784), $\frac{dy}{du} = vt$, $\frac{dy}{dv} = ut$, $\frac{dy}{dt} = uv$. Par suite, on retrouve la formule (786)

$$dy = vt\,du + ut\,dv + uv\,dt.$$

Quotient. — Soit la fonction composée

$$y = \frac{u}{v},$$

où u et v sont des fonctions de x. On a encore (780)

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv.$$

D'ailleurs, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{v}$ (784) et $\frac{dy}{dv} = -\frac{u}{v^2}$ (788) On retrouve donc aussi la formule (787)

$$dy = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Nous nous servirons encore du même principe pour démontrer un théorème important qui est d'un usage fréquent en *Géométrie analytique* (t. V).

Théorème des fonctions homogènes.

793. On dit qu'une fonction de plusieurs variables est *homogène et du degré m* lorsque, en multipliant chaque variable par une variable auxiliaire quelconque ou une *indéterminée t*, la fonction elle-même se trouve multipliée par t^m.

Soit une pareille fonction représentée par

$$f(x, y, z, \ldots).$$

D'après sa définition même, on aura

$$(1) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots).$$

On peut alors différentier ou dériver les deux membres de cette expression, en regardant t comme *seule variable*. Le second membre est, dans ce cas, le produit de la puissance t^m par une constante; le premier membre est une *fonction composée* de t, car on peut poser $tx = u$, $ty = v$, $tz = w$, ...

En appliquant, d'une part, le principe des fonctions composées sous la forme (1) (780), en remarquant qu'on a (784)

$$\frac{dtx}{dt} = x, \qquad \frac{dty}{dt} = y, \qquad \frac{dtz}{dt} = z, \quad \ldots,$$

et, d'autre part, les règles relatives à la dérivation d'un produit et d'une puissance (784, 789), il viendra, en désignant, pour simplifier, la fonction par f dans le premier membre,

$$\frac{df}{dtx}x + \frac{df}{dty}y + \frac{df}{dtz}z + \ldots = mt^{m-1}f(x, y, z, \ldots).$$

Cette relation ayant lieu, quel que soit t, on peut supposer $t = 1$, et elle devient

$$(2) \qquad \frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz}z + \ldots = mf(x, y, z, \ldots).$$

Cette égalité (2) constitue le *théorème des fonctions homogènes*. On peut donc l'énoncer comme il suit :

La somme des dérivées partielles d'une fonction homogène par rapport aux variables dont elle dépend, chaque dérivée partielle étant multipliée par la variable correspondante, est égale au produit de la fonction par son degré.

794. Désignons par $\varphi(x, y, z, \ldots)$ *la dérivée partielle* (779, 780) de la fonction homogène $f(x, y, z, \ldots)$ *par rapport à* x. Nous aurons

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = \frac{df(x, y, z, \ldots)}{dx}.$$

En considérant x comme seule variable dans le second membre, on peut donc écrire successivement, d'après ce qui précède (580),

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots) = \frac{df(tx, ty, tz, \ldots)}{dtx}$$

$$= \frac{dt^m f(x, y, z, \ldots)}{t\,dx} = t^{m-1}\frac{df(x, y, z, \ldots)}{dx}$$

$$= t^{m-1}\varphi(x, y, z, \ldots).$$

Il en résulte immédiatement (793) que *les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction homogène de degré* m *sont des fonctions homogènes de degré* $m - 1$.

Exemples et applications.

795. Nous venons d'exposer les règles de dérivation et de différentiation qui concernent les fonctions algébriques explicites, et il nous reste à considérer les fonctions transcendantes. Mais, auparavant, et pour habituer le lecteur à la pratique de ces premières règles, nous présenterons quelques exemples et applications.

1° *Soit un polynôme entier en* x (594)

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

En appliquant les règles relatives à l'addition, à la multiplication et à l'élévation aux puissances (781, 784, 789), on a immédiatement pour sa différentielle

$$dy = [m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}] dx.$$

2° *Soit une fonction rationnelle de* x (594)

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5}.$$

On remarque que les deux termes de cette expression s'annulent pour $x = 1$, ce qui prouve qu'ils sont tous deux divisibles par $x - 1$ (229) ou qu'ils admettent ce facteur commun. Si on le supprime, il vient

$$y = \frac{x-3}{x-5}.$$

En appliquant la règle relative à un quotient (789), on a

$$dy = \frac{dx(x-5) - dx(x-3)}{(x-5)^2} = \frac{2}{(x-5)^2} dx.$$

3° *Soit la fonction composée*

$$y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x} + \frac{g}{\sqrt{x}}.$$

En appliquant les règles relatives à l'addition, à la multiplication, à la division et à l'extraction des racines, il vient

$$dy = \left[\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2} - \frac{g}{2x\sqrt{x}} \right] dx.$$

On peut aussi transformer l'expression à l'aide des exposants fractionnaires et négatifs et écrire

$$y = a + b x^{\frac{1}{2}} - c x^{-1} + g x^{-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte, d'après la règle relative aux puissances (789)

$$dy = \frac{1}{2} bx^{-\frac{1}{2}}\,dx + cx^{-2}\,dx - \frac{1}{2} gx^{-\frac{3}{2}}\,dx,$$

ou, comme précédemment,

$$dy = \left[\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2} - \frac{g}{2x\sqrt{x}}\right] dx.$$

4° *Soit la fonction composée*

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

ou

$$y = \sqrt{u}, \qquad \text{en posant} \qquad u = ax^2 + bx + c.$$

En appliquant la règle relative à l'extraction des racines (790), ainsi que les autres règles nécessaires, on a

$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}} \qquad \text{ou} \qquad dy = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx.$$

On trouvera de même, pour la fonction composée,

$$y = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + g}$$

ou

$$y = \sqrt[3]{u}, \qquad \text{en posant} \qquad u = ax^3 + bx^2 + cx + g,$$

$$dy = \frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}} \qquad \text{ou} \qquad dy = \frac{3ax^2 + 2bx + c}{3\sqrt[3]{(ax^3 + bx^2 + cx + g)^2}}\,dx.$$

5° *Soit la fonction composée*

$$y = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En appliquant la règle relative à la différentiation d'un quotient (787), nous aurons (777)

$$dy = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2} x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx)}{a^2 - x^2},$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$dy = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2 - x^2}\,dx$$

En multipliant les deux termes de la fraction du second membre par $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve finalement

$$dy = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

6° *Soit la fonction composée*

$$y = (ax^m + b)^p$$

ou

$$y = u^p, \qquad \text{en posant} \qquad ax^m + b = u.$$

Nous aurons (789)

$$dy = pu^{p-1}\,du \qquad \text{ou} \qquad dy = p(ax^m + b)^{p-1}\,d(ax^m + b),$$

c'est-à-dire

$$dy = p(ax^m + b)^{p-1}\,max^{m-1}\,dx$$

ou

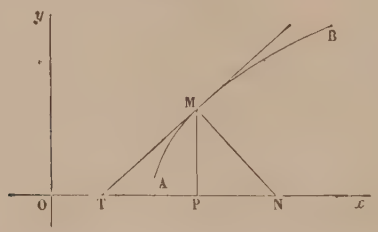
$$dy = pmax^{m-1}(ax^m + b)^{p-1}\,dx.$$

796. 7° *Chercher quelles sont les courbes où la sous-normale est, en tous les points, une quantité constante p.*

Nous avons vu (*Géom.*, 754) ce qu'on appelait *sous-normale* et *sous-tangente* d'une courbe.

Soit (*fig.* 6) la courbe quelconque AB, rapportée à des axes rectan-

Fig. 6.



gulaires Ox, Oy. Menons, en un point quelconque M, l'ordonnée MP, la tangente MT et la normale MN.

La projection PN sur l'axe Ox de la portion de normale comprise entre le point de contact M et le pied N de la normale sur l'axe, s'appelle la *sous-normale* au point M; de même, TP est la *sous-tangente* au même point.

Soient x et y les coordonnées du point quelconque M. Il s'agit de trouver l'équation $y = f(x)$ de la courbe AB, c'est-à-dire la relation qui lie les coordonnées variables x et y d'après la condition imposée.

La figure donne

$$\text{PN} = \text{MP}\,\text{tang}\,\text{PMN} = \text{MP}\,\text{tang}\,\text{MT}x.$$

Mais $\text{tang}\,\text{MT}x$ représente précisément (748) la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de la fonction $y = f(x)$. MP est l'ordonnée y et PN est la quantité constante

donnée p. On a donc

$$p = y\frac{dy}{dx}$$

ou, en renversant l'ordre et en multipliant de part et d'autre par $2\,dx$,

$$2y\,dy = 2p\,dx.$$

Il est évident que le premier membre de cette égalité représente la différentielle de y^2 et, le second membre, la différentielle de $2px$. Les différentielles de ces deux fonctions de x étant constamment égales, ces fonctions elles-mêmes ne peuvent différer que par une constante arbitraire C (756. 762), et l'on a

$$y^2 = 2px + C.$$

Telle est l'équation cherchée. Elle représente, à cause de la constante arbitraire, *toutes les paraboles* qui ont p pour *paramètre* (*Géom.*, 738, 755, 756) et pour axe l'axe des x.

En effet, si une parabole, de paramètre p, est rapportée à son axe et à la tangente au sommet (*Géom.*, 754, 756), son équation est

$$y^2 = 2px.$$

Si, maintenant, sans changer l'axe des x, on déplace l'axe des y parallèlement à lui-même en le transportant, vers la gauche par exemple, à une distance quelconque k de sa position primitive, il faut évidemment changer x en $x - k$, et l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 = 2p(x - k) = 2px - 2pk,$$

c'est-à-dire, en posant $C = -2pk$,

$$y^2 = 2px + C.$$

797. 8° *Chercher les courbes où la longueur* MN *de la normale* (*fig.* 6) ***est, en tous les points, égale à une constante a.***

En se reportant à la figure, on doit avoir ici

$$\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PN}^2. \qquad (1)$$

Mais nous venons de trouver, dans la question précédente,

$$PN = y\frac{dy}{dx}.$$

Nous aurons donc, en substituant dans la relation (1),

$$a^2 = y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \qquad (2)$$

Cette équation est satisfaite pour

$$y = \pm a,$$

puisque cette condition entraîne (748)

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Une première solution du problème est donc donnée par les deux droites menées de part et d'autre de l'axe des x, parallèlement à cet axe, à la distance a.

Laissant de côté cette solution, on déduit de l'équation (2)

$$y\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - y^2}$$

ou

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{2y\,dy}{2\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Le premier membre de cette égalité représente la différentielle de x, tandis que le second membre représente évidemment (790) la différentielle de $-\sqrt{a^2 - y^2}$. Ces deux quantités ne peuvent donc différer que par une constante arbitraire c, et l'on a

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + c,$$

c'est-à-dire

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

Telle est l'équation cherchée. Elle représente *tous les cercles* de rayon a, ayant leurs centres sur l'axe des x.

En effet, quand le centre du cercle de rayon a est à l'origine des coordonnées, son équation est (*Géom.*, 754)

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Si l'on déplace, maintenant, l'axe des y, comme dans le cas précédent, vers la gauche par exemple, en le transportant à la distance c, il faut changer précisément x en $x - c$, et l'on a, pour l'équation du cercle,

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

Remarquons que *les deux droites de la première solution* sont les tangentes indéfinies, parallèles à l'axe des x, qui ENVELOPPENT *tous les cercles de la seconde solution*. Cette seconde solution renferme d'ailleurs évidemment la première.

CHAPITRE VII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS LOGARITHMIQUE ET EXPONENTIELLE.

Différentiation de la fonction logarithmique.

798. Soit la fonction logarithmique simple (770)

$$y = \log x.$$

Les logarithmes sont rapportés à une base positive quelconque a.

En suivant la marche indiquée au n° 774, si l'on donne à x, à partir d'une valeur déterminée quelconque, un accroissement Δx, y prend un accroissement Δy, et l'on a

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x).$$

On en déduit, par soustraction,

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, il en est de même de la fraction $\frac{\Delta x}{x}$. Le numérateur du second membre de l'égalité (1) tend donc vers $\log 1$ ou vers zéro (653). Par suite, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Pour lever cette indétermination, qui n'est qu'apparente,

nous poserons

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta x = \alpha x,$$

et α tendra vers zéro en même temps que Δx.

En substituant dans le second membre de l'égalité (1), il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)}{x} = \frac{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}.$$

Pour passer à la limite, il faut faire tendre α indéfiniment vers zéro; mais alors (558) la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est le nombre e, base du système des logarithmes népériens (661). Comme la limite du logarithme d'un nombre est évidemment égale au logarithme de la limite de ce nombre, on a finalement

$$\mathrm{D}\log x = \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$$

et

$$d\log x = dy = \frac{\log e}{x}dx,$$

quel que soit le système de logarithmes considéré.

On voit que *la dérivée de* $\log x$ *est égale à l'inverse de la variable, multiplié par le module relatif* $\mathrm{M} = \log e$, *à l'aide duquel s'effectue le passage des logarithmes népériens aux logarithmes employés* (657).

799. Dans le cas où $a = 10$, c'est-à-dire où l'on emploie les logarithmes vulgaires, on a (663)

$$\mathrm{M} = \log e = \frac{1}{\mathrm{L}.10} = 0,4342944819\ldots.$$

D'une manière générale, et L désignant les logarithmes népériens (662), on a (657)

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{L}a}.$$

On peut donc encore écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{L}a} \qquad \text{et} \qquad dy = \frac{dx}{x\,\mathrm{L}a}.$$

Si l'on suppose $a = e$, il vient

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}e = 1,$$

et l'on a

$$\mathrm{DL}x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad d\mathrm{L}x = dy = \frac{dx}{x}.$$

Ainsi, quand on fait usage du système népérien, *la dérivée de* $\mathrm{L}x$ *est* simplement *égale à l'inverse de la variable.*

On donne à *la différentielle* $\frac{dx}{x}$ le nom de *différentielle logarithmique de* x (785).

800. Lorsque la variable x est remplacée par une fonction de x, on n'a qu'à appliquer le principe de la différentiation des fonctions de fonctions (778).

Soient

$$y = \log u \qquad \text{et} \qquad u = \varphi(x).$$

Nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{u}\frac{du}{dx}, \qquad dy = \frac{\log e}{u}du.$$

Si l'on a, par exemple, $u = x^m$, il vient (789)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x^m} m x^{m-1} = \frac{m \log e}{x}, \qquad dy = \frac{m \log e}{x} dx.$$

801. La règle de différentiation de la fonction logarithmique peut être très souvent appliquée à la recherche des différentielles d'autres fonctions.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = u^m,$$

où u est une fonction de x, et que nous avons déjà considérée (789).

En supposant m *quelconque* et en prenant les logarithmes des deux membres dans le système népérien (662), il vient

$$ly = mlu;$$

d'où, en prenant les différentielles des deux membres de cette nouvelle égalité (799, 784),

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}.$$

Il en résulte, en multipliant de part et d'autre par $y = u^m$,

$$dy = d(u^m) = mu^{m-1}\,du,$$

comme précédemment, mais bien plus rapidement (789).

Soit encore le produit

$$y = uvt,$$

où u, v, t, sont des fonctions de x.

Supposons qu'il puisse y avoir des facteurs négatifs. Pour tourner cette difficulté, puisque les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels (648), élevons les deux membres de l'égalité au carré et prenons leurs logarithmes népériens. Nous aurons (650)

$$ly^2 = lu^2 + lv^2 + lt^2.$$

En différentiant les deux membres de cette nouvelle égalité, il vient (799, 789)

$$\frac{dy^2}{y^2} = \frac{du^2}{u^2} + \frac{dv^2}{v^2} + \frac{dt^2}{t^2}$$

ou

$$\frac{2y\,dy}{y^2} = \frac{2u\,du}{u^2} + \frac{2v\,dv}{v^2} + \frac{2t\,dt}{t^2},$$

c'est-à-dire, en divisant par 2 et en simplifiant,

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dt}{t},$$

comme précédemment (786).

Différentiation de la fonction exponentielle.

802. Soit la fonction exponentielle simple (770)

$$y = a^x,$$

où a est un nombre quelconque positif.

Nous déterminerons d'abord directement sa différentielle en suivant la marche indiquée au n° 774.

Donnons à x, à partir d'une valeur déterminée quelconque, un accroissement Δx. Il en résultera pour y un accroissement Δy, et l'on aura

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x},$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

et, en divisant par Δx,

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, que a soit plus grand ou plus petit que 1, la limite de $a^{\Delta x}$ est 1 (639). Par suite, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Pour faire disparaître cette indétermination, qui n'est qu'apparente, posons

$$a^{\Delta x} - 1 = \alpha,$$

α tendant vers zéro en même temps que Δx.

De cette relation on déduit d'ailleurs

$$a^{\Delta x} = 1 + \alpha$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres dans un système quelconque,

$$\Delta x \log a = \log(1 + \alpha),$$

d'où

$$\Delta x = \frac{\log(1 + \alpha)}{\log a}.$$

En remplaçant, dans l'égalité (1), $a^{\Delta x} - 1$ et Δx par les valeurs que nous venons d'indiquer, nous trouverons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{\alpha}{\frac{\log(1+\alpha)}{\log a}} = a^x \frac{\log a}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)} = a^x \frac{\log a}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

α et Δx tendant simultanément vers zéro et la limite de $\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour $\alpha = 0$ étant e, nous aurons finalement

$$\mathrm{D}a^x = \frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}, \qquad da^x = dy = a^x \frac{\log a}{\log e} dx.$$

Remarquons que ces expressions subsistent, *quel que soit le système de logarithmes adopté;* car le rapport des logarithmes de deux nombres quelconques demeure constant quand on passe d'un système à un autre (659).

On voit que *la dérivée de la fonction exponentielle est égale à la fonction elle-même, multipliée par le rapport des logarithmes du nombre a et de la base népérienne.*

803. Si l'on emploie le système vulgaire, on a

$$\log a = 1 \qquad \text{et} \qquad M_1 = \frac{1}{\log e} = L.10 = 2,3025850929\ldots,$$

M_1 étant le module relatif qui permet de revenir des logarithmes vulgaires aux logarithmes népériens (663).

Si l'on emploie le système népérien, on a $le = 1$ et, par suite,

$$Da^x = \frac{dy}{dx} = a^x la, \qquad da^x = dy = a^x la\, dx.$$

804. Si a devient égal à e, la fonction exponentielle devient

$$y = e^x,$$

et l'on a

$$De^x = \frac{dy}{dx} = e^x, \qquad de^x = dy = e^x dx.$$

Il en résulte ce fait remarquable : *la fonction e^x est égale à sa dérivée,* de sorte qu'elle se reproduit indéfiniment par dérivations successives.

805. Lorsque la variable x est remplacée par une fonction de x, on n'a qu'à appliquer le principe de la différentiation des fonctions de fonctions.

Soient

$$y = a^u \qquad \text{et} \qquad u = \varphi(x).$$

Nous aurons, en prenant les logarithmes népériens,

$$Da^u = \frac{dy}{dx} = a^u la \frac{du}{dx}, \qquad da^u = dy = a^u la\, du.$$

806. Cherchons maintenant la différentielle de la fonction exponentielle, en la ramenant à celle de la fonction logarithmique. Le résultat sera presque immédiat.

Soit la fonction

$$y = a^x.$$

Prenons les logarithmes des deux membres, dans le sys-

tème népérien pour plus de simplicité. Nous aurons

$$ly = la^x = x\,la.$$

En différentiant les deux membres, il vient

$$\frac{dy}{y} = la\,dx,$$

d'où, en multipliant de part et d'autre par $y = a^x$,

$$dy = a^x\,la\,dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = a^x\,la,$$

comme précédemment (803).

807. Supposons, inversement, qu'on veuille déduire la différentielle de la fonction logarithmique de celle de la fonction exponentielle.

Soit la fonction

$$y = \log x,$$

les logarithmes étant pris dans le système dont la base est a. On en déduit la fonction inverse (664)

$$x = a^y,$$

dont la dérivée est (802)

$$\frac{dx}{dy} = a^y \frac{\log a}{\log e}.$$

Les logarithmes étant rapportés à la base a et a^y étant x, il vient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{\log e},$$

c'est-à-dire (776), pour la fonction logarithmique,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\log e}{x} \quad \text{et} \quad dy = \frac{\log e}{x}\,dx,$$

comme précédemment (798).

Différentiation de u^v.

808. Soit la fonction composée

$$y = u^v,$$

où u et v sont des fonctions de x. Nous nous servirons encore de la règle de différentiation des fonctions logarithmiques, en l'associant à celle d'un produit.

En prenant les logarithmes népériens des deux membres, l'égalité posée devient

$$ly = v\,lu.$$

La différentielle du premier membre est alors une différentielle logarithmique et celle du second membre, la différentielle d'un produit. On a donc (799, 783)

$$\frac{dy}{y} = dv\,lu + v\frac{du}{u}$$

ou, en multipliant de part et d'autre par $y = u^v$,

$$dy = u^v\left(dv\,lu + v\frac{du}{u}\right).$$

Il en résulte

$$\frac{dy}{dx} = u^v\left(\frac{dv}{dx}lu + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right).$$

Si l'on suppose $u = v = x$, la fonction devient

$$y = x^x,$$

et l'on a, en renversant l'ordre dans la parenthèse,

$$dy = x^x(1 + lx)\,dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + lx).$$

Si l'on veut employer les logarithmes vulgaires, on n'aura qu'à remplacer lu ou lx par $\frac{\log u}{\log e}$ ou par $\frac{\log x}{\log e}$ (663).

EXEMPLES.

809. 1° *Différentier la fonction*

$$y = a^{-x}.$$

Posons $-x = u$, d'où $du = -dx$. Il viendra (800)

$$y = a^{-x} = a^u,$$

c'est-à-dire

$$dy = a^u\,la\,du = -a^{-x}\,la\,dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -a^{-x}\,la.$$

Si l'on a $a = e$ ou si la fonction est

$$y = e^{-x},$$

on trouve donc

$$dy = -e^{-x}dx \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -e^{-x}.$$

La fonction e^{-x} et sa dérivée sont donc *égales et de signes contraires.*

2° *Différentier la fonction*

$$y = a^{mx}.$$

En posant $mx = u$, d'où $du = m\,dx$, on a

$$dy = a^u l a\,du = ma^{mx} l a\,dx \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = ma^{mx} la.$$

Si la fonction donnée était

$$y = a^{-mx},$$

on aurait de même

$$dy = -ma^{-mx} l a\,dx \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -ma^{-mx} la.$$

3° *Différentier la fonction*

$$y = \mathrm{A}e^{mx} + \mathrm{B}e^{-mx}.$$

D'après ce qui précède, on a immédiatement

$$dy = m\mathrm{A}e^{mx}dx - m\mathrm{B}e^{-mx}dx = m(\mathrm{A}e^{mx} - \mathrm{B}e^{-mx})dx$$

et

$$\frac{dy}{dx} = m(\mathrm{A}e^{mx} - \mathrm{B}e^{-mx}).$$

4° *Différentier la fonction*

$$y = e^{e^{e^x}}.$$

Nous appliquerons ici le théorème des fonctions de fonctions, en posant

$$u = e^{e^x} \qquad \text{et} \qquad v = e^x.$$

Nous aurons alors

$$y = e^u, \qquad u = e^v, \qquad v = e^x.$$

Il en résulte (778)

$$dy = e^u e^v e^x dx = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$$

et

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x.$$

5° *Différentier la fonction*

$$y = l(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Nous aurons, en posant $x+\sqrt{x^2-1}=u$,

$$dy=\frac{du}{u} \quad \text{et} \quad du=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)dx,$$

c'est-à-dire

$$dy=\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)\,dx}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

et

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

6° *Différentier la fonction*

$$y=\log\frac{a+bx}{a-bx}.$$

Dans cet exemple, la fonction logarithmique est superposée à la fonction quotient. Nous aurons donc immédiatement, d'après le théorème des fonctions de fonctions et sans passer par aucune variable intermédiaire, ce qui est inutile dès qu'on a pris un peu d'habitude et qu'on s'est exercé à séparer mentalement les fonctions,

$$dy=\frac{\log e}{\frac{a+bx}{a-bx}}\,\frac{b(a-bx)+b(a+bx)}{(a-bx)^2}\,dx,$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$dy=\frac{2ab\log e}{a^2-b^2x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2ab\log e}{a^2-b^2x^2}.$$

7° *Différentier la fonction*

$$y=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Dans cet exemple, la fonction logarithmique est superposée à la fonction racine. Nous aurons donc encore immédiatement (790)

$$dy=\frac{\log e}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\,dx,$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$dy=\frac{-\log e}{1-x^2}\,dx=\frac{\log e}{x^2-1}\,dx$$

et

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{x^2-1}.$$

On peut opérer autrement, en mettant y sous la forme

$$y = \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x)$$

On a alors

$$dy = \frac{1}{2}\frac{\log e}{1-x}d(1-x) - \frac{1}{2}\frac{\log e}{1+x}d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{2}\log e\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx,$$

c'est-à-dire, comme précédemment,

$$dy = \frac{-\log e}{1-x^2}dx = \frac{\log e}{x^2-1}dx.$$

8° *Soit à différentier la fonction*

$$y = \log\log x = \log_2 x.$$

Nous aurons toujours, d'après le même principe (778),

$$dy = \frac{\log e}{\log x}\frac{\log e}{x}dx = \frac{(\log e)^2}{x\log x}dx$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\log e)^2}{x\log x}.$$

Si l'on donnait à différentier la fonction

$$y = \log\log\log x = \log_3 x,$$

on aurait de même

$$dy = \frac{\log e}{\log\log x}\frac{(\log e)^2}{x\log x}dx = \frac{(\log e)^3}{x\log x\log_2 x}dx$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\log e)^3}{x\log x\log_2 x}.$$

La loi est évidente. Si la fonction donnée est

$$y = \log\log\log\ldots\log x = \log_n x,$$

on peut écrire immédiatement

$$dy = \frac{(\log e)^n}{x\log x\log_2 x\log_3 x\ldots\log_{n-1}x}dx.$$

9° *Soit à différentier la fonction*

$$y = l[(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots].$$

On a évidemment (630, 632)

$$y = ml(x-a) + nl(x-b) + pl(x-c) + \ldots.$$

Par suite,

$$dy = m\frac{d(x-a)}{x-a} + n\frac{d(x-b)}{x-b} + p\frac{d(x-c)}{x-c} + \dots$$

$$= \left[\frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \dots\right] dx$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \dots.$$

Si l'on pose

$$f(x) = (x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\dots,$$

on a (786)

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & m(x-a)^{m-1}(x-b)^n(x-c)^p\dots \\ & + n(x-b)^{n-1}(x-a)^m(x-c)^p\dots \\ & + p(x-c)^{p-1}(x-a)^m(x-b)^n\dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \dots,$$

c'est-à-dire, d'après le résultat précédent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dlf(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Différentiation des fonctions circulaires directes.

810. Les fonctions circulaires directes sont (*Trigon.*, 7) $\sin x$ et $\cos x$, $\operatorname{tang} x$ et $\cot x$, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$, en désignant par x la longueur de l'arc correspondant aux rapports trigonométriques considérés. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que le rayon de l'arc a été pris pour unité, c'est-à-dire nous considérerons le *cercle trigonométrique* (*Trigon.*, 10).

Nous allons chercher les différentielles de ces fonctions, en les associant deux à deux (*Trigon.*, 8).

PREMIER GROUPE : SINUS ET COSINUS.

811. Soit la fonction

$$y = \sin x.$$

Si l'on donne à x un accroissement Δx, y prendra l'accroissement Δy, et l'on aura

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}. \tag{1}$$

Lorsque Δx tend vers zéro, il en est de même du numérateur

du second membre de l'égalité précédente. La limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente donc sous la forme $\frac{0}{0}$.

Pour lever cette indétermination apparente, remarquons que, d'une manière générale (*Trigon.*, 81), on a

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

En posant

$$p = x + \Delta x, \qquad q = x,$$

on a ici

$$\frac{p+q}{2} = x + \frac{\Delta x}{2}, \qquad \frac{p-q}{2} = \frac{\Delta x}{2}.$$

On peut donc remplacer, dans l'égalité (1),

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x \quad \text{par} \quad 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Il en résulte, en divisant par 2 les deux termes de la fraction du second membre et en séparant les facteurs,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

En passant à la limite et en se rappelant que la limite du rapport du sinus à l'arc quand l'arc tend vers zéro est l'unité (*Trigon.*, 104), on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad dy = \cos x\, dx.$$

Ainsi, *la dérivée du sinus d'un arc est égale au cosinus du même arc.*

On voit par là que le sinus augmente quand l'arc croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, qu'il diminue quand l'arc croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, etc. (*Trigon.*, 16).

812. Nous indiquerons encore le procédé suivant pour trouver la dérivée de $\sin x$.

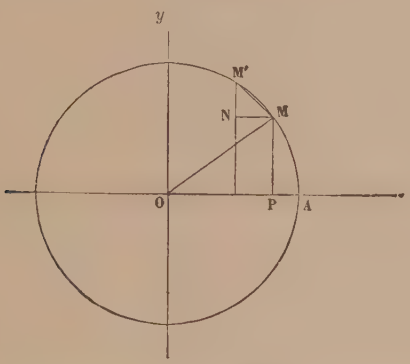
Soient A l'origine des arcs dans le cercle trigonométrique OA et AM l'arc x (*fig.* 7). Donnons à cet arc l'accroissement $MM' = \Delta x$.

En menant par le point M la parallèle MN à OA, l'accroissement correspondant Δy de la fonction

$$y = \sin x = \text{MP}$$

sera évidemment représenté par M'N.

Fig. 7.



Les deux triangles rectangles OPM, MNM', étant semblables, on a

$$\frac{\text{M'N}}{\text{MM'}} = \frac{\text{OP}}{\text{OM}}.$$

D'ailleurs, plus Δx tendra vers zéro, plus la corde MM' tendra à se confondre avec Δx (*Géom.*, 226). En passant à la limite (530), on aura donc, comme précédemment, puisque le rayon OM = 1,

$$\frac{dy}{dx} = \text{OP} = \cos x, \qquad dy = \cos x\, dx.$$

813. Une marche analogue (811, 812) conduirait à la dérivée de $\cos x$. Mais il est plus simple de se servir, comme il suit, du résultat qu'on vient d'obtenir.

On a (*Trigon.*, 8)

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Il en résulte immédiatement, en appliquant la règle des fonctions de fonctions,

$$dy = d\cos x = d\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

c'est-à-dire

$$dy = -\sin x\, dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

La dérivée du cosinus d'un arc est donc ***égale*** *à son sinus changé de signe.*

On voit par là que le cosinus diminue quand l'arc croît de o à π, qu'il augmente quand l'arc croît de π à 2π, etc. (*Trigon.*, 21).

DEUXIÈME GROUPE : TANGENTE ET COTANGENTE.

814. Nous chercherons d'abord directement la différentielle de la fonction

$$y = \operatorname{tang} x.$$

En donnant à x l'accroissement Δx, on fait prendre à y l'accroissement Δy, et l'on a

$$y + \Delta y = \operatorname{tang}(x + \Delta x);$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = \operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x$$

et, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x}{\Delta x}. \tag{1}$$

Quand Δx tend vers zéro, le numérateur du second membre de l'égalité (1) tend aussi vers zéro. La limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente donc sous la forme $\frac{0}{0}$.

Pour lever cette indétermination apparente, remarquons que, d'une manière générale (*Trigon.*, 55),

$$\operatorname{tang}(a - b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

Si l'on pose

$$a = x + \Delta x, \qquad b = x,$$

il en résulte

$$\operatorname{tang} \Delta x = \frac{\operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang}(x + \Delta x) \operatorname{tang} x},$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x = [1 + \operatorname{tang}(x + \Delta x) \operatorname{tang} x] \operatorname{tang} \Delta x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [1 + \operatorname{tang}(x + \Delta x)\operatorname{tang} x]\frac{\operatorname{tang}\Delta x}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, le rapport $\frac{\operatorname{tang}\Delta x}{\Delta x}$ tend vers l'unité (*Trigon.*, 104), et l'on a, par conséquent, en passant à la limite (*Trigon.*, 36)

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

et

$$dy = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de la tangente d'un arc est donc *égale au carré de cette tangente augmenté de* 1 *ou à l'inverse du carré du cosinus de cet arc.*

On voit par là que la tangente croît constamment avec l'arc, sauf les points où la fonction est discontinue (*Trigon.*, 28).

815. On peut, plus simplement, recourir à la règle de différentiation d'un quotient; car on a (*Trigon.*, 34)

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Il en résulte (574)

$$dy = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x}$$

ou, comme précédemment,

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

816. On peut aussi employer les considérations géométriques (812). Soit A l'origine des arcs dans le cercle trigonométrique OA, et AM l'arc x (*fig.* 8). Donnons à cet arc l'accroissement $MM' = \Delta x$ et menons la droite OM'T'. L'accroissement correspondant Δy de la fonction

$$y = \operatorname{tang} x = AT$$

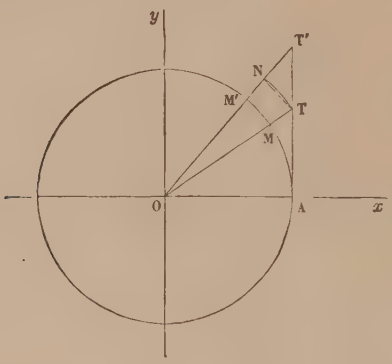
sera évidemment représenté par TT'. En décrivant l'arc TN concen-

trique à l'arc MM', on a (*Géom.*, 231, *Trigon.*, 141)

$$(1) \qquad \frac{TN}{MM'} = \frac{OT}{OA} = \frac{1}{\cos x}.$$

D'autre part, quand on fait tendre Δx vers zéro, il en est de même de l'arc TN qui tend à se confondre avec sa corde, et le triangle TNT' s'approche de plus en plus de devenir rectangle en N et semblable au

Fig. 8.



triangle OAT. On a donc, à la limite, $TN = TT' \cos x$ et, par suite, d'après la relation (1),

$$\frac{dy \cos x}{dx} = \frac{1}{\cos x}$$

ou, comme précédemment,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

817. On peut suivre une marche analogue (814, 815, 816) pour trouver la dérivée de la cotangente. Mais il est plus simple d'opérer comme nous l'avons fait pour le cosinus.

On a (*Trigon.*, 8)

$$y = \cot x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Il en résulte

$$dy = d\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] d\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

c'est-à-dire (*Trigon.*, 36, 34)

$$dy = -(1 + \cot^2 x)\, dx = -\operatorname{coséc}^2 x\, dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La dérivée de la cotangente d'un arc est donc *égale à moins le carré de cette cotangente augmenté de* 1 *ou à moins l'inverse du carré du sinus de cet arc.*

On voit par là que la cotangente décroît constamment à mesure que l'arc augmente, sauf les points où la fonction est discontinue (*Trigon.*, 31).

TROISIÈME GROUPE : SÉCANTE ET COSÉCANTE.

818. Pour différentier la fonction sécante, il suffit de poser (*Trigon.*, 34)

$$y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}.$$

On n'a plus alors qu'à appliquer le théorème des fonctions de fonctions, en remarquant que les fonctions superposées sont ici la fonction quotient et la fonction cosinus. Il vient donc

$$dy = \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\sin x\, dx) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

ou encore

$$dy = \text{séc}\, x \,\text{tang}\, x\, dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \text{séc}\, x \,\text{tang}\, x.$$

La dérivée de la sécante d'un arc est égale au produit de cette sécante par la tangente du même arc.

On voit que la sécante croît quand l'arc croît de 0 à π, qu'elle décroît quand l'arc croît de π à 2π, etc. (*Trigon.*, 31), sauf les points où la fonction est discontinue.

819. Pour avoir la dérivée de sécx, on peut aussi avoir recours aux considérations géométriques.

Reportons-nous (816) à la *fig.* 8. Si l'on a AM $= x$ et MM$' = \Delta x$, on aura, pour la fonction

$$y = \text{séc}\, x = \text{OT},$$

l'accroissement correspondant $\Delta y = \text{NT}'$. D'ailleurs, la relation (603)

$$\frac{\text{TN}}{\text{MM}'} = \frac{\text{OT}}{\text{OA}} = \frac{1}{\cos x}$$

existe toujours. De plus, à la limite, le triangle TNT', semblable au triangle OAT, donne (*Trigon.*, 142)

$$NT' = TN \operatorname{tang} x \quad \text{ou} \quad \frac{NT'}{MM'} = \frac{TN}{MM'} \operatorname{tang} x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos x} = \operatorname{séc} x \operatorname{tang} x,$$

comme précédemment.

820. Pour différentier la fonction cosécante, nous poserons de même

$$y = \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Il en résulte

$$dy = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x \, dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

ou encore

$$dy = -\operatorname{coséc} x \cot x \, dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{coséc} x \cot x.$$

La dérivée de la cosécante d'un arc est égale à moins le produit de cette cosécante par la cotangente du même arc.

On voit que la cosécante décroît quand l'arc croît de o à $\frac{\pi}{2}$, qu'elle croît quand l'arc augmente de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, etc. (*Trigon.*, 31), sauf les points où la fonction est discontinue.

Différentiation des fonctions circulaires inverses.

821. Les fonctions circulaires inverses sont (*Trigon.*, 44) $\operatorname{arc\,sin} x$ et $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$ et $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,séc} x$ et $\operatorname{arc\,coséc} x$. Nous allons chercher les différentielles de ces fonctions, en les considérant deux à deux.

Remarquons auparavant que les expressions précédentes ne sont pas entièrement déterminées, parce que, à un même rapport trigonométrique, répondent une infinité d'arcs (*Trigon.*, 41, 42, 43). Il y aura donc lieu d'insister sur ce point.

Nous ferons ici usage du théorème des fonctions inverses (776) combiné avec les résultats que nous venons d'obtenir successivement.

PREMIER GROUPE : ARC SINUS ET ARC COSINUS.

822. Soit la fonction

$$y = \arcsin x.$$

Il en résulte

$$x = \sin y.$$

Par suite (811),

$$dx = \cos y\, dy \qquad \text{et} \qquad dy = \frac{dx}{\cos y},$$

c'est-à-dire (*Trigon.*, 34)

$$dy = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour justifier *le double signe,* il faut remarquer que, si l'on désigne par y_0 l'un des arcs qui ont $x = \text{MP}$ pour sinus (*fig.* 9), tous les autres sont compris dans les formules (*Trigon.*, 41)

$$2k\pi + y_0 \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - y_0,$$

ces arcs se divisant en deux séries, les uns terminés en M, les autres terminés en M_1.

Suivant que l'arc y, considéré spécialement, appartiendra à la première ou à la seconde série, sa différentielle, égale à dy_0 ou à $-dy_0$ puisque les constantes disparaissent dans la différentiation, sera donc positive ou négative. Le double signe répond ainsi à la généralité de la question.

Mais, dans la pratique, si l'arc y est désigné d'avance, il n'y a plus d'ambiguïté; car le radical $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{1-\sin^2 y}$, remplaçant $\cos y$, doit recevoir le signe de ce cosinus qui est positif pour les arcs terminés en M et négatif pour les arcs terminés en M_1.

823. On peut trouver la dérivée de arc sin par des considérations géométriques.

Soient (*fig.* 9) $\text{MP} = x$ et $\text{arc AM} = y$.

Si l'on donne à y l'accroissement $\text{MM}' = \Delta y$, il en résultera pour x l'accroissement $\text{M}'\text{N} = \Delta x$; et si Δy tend vers zéro, l'arc MM′ tendra de plus en plus vers sa corde MM′.

On a d'ailleurs, d'après les triangles semblables MNM', OPM,

$$\frac{MM'}{M'N} = \frac{OM}{OP},$$

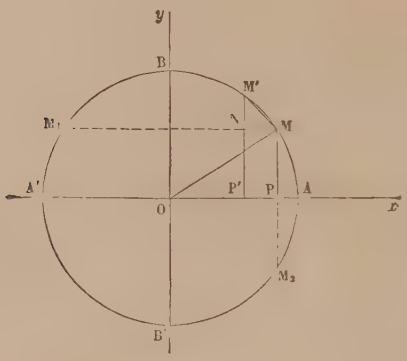
c'est-à-dire, en passant à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

comme précédemment.

Si l'on mène MM_1 parallèle à Ox, tous les arcs terminés en M et en M_1

Fig. 9.



ont x pour sinus. Pour un accroissement dx, les arcs terminés en M augmentent et ont une dérivée ou une différentielle positive en même temps qu'un cosinus positif, tandis que les arcs terminés en M_1 diminuent et ont une dérivée ou une différentielle négative en même temps qu'un cosinus négatif.

824. Soit la fonction

$$y = \operatorname{arc\,cos} x.$$

Il en résulte

$$x = \cos y.$$

Par suite (813),

$$dx = -\sin y\, dy \quad \text{et} \quad dy = -\frac{dx}{\sin y},$$

c'est-à-dire

$$dy = -\frac{dx}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}} = \mp\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le double signe est justifié par les mêmes considérations

que précédemment (822). Si l'on désigne par y_0 l'un des arcs qui ont $x = \text{OP}$ pour cosinus (*fig.* 9), tous les autres sont compris dans les formules (*Trigon.*, 42)

$$2k\pi + y_0 \quad \text{et} \quad 2k\pi - y_0,$$

ces arcs se partageant en deux séries, les uns terminés en M, les autres terminés en M_2.

Suivant que l'arc y, considéré spécialement, appartiendra à la première ou à la seconde série, sa différentielle sera donc positive ou négative. Le double signe répond ainsi à la généralité de la question.

Mais, dans l'application, si l'arc y est indiqué, il n'y a plus d'ambiguïté; car le radical $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{1-\cos^2 y}$, remplaçant $\sin y$, doit recevoir le signe de ce sinus qui est positif pour les arcs terminés en M et négatif pour les arcs terminés en M_2. Dans ce cas, la dérivée et la différentielle de $\text{arc cos}\, x$ ont un signe contraire à celui de $\sin y$.

825. On peut aussi trouver la dérivée de arc cos par des considérations géométriques (823). Nous ne nous y arrêterons pas.

Nous remarquerons seulement que, pour une même valeur de x, les dérivées des deux fonctions $\text{arc sin}\, x$ et $\text{arc cos}\, x$ sont, d'une manière générale, égales et de signes contraires *ou* égales et de même signe. Il est facile d'expliquer ce fait.

Soit y l'un des arcs dont le sinus est x. Les deux arcs $\frac{\pi}{2} - y$ et $y - \frac{\pi}{2}$ auront alors tous deux x pour cosinus (*Trigon.*, 8, 19). Des deux relations

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\, x = \text{arc cos}\, x,$$

$$\text{arc sin}\, x - \frac{\pi}{2} = \text{arc cos}\, x,$$

on déduit

$$\text{arc sin}\, x \pm \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

La somme ou la différence de $\text{arc sin}\, x$ et de $\text{arc cos}\, x$ est donc égale à une constante. Dans le premier cas, leurs dérivées sont égales et de signes contraires, puisque la dérivée

d'une constante est nulle; dans le second cas, leurs dérivées sont égales et de même signe.

DEUXIÈME GROUPE : ARC TANGENTE ET ARC COTANGENTE.

826. Soit la fonction

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

Il en résulte

$$x = \text{tang}\, y.$$

Par suite (814),

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = (1 + \text{tang}^2 y)\, dy,$$

d'où

$$dy = \cos^2 y\, dx = \frac{dx}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{dx}{1 + x^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On voit que la dérivée ou la différentielle de la fonction arc tang ne présente pas de double signe, bien qu'il existe aussi une infinité d'arcs répondant à une tangente donnée. Mais, si l'on désigne par y_0 l'un des arcs qui ont x pour tangente, tous les autres sont renfermés dans la formule unique (*Trigon.*, 43)

$$k\pi + y_0,$$

de sorte que tous ces arcs ont pour unique différentielle dy_0.

827. On peut aussi trouver la dérivée de arc tang par des considérations géométriques.

Soient (*fig.* 10) AT $= x$ et arc AM $= y$. Si l'on donne à y l'accroissement MM' $= \Delta y$, il en résulte pour x l'accroissement TT' $= \Delta x$; et, si Δy tend vers zéro, l'arc TN, concentrique à l'arc MM', tend de plus en plus vers sa corde TN.

On a d'ailleurs, d'après les arcs semblables MM', TN, et d'après les triangles TNT', OAT, qui deviennent semblables à la limite,

$$\frac{MM'}{TN} = \frac{OA}{OT} = \cos y \quad \text{et} \quad \frac{TN}{TT'} = \frac{OA}{OT} = \cos y,$$

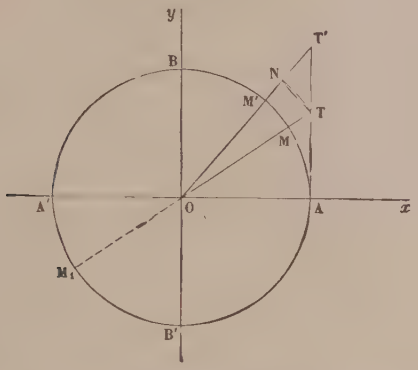
d'où, en multipliant ces deux égalités et à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

comme précédemment.

Si l'on mène le diamètre MM_1, tous les arcs terminés en M et en M_1 ont x pour tangente. Si l'on donne à x l'accroissement dx, les deux

Fig. 10.



séries d'arcs augmentent à la fois et ont, par conséquent, une même différentielle ou une même dérivée positive.

828. Soit la fonction

$$y = \operatorname{arc\,cot} x.$$

Il en résulte

$$x = \cot y.$$

Par suite (817),

$$dx = -\frac{dy}{\sin^2 y} = -(1 + \cot^2 y)\, dy,$$

d'où

$$dy = -\sin^2 y\, dx = -\frac{dx}{1 + \cot^2 y} = -\frac{dx}{1 + x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Tous les arcs répondant à une cotangente donnée ont la même différentielle pour la raison indiquée à propos de la tangente (826). Mais, tandis que la tangente croît avec l'arc, la cotangente décroît quand l'arc augmente. La différentielle ou la dérivée de arc cot doit donc bien avoir une valeur négative.

829. On peut aussi trouver la dérivée de arc cot par des considérations géométriques. Nous laissons au lecteur le soin de s'en assurer.

Nous remarquerons seulement que, pour une même valeur

de x, les dérivées des deux fonctions arc tang$x$ et arc cot$x$ sont, d'une manière générale, égales et de signes contraires.

En effet, soit y l'un des arcs dont la tangente est x; l'arc $\frac{\pi}{2} - y$ aura alors x pour cotangente (*Trigon.*, 8). De la relation

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x = \text{arc cot}\, x,$$

on déduit

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc cot}\, x = \frac{\pi}{2};$$

et, la somme de arc tang$x$ et de arc cot$x$ étant égale à une constante, leurs dérivées sont nécessairement égales et de signes contraires.

TROISIÈME GROUPE : ARC SÉCANTE ET ARC COSÉCANTE.

830. Soit la fonction

$$y = \text{arc séc}\, x$$

Il en résulte

$$x = \text{séc}\, y.$$

Par suite (818),

$$dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y}\, dy = \text{séc}\, y \,\text{tang}\, y\, dy,$$

d'où (*Trigon.*, 36)

$$dy = \frac{\cos^2 y}{\sin y}\, dx = \frac{dx}{\text{séc}\, y \,\text{tang}\, y} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Nous avons encore ici un double signe, en raison du radical $\sqrt{x^2-1}$. Et, en effet, si l'on désigne par y_0 l'un des arcs qui ont x pour sécante, tous les autres sont compris dans les formules (*Trigon.*, 42)

$$2k\pi + y_0 \quad \text{et} \quad 2k\pi - y_0.$$

Mais, dans l'application, si l'arc y est indiqué, il n'y a plus d'ambiguïté, car le radical $\sqrt{x^2-1}$ ou $\sqrt{\text{séc}^2 y - 1}$, remplaçant tang$y$, doit recevoir le signe de cette tangente.

831. On peut aussi trouver la dérivée de arc séc par des considérations géométriques.

Reportons-nous à la *fig.* 10. Si AM représente l'arc y et OT, par conséquent, séc y ou x, on a $MM' = \Delta y$ et $NT' = \Delta x$. On peut alors poser, d'après les explications précédentes (614),

$$\frac{MM'}{TN} = \frac{OA}{OT} = \cos y \qquad \text{et} \qquad \frac{TN}{NT'} = \frac{OA}{AT} = \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

En multipliant ces deux relations membre à membre et en passant à la limite, on a, comme précédemment,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{\text{séc}\, y \tan y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

832. Soit, enfin, la fonction

$$y = \text{arc cosséc}\, x.$$

Il en résulte

$$x = \text{cosséc}\, y.$$

Par suite (820),

$$dx = -\frac{\cos y}{\sin^2 y}\, dy = -\,\text{cosséc}\, y \cot y\, dy,$$

d'où (*Trigon.*, 36)

$$dy = -\frac{\sin^2 y}{\cos y}\, dx = -\frac{dx}{\text{cosséc}\, y \cot y} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Nous avons un double signe dans ces formules, en raison du radical $\sqrt{x^2-1}$. En effet, si l'on représente par y_0 l'un des arcs qui ont x pour cosécante, tous les autres sont compris dans les formules (*Trigon.*, 41)

$$2k\pi + y_0 \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - y_0.$$

Mais, dans l'application, si l'arc y est indiqué, il n'y a plus d'ambiguïté ; car le radical $\sqrt{x^2-1}$ ou $\sqrt{\text{coséc}^2 y - 1}$, remplaçant $\cot y$, doit recevoir le signe de cette cotangente. Dans ce cas, la dérivée et la différentielle de arc cosécx ont un signe contraire à celui de $\cot y$.

833. On peut aussi trouver la dérivée de arc cosséc par des considérations géométriques. Le lecteur s'en assurera facilement, d'après ce qui précède.

Nous remarquerons seulement que, pour une même valeur de x, et en tenant compte du double signe du radical $\sqrt{x^2-1}$, les dérivées des deux fonctions arc séc x et arc coséc x sont, d'une manière générale, égales et de signes contraires *ou* égales et de même signe.

En effet, soit y l'un des arcs dont la sécante est x. Les deux arcs $\frac{\pi}{2} - y$ et $y - \frac{\pi}{2}$ auront alors tous deux x pour cosécante (*Trigon.*, 8, 19, 29). Des relations

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc séc}\, x = \text{arc coséc}\, x,$$

$$\text{arc séc}\, x - \frac{\pi}{2} = \text{arc coséc}\, x,$$

on déduit

$$\text{arc séc}\, x \pm \text{arc coséc}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

La somme ou la différence de arc séc x et de arc coséc x étant égale à une constante, les dérivées des deux fonctions doivent bien être égales et de signes contraires ou égales et de même signe.

EXEMPLES.

834. 1° *Chercher les différentielles des fonctions*

$$y = \sin mx, \quad y = \arcsin \frac{x}{a}, \quad y = \sin^4 x^2.$$

En appliquant les résultats trouvés dans ce Chapitre, concurremment avec le théorème des fonctions de fonctions, on a immédiatement

$$d \sin mx = m \cos mx\, dx, \quad \frac{d \sin mx}{dx} = m \cos mx;$$

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \frac{dx}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{d \arcsin \frac{x}{a}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$d \sin^4 x^2 = 4 \sin^3 x^2 \cos x^2\, 2x\, dx = 8x \sin^3 x^2 \cos x^2\, dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x \sin^3 x^2 \cos x^2.$$

2° *Chercher les différentielles des fonctions*

Nous aurons recours, de même, au théorème des fonctions de fonctions et à la différentiation des fonctions logarithmiques. Il viendra

$$d\log\sin x = \frac{\log e}{\sin x}\cos x\,dx = \log e\,\cot x\,dx$$

et

$$\frac{d\log\sin x}{dx} = \log e\,\cot x;$$

$$d\log\cos x = \frac{\log e}{\cos x}(-\sin x\,dx) = -\log e\,\operatorname{tang} x\,dx$$

et

$$\frac{d\log\cos x}{dx} = -\log e\,\operatorname{tang} x;$$

$$d\log\operatorname{tang} x = \frac{\log e}{\operatorname{tang} x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2\log e}{\sin 2x}\,dx$$

et

$$\frac{d\log\operatorname{tang} x}{dx} = \frac{2\log e}{\sin 2x} = \frac{\log e}{\sin x\cos x}.$$

3° *Chercher les différentielles des fonctions*

$$y = \log\operatorname{tang}\frac{x}{2}, \qquad y = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

On a

$$d\log\operatorname{tang}\frac{x}{2} = \frac{\log e}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2} = \frac{\log e}{\sin x}\,dx$$

et

$$\frac{d\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{dx} = \frac{\log e}{\sin x};$$

$$d\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\log e}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\,\frac{dx}{2}$$

$$= \frac{\log e}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\,dx = \frac{\log e}{\cos x}\,dx$$

et

$$\frac{d\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{dx} = \frac{\log e}{\cos x}.$$

4° *Chercher les différentielles des fonctions*

$$y = \log\operatorname{arc}\sin x, \qquad y = \log\operatorname{arc}\cos x, \qquad y = \log\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$$

On a successivement

$$d\log\operatorname{arc\,sin}x = \frac{\log e}{\operatorname{arc\,sin}x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d\log\operatorname{arc\,sin}x}{dx} = \frac{\log e}{\operatorname{arc\,sin}x.\sqrt{1-x^2}};$$

$$d\log\operatorname{arc\,cos}x = \frac{\log e}{\operatorname{arc\,cos}x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d\log\operatorname{arc\,cos}x}{dx} = -\frac{\log e}{\operatorname{arc\,cos}x.\sqrt{1-x^2}};$$

$$d\log\operatorname{arc\,tang}x = \frac{\log e}{\operatorname{arc\,tang}x}\frac{dx}{1+x^2}, \qquad \frac{d\log\operatorname{arc\,tang}x}{dx} = \frac{\log e}{\operatorname{arc\,tang}x.(1+x^2)}.$$

5° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = e^{\operatorname{arc\,sin}x}.$$

D'après la différentiation des fonctions exponentielles, on a

$$de^{\operatorname{arc\,sin}x} = e^{\operatorname{arc\,sin}x}\frac{\log e}{\log e}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\operatorname{arc\,sin}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

et

$$\frac{de^{\operatorname{arc\,sin}x}}{dx} = \frac{e^{\operatorname{arc\,sin}x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \log\left[x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \operatorname{arc\,séc}\frac{x}{a}.$$

Nous aurons, d'après les formules connues,

$$dy = \frac{\log e}{x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}d\left[x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}.$$

Comme

$$d\left[x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] = dx + \frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}2x\,dx$$

$$= \left[1+\frac{x}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]dx$$

$$= \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+x}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

et que

$$\frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = \frac{a\,dx}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

il vient, en simplifiant,

$$dy = \left[\frac{\log e}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\right] dx = \frac{x\log e + a}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx.$$

Si les logarithmes sont pris dans le système népérien, $\log e = 1$, et l'expression devient, en divisant ses deux termes par $(x+a)^{\frac{1}{2}}$,

$$dy = \frac{1}{x}\left[\frac{x+a}{x-a}\right]^{\frac{1}{2}} dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left[\frac{x+a}{x-a}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

7° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \text{arc tang}\,\frac{a+x}{1-ax}.$$

On a, en simplifiant,

$$dy = \frac{d\,\dfrac{a+x}{1-ax}}{1+\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)^2} = \frac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2+(a+x)^2}\, dx$$

$$= \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)}\, dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

On voit que cette différentielle est la même que celle de arc tang x (826). Il est facile d'indiquer la raison de cette coïncidence. D'après la formule (*Trigon.*, 55)

$$\text{tang}(a+b) = \frac{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}{1 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b},$$

l'arc dont la tangente est égale à $\dfrac{a+x}{1-ax}$ est la somme des arcs qui ont pour tangentes a et x, et l'on a

$$y = \text{arc tang}\,\frac{a+x}{1-ax} = \text{arc tang}\,a + \text{arc tang}\,x.$$

Si l'on regarde alors, comme nous l'avons fait, a comme une constante, tous les arcs correspondants, en désignant l'un d'eux par A, seront compris dans la formule $k\pi + A$, et l'on aura, d'une manière générale,

$$y = k\pi + A + \text{arc tang}\,x,$$

d'où

$$dy = d\,\text{arc tang}\,x.$$

8° *Trouver la différentielle de la fonction composée*

$$y = \text{arc tang}\,\frac{u+v}{1-uv},$$

où u et v sont des fonctions de x. Cet exemple est la généralisation du précédent. On a évidemment

$$dy = \frac{d\dfrac{u+v}{1-uv}}{1+\left(\dfrac{u+v}{1-uv}\right)^2} = \frac{(1-uv)(du+dv)+(u+v)(u\,dv+v\,du)}{(1-uv)^2+(u+v)^2}$$

$$= \frac{(1+v^2)du+(1+u^2)dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{du}{1+u^2}+\frac{dv}{1+v^2}.$$

Ce résultat pouvait être prévu, puisque, d'après ce que nous venons de rappeler (7°),

$$r = \text{arc tang}\,\frac{u+v}{1-uv} = \text{arc tang}\,u + \text{arc tang}\,v.$$

9° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \text{arc sin}\,2x\sqrt{1-x^2}.$$

On a

$$dy = \frac{d\,2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}-2x\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}}\,dx.$$

Il en résulte, en simplifiant,

$$dy = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}\,dx = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)}\,dx = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette différentielle est le double de celle de arc sin x. Voici la raison de ce fait. Désignons arc sin x par y_0. Nous aurons

$$x = \sin y_0, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos y_0, \qquad 2x\sqrt{1-x^2} = \sin 2y_0.$$

L'arc y, dont le sinus est représenté par $2x\sqrt{1-x^2}$, a donc le même sinus que l'arc $2y_0$, c'est-à-dire qu'il est compris dans l'une des formules

$$2k\pi + 2y_0, \qquad (3k+1)\pi - 2y_0,$$

et que sa différentielle est égale à $\pm 2dy_0$. C'est ce qu'exprime le résultat trouvé plus haut.

10° *Étant donnée la relation*

$$\sin x + \sin(x+h) + \sin(x+2h) + \ldots + \sin[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{\sin\dfrac{mh}{2}\sin\left[x+\dfrac{(m-1)h}{2}\right]}{\sin\dfrac{h}{2}},$$

on déduire la somme des cosinus des mêmes arcs

Il suffit de différentier par rapport à x les deux membres de l'égalité. En supprimant ensuite dx de part et d'autre, on a

$$\cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \ldots + \cos[x+(m-1)h] = \frac{\sin\frac{mh}{2}\cos\left[x+\frac{(m-1)h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}.$$

C'est le résultat déjà obtenu (*Trigon.*, 90).

11° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \operatorname{arc\,tang}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On a

$$dy = \frac{d\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1+\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}\,dx$$

ou, en effectuant et en remarquant que $e^x e^{-x} = e^0 = 1$,

$$dy = \frac{4\,dx}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{2\,dx}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

12° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}{b + a\cos x}.$$

On a

$$dy = \frac{d\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}{b + a\cos x}}{1 + \dfrac{(a^2 - b^2)\sin^2 x}{(b + a\cos x)^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\cos x(b + a\cos x) + a\sqrt{a^2 - b^2}\sin^2 x}{(b + a\cos x)^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 x}\,dx$$

ou, en effectuant et en simplifiant,

$$dy = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}(a + b\cos x)}{(a + b\cos x)^2}\,dx = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}\,dx.$$

13° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \operatorname{arc\,cos}\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}.$$

On a

$$dy = \frac{-\,d\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)^2}},$$

$$dy = \frac{a\sin x(a + b\cos x) - b\sin x(b + a\cos x)}{(a + b\cos x)\sqrt{(a + b\cos x)^2 - (b + a\cos x)^2}}\,dx$$

ou, en effectuant et en simplifiant,

$$dy = \frac{(a^2 - b^2)\sin x}{(a + b\cos x)\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}\,dx = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}\,dx.$$

On remarquera que cette différentielle a la même expression que la précédente (12°). Voici la raison de ce fait.

Si l'on désigne par y l'un des arcs dont la tangente est égale à

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin x}{b + a\cos x},$$

on a en même temps

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(a^2 - b^2)\sin^2 x}{(b + a\cos x)^2}}}$$

$$= \frac{b + a\cos x}{\sqrt{(b + a\cos x)^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 x}} = \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}.$$

Ainsi l'arc y est aussi l'un des arcs dont le cosinus est égal à

$$\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}.$$

Tous ces arcs seront alors compris dans les formules

$$2k\pi + y \quad \text{et} \quad 2k\pi - y;$$

et les deux différentielles calculées (22° et 13°) doivent bien être égales et de même signe ou égales et de signes contraires, comme l'indiquent les formules obtenues.

14° *Chercher la différentielle de la fonction*

$$y = \cos x^{\sin x}.$$

En appliquant le théorème des fonctions composées, nous aurons

$$dy = \cos x^{\sin x} \frac{\log \cos x}{\log e} \cos x\, dx + \sin x \cos x^{\sin x - 1}(-\sin x\, dx),$$

$$dy = \cos x^{\sin x} \left[\frac{\log \cos x}{\log e} \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] dx.$$

On peut vérifier ce résultat à l'aide de l'expression générale de la différentielle de $y = u^v$ (808).

CHAPITRE IX.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

Cas d'une seule fonction.

835. Nous avons vu qu'on appelait *fonctions implicites* celles qui sont liées aux variables dont elles dépendent par des équations non résolues ou par des conditions non exprimées analytiquement

Nous ne considérerons que celles qui sont définies par des équations non résolues.

836. Le cas le plus simple est celui où la fonction implicite y est définie par une seule équation entre cette fonction et la variable x.

Soit cette équation

$$f(x, y) = 0.$$

y, quoique inconnue, étant une fonction déterminée de x, on peut regarder $f(x, y)$ comme une fonction composée de x (780). Cette fonction, par hypothèse, est constamment nulle: elle est donc constante, et sa différentielle est égale à zéro (762). Or, d'après le théorème des fonctions composées (780), cette différentielle a pour expression

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy.$$

On a donc

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = 0,$$

et l'on en déduit

$$dy = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}\,dx \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Ainsi, *la dérivée d'une fonction y, liée à la variable x par l'équation $f(x, y) = 0$, est égale au quotient, changé de signe, de la dérivée partielle du premier membre de l'équation relativement à x par la dérivée partielle de ce premier membre relativement à y.*

Remarquons que ces dérivées partielles sont, en général, exprimées à la fois en fonction de x et de y, et qu'elles ne peuvent l'être en fonction de x seulement, que si l'on peut résoudre l'équation $f(x, y) = 0$ par rapport à y. Mais, lors même que cette résolution est impossible, le résultat obtenu n'en est pas moins d'une très grande utilité, comme on le verra surtout en *Géométrie analytique* (t. V).

837. Soit, par exemple,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(qui est l'équation d'une ellipse rapportée à ses deux axes $2a$ et $2b$).

Nous aurons

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \qquad \frac{df}{dy} = \frac{2y}{b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

L'équation donnée étant résoluble par rapport à y, on peut facilement vérifier ce résultat. On déduit, en effet, de cette équation

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

838. Voici un second exemple s'appliquant à une fonction transcendante.

Nous avons trouvé (*Trigon.*, 73) l'équation suivante, pour

déterminer $\cos\frac{x}{3}$ en fonction de $\cos x$,

$$4\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3} - \cos x = 0.$$

Posons $y = \cos\frac{x}{3}$. L'équation deviendra

$$f(x, y) = 4y^3 - 3y - \cos x = 0.$$

On a ici

$$\frac{df}{dx} = \sin x, \qquad \frac{df}{dy} = 12y^2 - 3.$$

Par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{12y^2 - 3}.$$

Il est facile de vérifier ce résultat, puisque l'on a $y = \cos\frac{x}{3}$. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3},$$

et il reste à démontrer l'identité

$$\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} = \frac{\sin x}{12y^2 - 3}.$$

En remplaçant y par sa valeur il vient

$$\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} = \frac{\sin x}{12\cos^2\frac{x}{3} - 3},$$

c'est-à-dire

$$4\sin\frac{x}{3}\left(1 - \sin^2\frac{x}{3}\right) - \sin\frac{x}{3} = \sin x$$

ou

$$3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} = \sin x,$$

qui est précisément la relation par laquelle on détermine $\sin\frac{x}{3}$ en fonction de $\sin x$ (*Trigon.*, **77**).

839. Soit, enfin, l'équation

$$f(x, y) = y^x - x^y = 0,$$

qu'on ne peut pas résoudre par rapport à l'une des variables. On a

$$\frac{df}{dx} = y^x l y - y x^{y-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dy} = x y^{x-1} - x^y l x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^x l y - y x^{y-1}}{x y^{x-1} - x^y l x}.$$

On peut simplifier ce résultat en remarquant que, d'après l'équation elle-même, on a

$$y^x = x^y.$$

En divisant par cette quantité les deux termes de l'expression et en changeant le signe, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l y - \frac{y}{x}}{l x - \frac{x}{y}}.$$

Cas de plusieurs fonctions.

840. Soient maintenant y et z deux fonctions implicites de x, liées à la variable par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

y et z étant des fonctions déterminées de x, on peut regarder les fonctions f et φ comme des fonctions composées de x, et leur appliquer séparément le raisonnement précédent (836). On a donc, d'après le même théorème (780), les différentielles des deux fonctions composées devant être nulles, parce que ces fonctions sont constamment nulles,

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0.$$

On obtient ainsi deux équations du premier degré en dy

et en dz qui feront connaître ces différentielles en fonction de dx et de x, y, z. Il est commode de mettre les résultats trouvés sous la forme

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{df}{dy}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dz}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx}}.$$

On en déduira dy et dz ou les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

841. On généralisera facilement ce qui précède. Si l'on a $m-1$ équations entre m variables, on peut prendre l'une d'elles pour variable indépendante, et les $m-1$ autres variables deviennent des fonctions implicites de cette seule variable indépendante.

Soient les $m-1$ équations

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, u, \ldots) &= 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ f_{m-1}(x, y, z, u, \ldots) &= 0, \end{aligned}$$

où x est la variable indépendante et $y, z, u, \ldots$, les $m-1$ fonctions implicites de x.

Les différentielles des premiers membres de ces équations devant être nulles, on aura

$$\begin{aligned} &\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \frac{df_1}{du}du + \ldots = 0, \\ &\frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \frac{df_2}{du}du + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{df_{m-1}}{dx}dx + \frac{df_{m-1}}{dy}dy + \frac{df_{m-1}}{dz}dz + \frac{df_{m-1}}{du}du + \ldots = 0 \end{aligned}$$

En résolvant ce système de $m-1$ équations du premier degré, on pourra obtenir les différentielles $dy, dz, du, \ldots$, en fonction de dx et de $x, y, z, u, \ldots$; puis, les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots$

Élimination des constantes.

842. Ce qui précède nous conduit à dire un mot de l'élimination des constantes arbitraires qui peuvent faire partie d'un système d'équations.

Soit d'abord l'équation

$$f(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

où C représente une constante arbitraire.

La différentiation du premier membre de cette équation, où y peut être regardée comme une fonction implicite de x, nous a donné

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = 0$$

ou, si l'on veut, en divisant par dx,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

En éliminant la constante C entre les équations (1) et (2), $\frac{df}{dx}$ étant la dérivée partielle du premier membre de l'équation (1) par rapport à x, et $\frac{df}{dy}$ la dérivée partielle de ce premier membre par rapport à y, on obtiendra une équation

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3}$$

entre la variable indépendante x, la fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dx}$.

L'équation (3) ainsi déduite de l'équation (1) est une *équation différentielle.*

x et y désignant les coordonnées d'un point rapporté à des axes rectangulaires, si l'on donne à la constante arbitraire C une infinité de valeurs, l'équation (1) représente une *famille* de courbes; et, comme $\frac{dy}{dx}$ est alors (748) la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'axe des x, l'équation (3) exprime, dans cette hypothèse,

une propriété de la tangente, *commune* à toutes les courbes de la famille considérée.

Nous retrouverons ces considérations en Géométrie analytique.

843. Nous traiterons deux exemples très simples.

1° Nous avons vu précédemment (796) que l'équation

$$(1) \qquad y^2 = 2px + C \quad \text{ou} \quad y^2 - 2px - C = 0$$

représente toutes les paraboles de paramètre p ayant leur axe confondu avec l'axe des x.

Si l'on différentie le premier membre de l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad 2y\,dy - 2p\,dx = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{dy}{dx} = p.$$

La constante C disparaît ainsi d'elle-même, et l'équation (2) remplace l'équation (3) du n° 842. C'est l'*équation différentielle* déduite de la proposée.

On voit qu'elle exprime (796) que la *sous-normale* est constante pour toute la famille de courbes représentée par l'équation (1).

2° Soit l'équation

$$(1) \qquad y^2 = 2px \quad \text{ou} \quad y^2 - 2px = 0,$$

dans laquelle p est supposé avoir une valeur arbitraire, et qui représente une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet (796).

En différentiant le premier membre de l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad 2y\,dy - 2p\,dx = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{dy}{dx} = p.$$

En éliminant alors la constante arbitraire p entre les équations (1) et (2), nous obtenons l'équation différentielle (3)

$$(3) \qquad y^2 - 2y\frac{dy}{dx}x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 2x\frac{dy}{dx}.$$

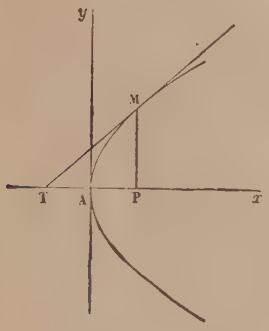
Si l'on se reporte à la *fig.* 11, la sous-tangente TP satisfait précisément à la relation

$$y = \text{TP}\,\frac{dy}{dx}.$$

L'équation (3) prouve donc que, dans toutes les paraboles qui ont

même axe et même sommet, la sous-tangente est toujours double de l'abscisse du point de contact, propriété connue (*Géom.*, 755).

Fig. 11.



844. D'une manière générale, soient m équations entre une variable indépendante x, m fonctions implicites y, z, u, ... de cette variable, et m constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, ... Ces m équations seront de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, u, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x, y, z, u, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots) = 0. \end{cases}$$

En différentiant les premiers membres de ces équations et en égalant les résultats obtenus à zéro, on a, en divisant par dx, un nouveau groupe de m équations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dx} + \dfrac{df_1}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{df_1}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_1}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \dfrac{df_2}{dx} + \dfrac{df_2}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{df_2}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_2}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{df_m}{dx} + \dfrac{df_m}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{df_m}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_m}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots = 0. \end{cases}$$

En éliminant entre les $2m$ équations des groupes (1) et (2) les m constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, ..., on constituera un

nouveau groupe de m équations de la forme (812)

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_1\left(x, y, z, u, \ldots, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \cdots\right) = 0, \\ \varphi_2\left(x, y, z, u, \ldots, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \cdots\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

CHAPITRE X.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS.

845. Avant de passer à l'étude succincte des propriétés relatives aux différentielles d'ordre supérieur, nous démontrerons quelques théorèmes qui nous seront nécessaires par la suite. Nous aurions pu les établir dès le début du dixième Livre; mais, plus rapprochés des applications que nous aurons à en faire, leur importance sera sans doute mieux appréciée

846. I. *Soit la fonction* $f(x)$ *qui admet une dérivée* $f'(x)$ *pour toutes les valeurs de* x *comprises dans un intervalle* (a, b), *et qui s'annule pour* $x = a$ *et pour* $x = b$. *La dérivée* $f'(x)$ *s'annule alors nécessairement pour une certaine valeur* x_1 *de* x, *comprise dans l'intervalle* (a, b).

Puisque $f(x)$ a une dérivée déterminée pour toutes les valeurs de x renfermées dans l'intervalle (a, b), elle est continue dans cet intervalle (749). Elle est donc limitée (604).

Laissons de côté le cas où $f(x)$ serait *constamment* nulle dans l'intervalle considéré et où sa dérivée serait, par conséquent, égale à zéro (751).

Supposons, pour fixer les idées, que quelques-unes des valeurs que prend $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) soient *positives*.

Puisque la fonction $f(x)$ est limitée et continue, elle admettra une valeur maximum positive, qui sera atteinte pour une valeur $x = c$ de l'intervalle (a, b) (605).

Cela posé, si h est un nombre positif assez petit pour que les deux nombres $c - h$, $c + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b), on aura

$$f(c-h)-f(c) \leqq 0, \qquad f(c+h)-f(c) \leqq 0;$$

d'où

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqq 0, \qquad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0.$$

La fonction $f(x)$ ayant, on le suppose, une dérivée dans l'intervalle (a, b), les deux rapports précédents tendent vers la même limite $f'(c)$ quand h tend vers zéro.
Les deux dernières inégalités ne peuvent se concilier que si

$$f'(c) = 0.$$

On arriverait au même résultat si la fonction $f(x)$ ne prenait que des valeurs négatives ou nulles dans l'intervalle (a, b), en considérant la valeur $x = c$ pour laquelle la fonction atteint sa limite minimum.

Cette proposition n'est autre chose que le *théorème de* ROLLE, que nous retrouverons plus tard (*Alg. sup.*, 2e Partie).

847. II. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS. — *Soit la fonction $f(x)$ qui admet une dérivée $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle. Si x_0 et X sont deux valeurs de x comprises dans cet intervalle et si x_1 est une autre valeur de x comprise entre x_0 et X, on a*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1).$$

En effet, considérons la fonction de x représentée par l'expression

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}.$$

Elle s'annule évidemment pour $x = x_0$ et pour $x = X$. D'ailleurs, pour les valeurs de x comprises entre $x = x_0$ et $x = X$, elle a une dérivée égale à

$$f'(x) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0},$$

c'est-à-dire bien déterminée (752). D'après le théorème précédent, cette dérivée doit donc s'annuler pour une valeur x_1 de x, comprise entre x_0 et X. On a, par suite,

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1). \tag{1}$$

Nous avons supposé, dans notre démonstration, $X > x_0$; mais la formule trouvée est indépendante de cette hypothèse, puisque la permutation de X et de x_0 la laisse identique.

On peut poser

$$X = x_0 + h,$$

en désignant par h la différence des deux valeurs X et x_0. La quantité x_1, comprise alors entre x_0 et $x_0 + h$, peut être représentée par $x_0 + \theta h$, θ étant un nombre compris entre o et 1, sans être ni l'un ni l'autre. La formule (1) devient ainsi

$$(2) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$

848. La proposition qu'on vient d'établir conduit, d'une autre manière, à ce théorème important, déjà démontré (753) :

Lorsque la dérivée d'une fonction est constamment nulle dans un certain intervalle, cette fonction se réduit à une constante dans le même intervalle.

En effet, d'après la relation (2) [847], si l'on a $f'(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré, on a aussi $f'(x_0 + \theta h) = 0$. Il en résulte

$$f(x_0 + h) = f(x_0),$$

quel que soit h, pourvu que les deux valeurs x_0 et $x_0 + h$ soient comprises dans l'intervalle ; $f(x)$ conserve donc la même valeur dans cet intervalle et se réduit à une constante.

849. III. *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions qui restent continues pour toutes les valeurs de x renfermées dans un certain intervalle et ont, pour ces valeurs, des dérivées parfaitement déterminées $f'(x)$ et $F'(x)$. Si x_0 et X sont deux valeurs de x comprises dans cet intervalle et si x_1 est une valeur de x comprise entre x_0 et X, on a*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}.$$

[Il est entendu que $F'(x)$, qui peut être nulle ou infinie pour $x = x_0$ ou pour $x = X$, ne l'est pas pour les valeurs intermédiaires.]

Considérons la fonction de x

$$f(x) - f(x_0) - [F(x) - F(x_0)] \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)}.$$

Elle est nulle évidemment pour $x = x_0$ et pour $x = X$, et

elle admet, dans l'intervalle de ces deux valeurs, la dérivée bien déterminée

$$f'(x) - F'(x)\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)}.$$

Cette dérivée doit donc s'annuler (846) pour une valeur x_1 de x, comprise entre x_0 et X, de sorte qu'on a

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}. \tag{1}$$

En posant comme précédemment

$$X = x_0 + h$$

et en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1, la formule (1) devient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

Puisque X peut être plus grand ou plus petit que x_0 (847), h peut être une quantité positive ou négative.

850. IV. *Lorsqu'une fonction $f(x, p)$, contenant un paramètre arbitraire p, reste continue dans un intervalle donné et tend vers zéro, quelle que soit la valeur de x dans cet intervalle, lorsqu'on fait tendre p vers une valeur particulière p_0, toutes les dérivées de $f(x, p)$ par rapport à x tendent aussi vers zéro, dans le même intervalle, lorsqu'on fait tendre p vers p_0.*

En effet, on a (847), pour toutes les valeurs de x et de h compatibles avec l'intervalle donné,

$$f(x + h, p) - f(x, p) = hf'(x + \theta h, p).$$

Par hypothèse, les deux termes du premier membre de cette relation deviennent nuls pour $p = p_0$. On a donc, quelles que soient les valeurs de x et de h, sous la réserve indiquée,

$$f'(x + \theta h, p_0) = 0$$

ou, en faisant $h = 0$,

$$f'(x, p_0) = 0.$$

On déduit évidemment de ce résultat que $f'(x, p_0)$ est

aussi nulle, quelle que soit la valeur de x choisie dans l'intervalle, et, de proche en proche, qu'il en est de même, d'une manière générale, de $f^{(n)}(x, p_0)$.

La fonction donnée de x pourrait renfermer plusieurs paramètres variables, et s'annuler pour des valeurs particulières de ces paramètres. La conclusion serait encore la même.

CHAPITRE XI.

DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DIFFÉRENCES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Des différentielles des divers ordres des fonctions explicites.

851. Nous avons vu précédemment (745) que, si $f(x)$ est une fonction de la variable x, sa dérivée $f'(x)$ est aussi, en général, une fonction de x admettant à son tour une dérivée désignée par $f''(x)$ et appelée la *dérivée seconde* de $f(x)$. De même, $f'''(x)$ est la dérivée de $f''(x)$ ou la troisième dérivée de $f(x)$, et ainsi de suite.

En poursuivant, on obtient une série de fonctions représentées par

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x),\quad \ldots$$

ou par

$$\mathrm{D}f(x),\quad \mathrm{D}^2f(x),\quad \mathrm{D}^3f(x),\quad \ldots,\quad \mathrm{D}^nf(x),\quad \ldots$$

et dont le nombre est illimité, à moins que $f(x)$ ne soit une fonction entière et rationnelle.

La fonction $f^{(n)}(x)$ ou $\mathrm{D}^nf(x)$ est dite la *dérivée du $n^{ième}$ ordre* ou, plus simplement, la *$n^{ième}$ dérivée* de $f(x)$.

A ces dérivées successives correspondent, comme nous allons l'expliquer, les différentielles successives de la fonction $y=f(x)$.

852. Nous avons défini la différentielle de la fonction

(1) $$y=f(x)$$

par la formule (762)

(2) $$dy=f'(x)\,dx.$$

Dans cette formule, dx désigne l'accroissement arbitraire

donné à la variable indépendante x. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de cet accroissement. Nous allons maintenant le regarder comme *constant*, c'est-à-dire comme indépendant des valeurs attribuées à x et de la série des opérations effectuées.

Si l'on différentie l'équation (2) dans cette hypothèse, il vient

$$d\,dy = dx\,df'(x) = dx[f''(x)\,dx] = f''(x)\,dx^2,$$

en indiquant le carré de dx par la notation dx^2.

Le premier membre $d\,dy$ de la relation obtenue est la *différentielle deuxième* de y ou la *différentielle du deuxième ordre* de la fonction. On la représente par la notation d^2y, de sorte qu'on a

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

En différentiant encore les deux membres de cette nouvelle égalité, on a

$$d\,d^2y = dx^2\,df''(x) = dx^2[f'''(x)\,dx] = f'''(x)\,dx^3$$

ou

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3.$$

En poursuivant, on obtiendra une suite de différentielles

$$dy,\quad d^2y,\quad d^3y,\quad \ldots,\quad d^ny,\quad \ldots,$$

dont chacune est la différentielle de la précédente. La différentielle $d^n y$ est la *différentielle du $n^{ième}$ ordre* ou, simplement, la *$n^{ième}$ différentielle* de y ou de $f(x)$, et l'on a, d'une manière générale,

$$(3)\qquad d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n \qquad \text{et} \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

La $n^{ième}$ dérivée de $f(x)$ est donc *égale à sa $n^{ième}$ différentielle divisée par la $n^{ième}$ puissance de la différentielle constante de la variable indépendante.*

On peut, par suite, mettre encore la relation (3) sous la forme

$$(3\ bis)\qquad d^ny = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)dx^n = \frac{d^ny}{dx^n}\,dx^n.$$

Si l'on prend dx comme infiniment petit principal ou comme infiniment petit du premier ordre (717, 718), on voit que d^ny *est, en général, un infiniment petit du $n^{ième}$ ordre.*

Cette correspondance entre $d^n y$ et dx^n dans le premier membre de la formule (3) est nécessaire. Si ces deux infiniment petits étaient d'ordres différents, $f^{(n)}(x)$ serait constamment nulle ou infinie (722) et ne serait plus une fonction de x.

Le rapprochement indiqué précédemment entre la dérivée et la différentielle d'une fonction (760) se poursuit quand on considère les dérivées et les différentielles des divers ordres.

640. Il n'est pas inutile de remarquer que les résultats seraient tout autres, si l'on ne regardait plus dx comme une constante, mais comme une variable ayant ses différentielles successives dx, d^2x, d^3x, ...

Pour le montrer, reprenons la formule

$$dy = f'(x)dx.$$

La différentiation des deux membres, dans l'hypothèse où dx varie, donne

$$d^2y = d[f'(x)dx] = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

En effet, on a à différentier dans le second membre un produit de deux facteurs variables. La différentielle du premier facteur $f'(x)$ est $f''(x)dx$, qu'il faut multiplier par l'autre facteur dx, et la différentielle du second facteur dx est d^2x qu'il faut multiplier par l'autre facteur $f'(x)$.

Il n'y a pas lieu d'insister sur ce point ni sur les nouvelles formules qui représentent alors les différentielles successives de y.

EXEMPLES.

854. Nous allons donner quelques exemples de différentielles ou de dérivées des divers ordres.

1° *Soit la fonction*

$$y = x^m.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

.....

et, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Si m est entier, on parvient à

$$\frac{d^m y}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1.$$

Cette $m^{\text{ième}}$ dérivée est une constante, et les dérivées suivantes sont toutes nulles.

2° *Soit la fonction*

$$y = a^x.$$

On a, en prenant les logarithmes dans le système népérien,

$$\frac{dy}{dx} = a^x la, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^x (la)^2, \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = a^x (la)^3, \qquad \dots$$

et, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (la)^n$$

Si l'on suppose $a = e$, $la = le = 1$, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \dots = \frac{d^n y}{dx^n} = e^x.$$

3° *Soit la fonction*

$$y = \log x.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x} = x^{-1} \log e,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -1.x^{-2} \log e, \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = 1.2.x^{-3} \log e, \qquad \dots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}.1.2.3\dots(n-1)x^{-n} \log e.$$

4° *Soit la fonction*

$$y = \sin x.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x.$$

Les dérivées de $\sin x$ reprennent donc périodiquement et indéfiniment les quatre valeurs

$$\cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x.$$

On trouverait, de même, que les dérivées de $\cos x$ reprennent périodiquement et indéfiniment les quatre valeurs

$$-\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

5° *Soit la fonction*

$$y = \sin(x + a),$$

où a est une constante.

On a (*Trigon.*, 32)

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + a\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + a\right).$$

La dérivée de y s'obtient donc, dans ce cas, en ajoutant le quadrant $\frac{\pi}{2}$ à la constante a. Il en résulte évidemment, d'une manière générale,

$$\frac{d^n \sin(x + a)}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + a\right).$$

Pour $a = 0$, on a donc

$$y = \sin x \qquad \text{et} \qquad \frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

et, pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

et

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous terminerons ces exemples par la recherche de la formule remarquable qui fait connaître la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'un produit.

Expression de la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'un produit.

855. Considérons le produit uv des deux fonctions u et v. Nous aurons d'abord (783)

$$d(uv) = v\,du + u\,dv;$$

puis (781)

$$\begin{aligned} d^2(uv) &= d(v\,du) + d(u\,dv) \\ &= (v\,d^2u + dv\,du) + (dv\,du + u\,d^2v) \end{aligned}$$

ou

$$d^2(uv) = v\,d^2u + 2\,dv\,du + u\,d^2v.$$

De même, en différentiant de nouveau, on trouve

$$d^3(uv) = d(v\,d^2u) + d(2\,dv\,du) + d(u\,d^2v)$$
$$= (v\,d^3u + dv\,d^2u)$$
$$+ (2\,dv\,d^2u + 2\,d^2v\,du) + (d^2v\,du + u\,d^3v)$$

ou

$$d^3(uv) = v\,d^3u + 3\,dv\,d^2u + 3\,d^2v\,du + u\,d^3v.$$

On voit que, dans ces formules, l'ordre des différentielles de u diminue d'une unité, tandis que celui des différentielles de v augmente d'une unité, lorsqu'on passe d'un terme au suivant, de sorte que la somme de ces deux ordres demeure constante et égale à l'ordre de la différentielle du produit uv. De plus, les coefficients numériques des différents termes reproduisent ceux du développement du binôme pour un exposant égal à l'ordre de cette différentielle.

L'analogie conduit donc à penser que l'on a, d'une manière générale,

$$d^m(uv) = v\,d^mu + \frac{m}{1}\,dv\,d^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{m-2}u + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,d^nv\,d^{m-n}u + \ldots + u\,d^mv.$$

Ce résultat ayant été vérifié pour $m = 1, 2, 3$, il suffit, pour prouver sa généralité, d'établir, suivant l'usage, que, s'il est vrai pour l'ordre m, il subsiste encore pour l'ordre $m+1$. C'est ce dont on s'assure immédiatement en différentiant la formule ci-dessus, où les termes du second membre représentent tous un produit de deux facteurs variables.

856. La formule remarquable ainsi vérifiée peut s'écrire *symboliquement*

$$d^m(uv) = (du + dv)^m,$$

à la seule condition d'ajouter en facteur, dans le premier terme du développement de $(du + dv)^m$, $(dv)^0$ et, dans le dernier terme de ce développement, $(du)^0$; puis, de remplacer respectivement les puissances

$$(du)^n \quad \text{et} \quad (dv)^n$$

par les différentielles

$$d^nu \quad \text{et} \quad d^nv$$

et, dans les termes extrêmes, $(dv)^0$ et $(du)^0$ par v et u.

857. On peut aussi représenter *symboliquement* la différentielle d'ordre m d'un produit de p facteurs $u, v, w, \ldots$, par la formule

$$d^m(uvw\ldots) = (du + dv + dw + \ldots)^m,$$

à la condition d'ajouter en facteurs, dans les termes du développement du second membre, la puissance zéro des différentielles $du, dv, dw, \ldots$, qui n'y entrent pas; puis de remplacer ensuite respectivement les puissances

$$(du)^n, \quad (dv)^n, \quad (dw)^n, \quad \ldots$$

par les différentielles correspondantes

$$d^n u, \quad d^n v, \quad d^n w, \quad \ldots,$$

celles-ci devant être remplacées à leur tour par $u, v, w, \ldots$, *dans le cas de* $n = 0$.

Il suffit, pour comprendre cette extension, de se reporter au développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme (297, 299).

Des différences des divers ordres.

858. Il est très utile de rapprocher les *différentielles* et les *différences* successives (758) d'une même fonction.

La différence Δy de la fonction $y = f(x)$ étant elle-même une fonction de x a aussi une différence $\Delta\Delta y$ qui en admet une $\Delta\Delta\Delta y$ à son tour; et ainsi de suite indéfiniment.

En supposant qu'on donne toujours à x le même accroissement ou l'accroissement *constant* Δx, les différences des divers ordres seront désignées par les notations

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y, \quad \ldots, \quad \Delta^n y, \quad \ldots.$$

(Les puissances de Δy seront représentées par Δy, Δy^2, Δy^3, ..., Δy^n, ...)

859. Il s'agit de démontrer que *la dérivée d'ordre n de la fonction* $y = f(x)$ *est la limite du rapport de* $\Delta^n y$ *à* Δx^n, *c'est-à-dire de la différence* $n^{\text{ième}}$ *de cette fonction à la puissance* $n^{\text{ième}}$ *de la différence ou de l'accroissement de la variable.*

Il est entendu que la fonction donnée et les dérivées successives qu'on en doit prendre restent continues dans l'intervalle qu'on a à considérer.

Cela posé, on a (758)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \tag{1}$$

$\alpha = \varphi(x, \Delta x)$ étant une fonction de x et de Δx qui s'annule pour $\Delta x = 0$, quelle que soit la valeur de x choisie dans l'intervalle proposé.

Si l'on prend les accroissements ou les différences des deux membres de la relation (1) pour un nouvel accroissement Δx donné à x, et si on les divise ensuite par Δx, il est clair que le premier membre deviendra

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}.$$

Le premier terme du second membre deviendra

$$\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) + \beta,$$

β étant encore une quantité qui tend vers zéro et s'annule avec Δx.

Quant au second terme α du second membre, il deviendra

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \varphi'(x, \Delta x) + \gamma,$$

en désignant par γ une troisième quantité qui s'annule avec Δx, quelle que soit la valeur donnée à x dans l'intervalle.

On a, par suite,

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x) + \beta + \varphi'(x, \Delta x) + \gamma.$$

Mais la fonction $\varphi(x, \Delta x)$ s'annule pour $\Delta x = 0$ quelle que soit x; il en est donc de même de sa dérivée $\varphi'(x, \Delta x)$ (850), et l'on peut écrire

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x) + \delta_1,$$

δ_1 étant une quantité qui s'annule avec Δx.

En prenant les accroissements ou les différences des deux membres de cette nouvelle égalité pour un nouvel accroissement Δx donné à x et en les divisant ensuite par Δx, le même raisonnement conduit à

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = f'''(x) + \delta_2,$$

δ_2 étant une quantité qui s'évanouit avec Δx.

La loi est évidente, et l'on peut poser d'une manière générale

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x) + \delta_{n-1}, \tag{2}$$

cette dernière quantité s'évanouissant avec Δx.

En passant aux limites, on a

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (852), \tag{3}$$

ce qu'on voulait démontrer.

860. On voit qu'on peut mettre la relation (2) sous la forme

$$\Delta^n y = \frac{d^n y}{dx^n} \Delta x^n + \delta_{n-} \ \Delta x^n.$$

D'ailleurs, on peut faire tendre Δx vers zéro en prenant $\Delta x = dx$ (761). Il vient, dans cette hypothèse,

$$\Delta^n y = d^n y + \delta_{n-1} dx^n,$$

d'où

$$\frac{\Delta^n y}{d^n y} = 1 + \frac{\delta_{n-1}}{\frac{d^n y}{dx^n}}.$$

Si la $n^{\text{ième}}$ dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ reste finie, on a alors

$$\lim \frac{\Delta^n y}{d^n y} = 1;$$

c'est-à-dire (743) que la différentielle d'ordre n d'une fonction de x peut remplacer la différence de même ordre de

cette fonction, dans la recherche des limites de sommes ou de rapports, en négligeant une quantité infiniment petite relativement à cette différence. C'est la généralisation de ce que nous avons dit au n° 760.

Des différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

861. Soit une fonction y de la variable x définie par l'équation

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

En égalant à zéro la dérivée du premier membre de cette équation, nous avons trouvé (836)

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Cette équation (2) donne $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x et de y, ou en fonction de x seulement si l'on peut éliminer y entre les équations (1) et (2), et l'on en déduit ensuite dy.

En combinant convenablement les équations (1) et (2) ou en conservant cette dernière telle qu'elle est, on a une équation de la forme

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{2 bis}$$

Son premier membre étant constamment nul, la différentielle de ce premier membre est constamment nulle (549), et l'on a

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}}d\frac{dy}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire, en divisant par dx,

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}}\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{3}$$

Cette équation (3) fait connaître $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de x, de y

et de $\frac{dy}{dx}$, ou en fonction de x seulement si l'on peut éliminer y et $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (2), (2 *bis*) et (3); et l'on en déduit ensuite d^2y.

On pourra trouver de même $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ... Mais nous n'insisterons pas davantage sur cette méthode, parce que nous en indiquerons plus loin une autre plus rapide, qui s'appliquera également au cas où l'on a à considérer plusieurs fonctions implicites. Un exemple, cependant, ne sera pas inutile pour bien éclaircir ce qui précède.

862. *On demande de trouver la différentielle deuxième de la fonction implicite définie par l'équation*

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0. \tag{1}$$

L'équation (2) du n° 861 est alors, en divisant ses deux membres par 3,

$$x^2 - y + (y^2 - x)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

et l'on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

L'équation (2) est de la forme

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{2 bis}$$

L'équation (3) du n° 648 est donc ici

$$\left(2x - \frac{dy}{dx}\right) + \left[\left(2y\frac{dy}{dx} - 1\right)\frac{dy}{dx}\right] + \left[(y^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0$$

ou

$$2x - 2\frac{dy}{dx} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

et elle va nous permettre de déterminer $\frac{d^2y}{dx^2}$. En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur, en effectuant les calculs et en simplifiant, elle devient

$$2xy\frac{y^3 - 3xy + x^3 + 1}{(y^2 - x)^2} + (y^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{3 bis}$$

Mais l'équation (1) exigeant que le trinôme $y^3 - 3xy + x^3$ soit constamment nul, l'équation (3 *bis*) se réduit à

$$\frac{2xy}{(y^2-x)^2} + (y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et l'on en tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy}{(y^2-x)^3} \quad \text{et} \quad d^2y = -\frac{2xy}{(y^2-x)^3}dx^2.$$

CHAPITRE XII.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Dérivées et différentielles partielles successives d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

863. Nous considérerons, pour fixer les idées, une fonction de deux variables indépendantes x et y. Les raisonnements seraient les mêmes pour un plus grand nombre de variables. Cette fonction de deux variables peut être différentiée par rapport à chacune d'elles, *partiellement et successivement* (779, 851, 852), et ces différentiations peuvent être en nombre quelconque. Ce nombre est l'*ordre* de la différentielle, de la différence et de la dérivée correspondantes; et leur formation ne peut présenter aucune difficulté, puisque, à chaque opération, on n'a à tenir compte que d'*une seule variable indépendante*. Mais certaines remarques spéciales relatives aux notations doivent être soigneusement indiquées.

864. Soit

$$u = f(x, y)$$

la fonction des deux variables indépendantes x et y.

Nous désignerons, d'une manière générale, par

$$f^{m+n+p+\cdots}_{x,y,x,\ldots} u \quad \text{ou par} \quad \mathrm{D}^{m+n+p+\cdots}_{x,y,x,\ldots} u$$

le résultat de $m+n+p+\ldots$, dérivations partielles effectuées sur la fonction u, les m premières se rapportant à x, les n suivantes se rapportant à y, les p suivantes ayant lieu de nouveau relativement à x, ...

La différentielle et la différence partielles de même ordre

seront représentées par les notations

$$d^{m+n+p+\dots}_{x,y,x,\dots} u \quad \text{et} \quad \Delta^{m+n+p+\dots}_{x,y,x,\dots} u.$$

Pour simplifier, on prend les accroissements Δx, Δy, dx, dy *constants* ou respectivement indépendants des variables x et y.

Cela posé, nous aurons d'abord (852), puisqu'il ne s'agit que de la variable x,

$$d^m_x u = f^m_x u \, dx^m = \mathrm{D}^m_x u \, dx^m.$$

De même, en regardant y comme seule variable et en prenant la différentielle d'ordre n des deux membres, il viendra

$$d^{m+n}_{x,y} u = f^{m+n}_{x,y} u \, dx^m \, dy^n = \mathrm{D}^{m+n}_{x,y} u \, dx^m \, dy^n.$$

Enfin, si l'on regarde de nouveau x comme seule variable et si l'on prend la différentielle d'ordre p des deux membres de la relation précédente, on trouvera

$$d^{m+n+p}_{x,y,x} u = f^{m+n+p}_{x,y,x} u \, dx^m \, dy^n \, dx^p = \mathrm{D}^{m+n+p}_{x,y,x} u \, dx^m \, dy^n \, dx^p;$$

et ainsi de suite.

On déduit de là, d'une manière générale,

$$\frac{d^{m+n+p+\dots}_{x,y,x,\dots} u}{dx^m \, dy^n \, dx^p} = f^{m+n+p+\dots}_{x,y,x,\dots} u = \mathrm{D}^{m+n+p+\dots}_{x,y,x,\dots} u.$$

Les dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables s'expriment donc, au moyen des différentielles partielles correspondantes, d'une manière analogue à celle adoptée pour les fonctions d'une seule variable.

Enfin, d'après ce qui précède, on a, en regardant x comme seule variable (859),

$$\frac{\Delta^m_x u}{\Delta x^m} = f^m_x u + \omega_1,$$

ω_1 s'annulant avec Δx.

Si l'on prend maintenant la différence $n^{\text{ième}}$ des deux membres de cette égalité par rapport à y, le premier membre deviendra évidemment

$$\frac{\Delta^{m+n}_{x,y} u}{\Delta x^m \, \Delta y^n}.$$

Quant au second membre, il deviendra la $n^{\text{ième}}$ dérivée

partielle du second membre précédent par rapport à y, augmentée d'une quantité ω_2 s'annulant avec Δy. D'ailleurs, puisque ω_1 s'annule avec Δx, sa $n^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à y s'annule aussi en même temps que Δx (850). On a donc, en désignant la somme de cette dérivée et de ω_2 par ε,

$$\frac{\Delta_{x,y}^{m+n} u}{\Delta x^m \Delta y^n} = f_{x,y}^{m+n} u + \varepsilon,$$

ε étant une quantité qui s'annule quand Δx et Δy s'évanouissent ensemble.

En prenant la différence d'ordre p des deux membres de la dernière égalité par rapport à x et en continuant le même raisonnement, on obtient, d'une manière générale, comme pour les fonctions d'une seule variable,

$$\frac{\Delta_{x,y,x,\dots}^{m+n+p+\dots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \dots} = f_{x,y,x,\dots}^{m+n+p+\dots} u + \lambda,$$

λ devenant nul quand Δx et Δy s'évanouissent ensemble.

En passant aux limites, on en conclut, comme pour les fonctions d'une seule variable,

$$\lim \frac{\Delta_{x,y,x,\dots}^{m+n+p+\dots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \dots} = f_{x,y,x,\dots}^{m+n+p+\dots} u = \frac{d^{m+n+p+\dots} u}{dx^m dy^n dx^p \dots},$$

865. Théorème fondamental. — *L'ordre dans lequel on effectue les différentielles partielles successives, pourvu que le nombre de celles qui sont relatives à une même variable ne change pas, est indifférent.*

Soit toujours la fonction

$$u = f(x, y).$$

Faisons d'abord varier x seulement en le remplaçant par $x + \Delta x$. La fonction u deviendra

$$u + \Delta_x u.$$

Dans ce résultat, faisons maintenant varier y seulement en le remplaçant par $y + \Delta y$. Nous aurons, comme nouveau résultat,

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_y \Delta_x u,$$

c'est-à-dire

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_{x,y}^2 u.$$

Effectuons les opérations en ordre inverse. En faisant varier y seulement, nous aurons

$$u + \Delta_y u;$$

puis, en faisant varier x seulement dans ce résultat,

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u,$$

c'est-à-dire

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta^2_{y,x} u.$$

Les deux résultats définitifs doivent être identiques, puisque tous deux représentent ce que devient la fonction u lorsqu'on y change à la fois x et y en $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$. Il en résulte, identiquement,

$$\Delta^2_{x,y} u = \Delta^2_{y,x} u. \tag{1}$$

Si l'on divise les deux membres de l'identité (1) par le produit $\Delta x \, \Delta y$ ou $\Delta y \, \Delta x$, et si l'on passe aux limites en faisant tendre Δx et Δy vers zéro, on a évidemment, d'après ce qui précède (651),

$$f^2_{x,y} u = f^2_{y,x} u \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D}^2_{x,y} u = \mathrm{D}^2_{y,x} u;$$

et, par conséquent, on a aussi

$$\frac{d^2_{x,y} u}{dx\, dy} = \frac{d^2_{y,x} u}{dy\, dx} \qquad \text{ou} \qquad d^2_{x,y} u = d^2_{y,x} u.$$

Nous n'avons considéré que deux variables et deux opérations; mais le théorème est complètement général; car, de ce qu'on vient d'établir, il résulte qu'on peut toujours, sans rien changer au résultat final, intervertir *l'ordre de deux différentiations successives*. Par conséquent, si l'on a un nombre quelconque de variables et d'opérations, il sera toujours possible, en agissant de proche en proche, d'amener telle différentiation qu'on voudra à tel rang désigné, c'est-à-dire d'intervertir à volonté *l'ordre des différentiations successives*.

866. Ce théorème fondamental permet de simplifier les notations indiquées précédemment, en n'ayant qu'*une seule indication pour chaque variable*.

Supposons, par exemple, qu'on ait dérivé successivement la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

de manière à obtenir une dérivée partielle du cinquième ordre, telle que

$$D^5_{x,z,y,x,z}u = \frac{d^5_{x,z,y,x,z}u}{dx\,dz\,dy\,dx\,dz}.$$

Nous supposerons que l'on ait effectué successivement toutes les opérations qui se rapportent à la même variable, ce qui ne modifie pas le résultat, et nous écrirons

$$D^5_{x^2,y,z^2}u = \frac{d^5_{x^2,y,z^2}u}{dx^2\,dy\,dz^2}.$$

Il est clair que l'expression de cette dérivée partielle peut être encore simplifiée et mise sous la forme

$$\frac{d^5u}{dx^2\,dy\,dz^2},$$

parce que les exposants de dx, de dy et de dz au dénominateur suffisent pour indiquer le nombre des dérivations relatives à chaque variable.

Mais si, pour avoir la différentielle partielle correspondante, on multipliait la dérivée précédente par $dx^2\,dy\,dz^2$ en supprimant le dénominateur, il resterait d^5u, expression qui ne renfermerait plus aucune trace des différentiations effectuées successivement. Il faut donc, dans ce cas, conserver le dénominateur et représenter cette différentielle partielle par l'expression

$$\frac{d^5u}{dx^2\,dy\,dz^2}\,dx^2\,dy\,dz^2.$$

La notation (864)

$$d^5_{x^2,y,z^2}u$$

est alors beaucoup plus simple.

EXEMPLES.

867. 1° *Étant donnée la fonction*

$$u = x^m y^n,$$

trouver

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}.$$

On a immédiatement

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n, \qquad \frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1},$$

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = mn x^{m-1} y^{n-1}, \qquad \frac{d^2 u}{dy\,dx} = mn x^{m-1} y^{n-1} = \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

2° *Étant donnée la fonction*

$$u = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

trouver

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

On a immédiatement, en appliquant d'abord le théorème des fonctions de fonctions (777),

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dy\,dx} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

3° *Étant donnée la fonction*

$$u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2},$$

trouver

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2 u}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 u}{dx\,dz}, \quad \frac{d^2 u}{dy\,dz}, \quad \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz}$$

On a immédiatement

$$\frac{du}{dx} = \frac{2xy}{a^2-z^2}, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{x^2}{a^2-z^2}, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{2x^2yz}{(a^2-z^2)^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{2x}{a^2-z^2}, \qquad \frac{d^2 u}{dy\,dx} = \frac{2x}{a^2-z^2} = \frac{d^2 u}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2 u}{dx\,dz} = \frac{4xyz}{(a^2-z^2)^2}, \qquad \frac{d^2 u}{dz\,dx} = \frac{4xyz}{(a^2-z^2)^2} = \frac{d^2 u}{dx\,dz},$$

$$\frac{d^2 u}{dy\,dz} = \frac{2x^2 z}{(a^2-z^2)^2}, \qquad \frac{d^2 u}{dz\,dy} = \frac{2x^2 z}{(a^2-z^2)^2} = \frac{d^2 u}{dy\,dz},$$

$$\frac{d^3 u}{dx\,dy\,dz} = \frac{4xz}{(a^2-z^2)^2} = \frac{d^3 u}{dy\,dz\,dx} = \ldots.$$

4° *Étant donnée la fonction*

$$u = e^{xyz}$$

trouver

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}.$$

On a immédiatement

$$\frac{du}{dx} = yze^{xyz},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz},$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = e^{xyz} + xyze^{xyz} + 2xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}$$
$$= e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2).$$

5° *Appliquer le théorème des fonctions homogènes à la fonction*

$$u = (x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (x-y+z)^3 - (y+z-x)^3.$$

Ce théorème consiste ici (580) dans l'identité

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z = 3u. \tag{1}$$

Remarquons que la fonction u ne change pas quand on y permute x et y ou quand on y permute y et z sans toucher aux signes. En effet, on a, dans le premier cas,

$$u = (y+x+z)^3 - (y+x-z)^3 - (y-x+z)^3 - (x+z-y)^3,$$

et, dans le second,

$$u = (x+z+y)^3 - (x+z-y)^3 - (x-z+y)^3 - (z+y-x)^3.$$

Il en résulte qu'on pourra passer de $\frac{du}{dx}$ à $\frac{du}{dy}$ en permutant x et y et, de $\frac{du}{dy}$ à $\frac{du}{dz}$, en permutant y et z. Il suffit donc de calculer $\frac{du}{dx}$.

Or on a évidemment

$$\frac{du}{dx} = 3(x+y+z)^2 - 3(x+y-z)^2 - 3(x-y+z)^2 + 3(y+z-x)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{du}{dx} = 3\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \\ -x^2-y^2-z^2-2xy+2xz+2yz \\ -x^2-y^2-z^2+2xy-2xz+2yz \\ +x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz \end{array}\right\} = 24yz.$$

Par suite,

$$\frac{du}{dy} = 24xz \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{dz} = 24xy.$$

En substituant, dans l'équation (1), il vient donc

$$24xyz + 24xyz + 24xyz = 3u.$$

On doit, par conséquent, obtenir, toute réduction faite,

$$u = 24xyz,$$

et c'est ce qu'il est facile de vérifier.

6° *Étant donnée la fonction*

$$u = \sqrt{x^2+y^2},$$

démontrer que l'expression

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2xy\frac{d^2u}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2u}{dy^2}$$

est égale à zéro.

On a successivement

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression indiquée, on trouve bien

$$\frac{x^2y^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

868. Soit la fonction

$$u = f(x, y)$$

des deux variables indépendantes x et y; u est continue dans un intervalle donné, lorsque, les valeurs de l'une des varia-

bles étant fixées, u est une fonction continue de l'autre variable.

Nous avons démontré précédemment (779) la relation suivante

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega, \tag{1}$$

dans laquelle ω est une quantité infiniment petite par rapport à Δx, Δy, Δu, quand Δx et Δy tendent ensemble vers zéro.

La somme des deux premiers termes du second membre de la relation (1) est donc égale à la différence totale Δu, sauf une quantité infiniment petite par rapport à cette différence.

On a été conduit, par analogie, à donner le nom de *différentielle totale* de u à l'expression

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy,$$

où dx et dy sont des quantités indéterminées et indépendantes qu'on appelle les *différentielles* de x et de y.

Lorsqu'on regarde ces différentielles comme les accroissements infiniment petits donnés à x et à y, l'expression proposée peut être considérée comme l'accroissement total correspondant du de la fonction u, sauf une quantité infiniment petite par rapport à du, et l'on a

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy. \tag{2}$$

Dans la formule (2), il faut avoir soin de ne pas confondre les du du second membre avec le du du premier. Pour cela, il suffit de ne pas supprimer les facteurs communs dx et dy.

On pourrait aussi, pour éviter toute ambiguïté, adopter la notation très simple

$$du = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

ou encore

$$du = d_x u + d_y u,$$

puisque $\frac{du}{dx}dx$ et $\frac{du}{dy}dy$ représentent les *différentielles partielles* de u par rapport aux variables x et y, comme $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ représentent ses *dérivées partielles*.

Quoi qu'il en soit, ces considérations pouvant s'appliquer à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes, comme la relation (1) elle-même, on peut dire, d'une manière générale, que *la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes est toujours égale à la somme des différentielles partielles de la fonction, prises par rapport à chaque variable.*

Si l'on a

$$u = f(x, y, z, \ldots, t),$$

on a aussi

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots + \frac{du}{dt}dt.$$

869. Comme pour les fonctions d'une seule variable, *si une fonction de plusieurs variables indépendantes est constante dans un intervalle donné, sa différentielle totale est constamment nulle dans cet intervalle; et réciproquement.*

En effet, si u se réduit à une constante, les dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots, \frac{du}{dt}$, sont toutes nulles, et il en résulte $du = 0$.

Réciproquement, si l'on a $du = 0$ dans un certain intervalle, on a aussi, dans cet intervalle,

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots + \frac{du}{dt}dt = 0.$$

Puisque $dx, dy, dz, \ldots, dt$, sont des quantités indéterminées, on a alors, séparément,

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Ces conditions montrent, successivement, que u est indépendant de $x, y, z, \ldots, t$, ou de toutes les variables. On a donc nécessairement $u = \text{const.}$

870. Comme pour les fonctions d'une seule variable, *si, pour les valeurs des variables indépendantes $x, y, z, \ldots, t$, comprises respectivement entre certaines limites, deux fonctions u et v ne diffèrent que par une constante, leurs différentielles totales sont égales entre ces mêmes limites; et, réciproquement, si les deux fonctions remplissent cette dernière condition, elles ne peuvent différer que par une constante.*

En effet, si l'on a

$$u - v = \text{const.},$$

il en résulte (869)

$$d(u - v) = 0, \qquad du - dv = 0, \qquad du = dv.$$

Et, réciproquement, si l'on a

$$du = dv,$$

il en résulte

$$du - dv = 0, \qquad d(u - v) = 0, \qquad u - v = \text{const.}$$

Différentielles totales des divers ordres d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

871. Il nous reste à considérer les différentielles totales des divers ordres de la fonction u.

Si du est la différentielle totale de u, nous désignerons par d^2u la différentielle totale ddu de du, par d^3u la différentielle totale dd^2u de d^2u, etc. Dans la suite

$$u, \quad du, \quad d^2u, \quad d^3u, \quad \ldots, \quad d^nu, \quad \ldots,$$

chaque terme exprime ainsi, à partir du second, la différentielle totale du terme précédent.

Ces différentielles sont les différentielles totales du premier ordre, du deuxième ordre, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre, ..., de la fonction u.

Cela posé, considérons cette fois trois variables, et prenons

$$u = f(x, y, z).$$

Nous aurons d'abord (868)

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Cherchons la différentielle totale d^2u. Elle sera égale à la somme des différentielles totales de chacun des termes du second membre. Il viendra donc, par exemple, pour le premier terme de ce second membre,

$$d\frac{du}{dx}dx = \frac{d\frac{du}{dx}dx}{dx}dx + \frac{d\frac{du}{dx}dx}{dy}dy + \frac{d\frac{du}{dx}dx}{dz}dz,$$

c'est-à-dire

$$d\frac{du}{dx}dx = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz.$$

En faisant de même pour les autres termes et en se rappelant le théorème général relatif à l'ordre des différentiations (865), ainsi que la constance des différentielles dx, dy, dz (864), on trouvera évidemment

$$\begin{aligned} d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 &+ \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz \\ &+ \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz \\ &+ \frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + \frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} d^2u = &\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz. \end{aligned}$$

On voit qu'on obtiendra d^2u en multipliant du par du ou en élevant du au carré, à la condition de remplacer partout dans le développement $(du)^2$ par d^2u. On a ainsi la formule *symbolique*

$$d^2u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^2 = (d_x u + d_y u + d_z u)^2.$$

Cette même loi se poursuivra pour la formation de d^3u, etc. On peut donc écrire finalement la formule générale *symbolique*

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^m = (d_x u + d_y u + d_z u)^m,$$

où l'on devra toujours remplacer dans le développement du second membre $(du)^m$ par $d^m u$, en laissant invariables les puissances de dx, dy, dz, ou celles des indices x, y, z.

On prouvera la généralité de la formule, en montrant que, si elle est vraie pour l'ordre m, elle l'est encore pour l'ordre $m+1$.

872. Comparons la différentielle totale $d^m u$ à la différence totale $\Delta^m u$.

Reprenons la formule connue (868, 779), en la supposant appliquée au cas de trois variables

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z + \omega. \tag{1}$$

Nous savons que ω est infiniment petit par rapport à Δx, Δy, Δz, Δu, quand Δx, Δy et Δz tendent vers zéro.

Pour calculer $\Delta^2 u$, il faut calculer l'accroissement du second membre quand on donne à x, à y et à z, les mêmes accroissements Δx, Δy, Δz, que précédemment.

Rappelons que ω se compose de trois parties : une première partie qui, divisée par Δx, s'annule encore pour $\Delta x = 0$, ainsi que ses dérivées (850); une deuxième partie qui, divisée par Δy, comprend des termes s'annulant, les uns pour $\Delta x = 0$, les autres pour $\Delta y = 0$, et dont les dérivées, par conséquent, s'annulent toutes pour $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$; une troisième partie qui, divisée par Δz, comprend des termes s'annulant, les uns pour $\Delta x = 0$, les autres pour $\Delta y = 0$, les derniers pour $\Delta z = 0$, et dont les dérivées, par conséquent, s'annulent toutes pour $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ et $\Delta z = 0$. L'accroissement de ω sera donc (722) infiniment petit relativement à Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2, $\Delta x \Delta z$, $\Delta y \Delta z$, Δz^2.

D'autre part, d'après la formule (1), on a

$$\Delta \frac{du}{dx}\Delta x = \frac{d^2 u}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^2 u}{dx\,dy}\Delta x \Delta y + \frac{d^2 u}{dx\,dz}\Delta x \Delta z + \omega_1,$$

$$\Delta \frac{du}{dy}\Delta y = \frac{d^2 u}{dx\,dy}\Delta x \Delta y + \frac{d^2 u}{dy^2}\Delta y^2 + \frac{d^2 u}{dy\,dz}\Delta y \Delta z + \omega_2,$$

$$\Delta \frac{du}{dz}\Delta z = \frac{d^2 u}{dx\,dz}\Delta x \Delta z + \frac{d^2 u}{dy\,dz}\Delta y \Delta z + \frac{d^2 u}{dz^2}\Delta z^2 + \omega_3,$$

ω_1, ω_2, ω_3 étant des quantités infiniment petites par rapport aux carrés et aux produits deux à deux des accroissements Δx, Δy, Δz, comme l'accroissement de ω lui-même.

On peut donc, en désignant par ε_1 ce dernier accroissement, augmenté de $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, et en réunissant les résultats précédents, écrire *symboliquement*

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z\right)^2 + \varepsilon_1,$$

ε_1 étant infiniment petit relativement aux carrés et aux produits deux à deux des accroissements.

En continuant de la même manière, on parviendra à la formule générale

$$\Delta^m u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z\right)^m + \varepsilon_{m-1},$$

étant entendu que, dans le développement du second membre, les puissances de *du seules* seront remplacées par les différentielles de même ordre, et que ε_{m-1} est une quantité infiniment petite par rapport au produit de m facteurs Δx, Δy ou Δz.

Comme on peut faire tendre Δx, Δy, Δz vers zéro, en posant $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$, *la différentielle totale d'ordre m d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes ne diffère de la différence correspondante de même ordre que d'une quantité infiniment petite par rapport à cette différence elle-même.*

La substitution de $d^m u$ à $\Delta^m u$ sera donc permise, toutes les fois qu'il s'agira de la recherche d'une limite de somme ou de rapport (733)

EXEMPLES.

873. 1° *Chercher la différentielle totale du premier ordre de la fonction*

$$u = l\tang\frac{x}{y}.$$

On a

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\tang\frac{x}{y}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\tang\frac{x}{y}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Par suite,

$$du = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

2° *Chercher la différentielle totale du deuxième ordre de la fonction*

$$u = x^m y^n.$$

On a d'abord

$$\frac{du}{dx} = m\,x^{m-1}y^n, \qquad \frac{du}{dy} = n\,x^m y^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$du = m\,x^{m-1}y^n\,dx + n\,x^m y^{n-1}\,dy.$$

On a ensuite

$$d^2u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^2 = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2.$$

D'ailleurs,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n,$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = mn\,x^{m-1}y^{n-1},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = n(n-1)x^m y^{n-2}.$$

Par suite,

$$d^2u = x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\,dx^2 + 2mn\,xy\,dx\,dy + n(n-1)x^2\,dy^2].$$

3° *Chercher la différentielle totale du troisième ordre de la fonction*

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

On a d'abord

$$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad \frac{du}{dy} = 2y, \qquad \frac{du}{dz} = 2z.$$

Il en résulte

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz.$$

On a ensuite

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 2, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 2, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx\,dz} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy\,dz} = 0.$$

Par suite,

$$d^2u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz\right)^2 = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

dx, dy, dz étant des constantes, d^3u et toutes les autres différentielles totales successives sont nulles.

4° *Chercher la différentielle totale du quatrième ordre de la fonction*

$$u = xyz.$$

On a successivement

$$\frac{du}{dx} = yz, \qquad \frac{du}{dy} = xz, \qquad \frac{du}{dz} = xy, \qquad du = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = z, \quad \frac{d^2u}{dx\,dz} = y, \quad \frac{d^2u}{dy\,dz} = x,$$

$$d^2u = 2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz).$$

On a ensuite

$$d^3u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz\right)^3,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^3u}{dx^2\,dy} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = 1.$$

Il en résulte immédiatement, d'après la loi de formation du cube d'un polynôme (303),

$$d^3u = 6\,dx\,dy\,dz.$$

dx, dy, dz étant des constantes, d^4u et toutes les autres différentielles totales successives sont nulles.

Différentielles totales des divers ordres d'une fonction composée de fonctions de plusieurs variables indépendantes.

874. Il peut arriver que les variables qui entrent dans la fonction considérée soient elles-mêmes des fonctions d'autres variables indépendantes.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$u = f(v, w),$$

v et w étant elles-mêmes des fonctions de certaines variables indépendantes x et y.

Il est facile de voir d'abord qu'on a

$$du = \frac{du}{dv}\,dv + \frac{du}{dw}\,dw,$$

comme si v et w étaient des variables indépendantes.

En effet, si l'on remplace v et w par leurs valeurs en fonction de x et de y, on a l'expression de u en fonction de ces

mêmes variables et, d'après ce qui précède (868), on peut alors poser

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy.$$

Or $\frac{du}{dx}\,dx$ est la différentielle partielle de u regardée comme fonction de la seule variable x dont dépendent v et w. On aura donc, d'après la règle de différentiation des fonctions, composées de fonctions d'une seule variable indépendante (780),

$$\frac{du}{dx}\,dx = \frac{du}{dv}\left(\frac{dv}{dx}\,dx\right) + \frac{du}{dw}\left(\frac{dw}{dx}\,dx\right);$$

et, de même,

$$\frac{du}{dy}\,dy = \frac{du}{dv}\left(\frac{dv}{dy}\,dy\right) + \frac{du}{dw}\left(\frac{dw}{dy}\,dy\right).$$

En ajoutant ces deux résultats, on trouve pour valeur de du

$$du = \frac{du}{dv}\left(\frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy\right) + \frac{du}{dw}\left(\frac{dw}{dx}\,dx + \frac{dw}{dy}\,dy\right).$$

Or les quantités entre parenthèses, qui multiplient les dérivées partielles $\frac{du}{dv}$ et $\frac{du}{dw}$, sont précisément (868) les valeurs des différentielles dv et dw quand on considère v et w comme des fonctions de x et de y. On a donc bien

$$(1) \qquad du = \frac{du}{dv}\,dv + \frac{du}{dw}\,dw.$$

Cette démonstration, qu'on étend facilement à un nombre quelconque de fonctions dépendantes et de variables indépendantes, prouve que la *différentielle totale du premier ordre de u ne change pas de forme, que les variables v et w dont cette fonction dépend explicitement soient ou non indépendantes.*

On voit de plus par là, puisque le théorème des fonctions composées se trouve ainsi généralisé, que les règles de différentiation relatives aux sommes, aux produits, aux quotients et aux puissances des fonctions d'une seule variable, subsistent pour les fonctions de plusieurs variables, dépendantes ou indépendantes (792).

875. Mais il faut bien remarquer que les différentielles totales des autres ordres de la fonction u changent de forme, parce que les facteurs dv et dw qui remplacent dx et dy dans l'expression de la différentielle totale du premier ordre *ne sont plus constants.*

Ainsi, en différentiant les deux membres de l'équation (1) (874), on aura, puisque les règles de différentiation des sommes et des produits sont applicables et que v et w sont des fonctions de x et de y,

$$(2)\quad d^2u = d\left(\frac{du}{dv}\right)dv + \frac{du}{dv}d^2v + d\left(\frac{du}{dw}\right)dw + \frac{du}{dw}d^2w.$$

En appliquant toujours la formule (1), puisque $\frac{du}{dv}$ et $\frac{du}{dw}$ sont des fonctions de v et de w, on a

$$d\left(\frac{du}{dv}\right) = \frac{d^2u}{dv^2}dv + \frac{d^2u}{dv\,dw}dw,$$
$$d\left(\frac{du}{dw}\right) = \frac{d^2u}{dw^2}dw + \frac{d^2u}{dw\,dv}dv.$$

En substituant ces valeurs dans la relation (2), on trouve

$$d^2u = \frac{d^2u}{dv^2}dv^2 + 2\frac{d^2u}{dv\,dw}dv\,dw + \frac{d^2u}{dw^2}dw^2 + \frac{du}{dv}d^2v + \frac{du}{dw}d^2w$$

ou, si l'on veut, en employant la forme symbolique pour les trois premiers termes,

$$d^2u = \left(\frac{du}{dv}dv + \frac{du}{dw}dw\right)^2 + \frac{du}{dv}d^2v + \frac{du}{dw}d^2w.$$

En comparant avec le résultat obtenu au n° 871, on voit qu'il s'introduit ici deux nouveaux termes $\frac{du}{dv}d^2v$, $\frac{du}{dw}d^2w$, et qu'il restera à calculer d^2v et d^2w en fonction des variables indépendantes x et y et de leurs différentielles.

876. On pourrait continuer de même pour calculer d^3u, d^4u, ... Mais les calculs se compliquent et, au delà de d^2u,

les résultats ne sont guère utiles dans les applications ordinaires.

Le plus souvent, il est préférable de chercher séparément et directement les différentes dérivées partielles qui doivent entrer dans les différentielles totales qu'on a à former, ce qui ramène au cas des fonctions d'une seule variable.

Veut-on, par exemple, calculer la dérivée partielle

$$\frac{d^m u}{dx^n\, dy^p} \qquad (m = n + p),$$

on différentie la fonction

$$u = f(v, w)$$

n fois par rapport à la variable indépendante x, ce qui donne

$$\frac{d^n u}{dx^n};$$

puis on différentie ce premier résultat p fois par rapport à la variable indépendante y, ce qui conduit à

$$\frac{d^{n+p} u}{dx^n\, dy^p}.$$

877. Il est important de signaler un cas particulier : v et w peuvent être des fonctions linéaires des variables indépendantes x et y, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$v = a + bx + cy,$$
$$w = a' + b'x + c'y.$$

dv et dw sont alors des quantités constantes quelles que soient les valeurs de x et de y, pourvu qu'on prenne comme à l'ordinaire dx et dy constants. Toutes les différentielles de v et de w sont, par suite, nulles à partir de $d^2 v$ et de $d^2 w$, et l'on retombe nécessairement sur la formule symbolique (871)

$$d^m u = \left(\frac{du}{dv}\, dv + \frac{du}{dw}\, dw\right)^m,$$

qui s'étend à un nombre quelconque de fonctions linéaires dépendantes.

878. Reprenons les formules des nos 874 et 875, c'est-à-dire

$$(1) \qquad du = \frac{du}{dv}\,dv + \frac{dw}{du}\,dw,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} d^2u = \frac{d^2u}{dv^2}\,dv^2 + 2\,\frac{d^2u}{dv\,dw}\,dv\,dw + \frac{d^2u}{dw^2}\,dw^2 \\ + \frac{du}{dv}\,d^2v + \frac{du}{dw}\,d^2w. \end{aligned} \right.$$

On désigne souvent par une seule lettre chacune des dérivées partielles du premier et du deuxième ordre, et l'on pose

$$\frac{du}{dv} = p, \qquad \frac{du}{dw} = q,$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = r, \qquad \frac{d^2u}{dv\,dw} = s, \qquad \frac{d^2u}{dw^2} = t.$$

Les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$(1\,bis) \qquad du = p\,dv + q\,dw,$$

$$(2\,bis) \qquad d^2u = r\,dv^2 + 2s\,dv\,dw + t\,dw^2 + p\,d^2v + q\,d^2w.$$

Les mêmes formules s'appliquent au cas où v et w se trouvent remplacées par les variables indépendantes x et y et la fonction u par la fonction z. On a alors, dx et dy étant supposés constants, c'est-à-dire d^2x et d^2y étant nuls,

$$(1\,ter) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(2\,ter) \qquad d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

879. Admettons enfin que v et w soient fonctions d'une seule variable indépendante x. Il en sera de même de u, et l'on aura

$$dv = \frac{dv}{dx}\,dx, \qquad dw = \frac{dw}{dx}\,dx, \qquad du = \frac{du}{dx}\,dx$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}\,dx^2, \qquad d^2w = \frac{d^2w}{dx^2}\,dx^2, \qquad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2.$$

En substituant dans les formules (1 *bis*) et (2 *bis*) du numéro précédent et en divisant, la première par dx et la seconde par dx^2, on a d'abord

$$\frac{du}{dx} = p\,\frac{dv}{dx} + q\,\frac{dw}{dx},$$

ce qui est l'expression du théorème des fonctions composées; et, ensuite,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = r\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + t\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + p\frac{d^2v}{dx^2} + q\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

830. Considérons d'abord le cas d'une fonction y de la variable indépendante x, définie par l'équation

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Il s'agit de trouver les différentielles successives de y.

y étant une fonction de x, $f(x, y)$ est une fonction composée, de valeur constante zéro; et, par suite (869), ses différentielles de tous les ordres sont aussi nulles. En regardant dx comme une constante, d'où il résulte

$$d^2x = d^3x = \ldots = 0,$$

on n'a donc qu'à égaler à zéro les différentielles successives du premier membre de l'équation (1). En se reportant au n° 875 et en remarquant que les différentes dérivées partielles sont des fonctions de x et de y, il faut observer avec soin que chaque terme des équations considérées doit être différentié par rapport à x et par rapport à y, *dx étant constant, mais non dy.*

On trouve d'abord (780, 836)

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0, \tag{2}$$

d'où l'on déduira dy.

Il vient ensuite

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{df}{dy}d^2y = 0, \tag{3}$$

car le second terme de l'expression qu'on différentie est un produit composé des deux facteurs variables $\frac{df}{dy}$ et dy; et, de cette deuxième relation, on déduira d^2y.

En poursuivant de même, on a encore

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3f}{dx^3}\,dx^3 + 3\,\dfrac{d^3f}{dx^2\,dy}\,dx^2\,dy + 3\,\dfrac{d^3f}{dx\,dy^2}\,dx\,dy^2 + \dfrac{d^3f}{dy^3}\,dy^3 \\ \qquad + 3\left(\dfrac{d^2f}{dx\,dy}\,dx + \dfrac{d^2f}{dy^2}\,dy\right)d^2y + \dfrac{df}{dy}\,d^3y = 0; \end{cases}$$

et, de cette troisième relation, on déduira d^3y, etc.

On pourrait simplifier l'écriture en réunissant sous la forme symbolique (871) les trois premiers termes de la formule (3) et les quatre premiers termes de la formule (4).

Les formules indiquées feront connaître successivement les différentielles dy, d^2y, d^3y, ..., et, par suite, les dérivées correspondantes $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, ...

881. Soit encore l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

x et y étant choisies comme variables indépendantes et dx et dy étant supposés constants, z sera une fonction implicite de ces variables. Le même principe (880) permet de poser, pour la différentielle totale de la fonction f,

$$(1)\qquad \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz = 0,$$

d'où l'on tirera dz différentielle totale de z, en fonction de x, y, z, dx, dy.

De même, la différentielle totale du premier ordre de la fonction f étant nulle, la différentielle totale du deuxième ordre le sera aussi; et, en différentiant le premier membre de la relation (1), on aura, en employant immédiatement la forme symbolique (871),

$$(2)\qquad \left(\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz\right)^2 + \frac{df}{dz}\,d^2z = 0,$$

équation d'où l'on tirera d^2z en fonction de x, y, z, dx, dy, puisque dz est connue.

Remarquons, en effet, de nouveau, que les dérivées partielles $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{df}{dy}$, $\dfrac{df}{dz}$, sont des fonctions de x, y, z, et que chaque terme de la relation (1) doit être différentié par rap-

port à x, par rapport à y et par rapport à z, dx et dy étant constants; mais non dz.

On différentiera le premier membre de l'équation (2) pour trouver d^3z, etc.

882. Au lieu de calculer les différentielles totales, on pourrait chercher comme il suit les différentes dérivées partielles qui y entrent.

Reprenons l'équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Posons, comme nous l'avons indiqué (878),

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dz}{dy} = q.$$

Il viendra (868)

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = p\,dx + q\,dy.$$

Nous poserons de même (878)

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

de sorte que nous aurons (871), dx et dy étant constants,

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

ou

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2;$$

et ainsi de suite.

On voit que la question est ramenée, pour obtenir dz et d^2z, à trouver p, q, r, s, t.

Pour avoir p et q, on différentiera l'équation (1) en y regardant successivement *comme seule variable* x et y dont z est une fonction. On aura ainsi (780), en divisant respectivement les deux résultats par dx et par dy,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz} = 0, \tag{2}$$

d'où l'on déduit

$$p = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} \quad \text{et} \quad q = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}.$$

Pour avoir ensuite r, s, t, on différentiera de nouveau et dans les mêmes conditions les équations (2) par rapport à x puis par rapport à y. Comme la différentiation de la première de ces équations par rapport à y conduit à la même expression que la différentiation de la seconde par rapport à x, nous n'aurons que trois équations distinctes qui seront, en divisant encore respectivement les résultats trouvés par dx et par dy,

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz\,dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz\,dy}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dy\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz\,dy}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2f}{dx^2} + 2p\dfrac{d^2f}{dx\,dz} + p^2\dfrac{d^2f}{dz^2} + r\dfrac{df}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2f}{dx\,dy} + q\dfrac{d^2f}{dx\,dz} + p\dfrac{d^2f}{dy\,dz} + pq\dfrac{d^2f}{dz^2} + s\dfrac{df}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2f}{dy^2} + 2q\dfrac{d^2f}{dy\,dz} + q^2\dfrac{d^2f}{dz^2} + t\dfrac{df}{dz} = 0. \end{cases}$$

p et q étant déterminées, les équations (3) donneront successivement et sans élimination les dérivées partielles du deuxième ordre r, s, t.

On pourra continuer de la même manière en différentiant les équations (3).

Il est utile de remarquer qu'on a (780)

$$dp = \frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy = r\,dx + s\,dy,$$

$$dq = \frac{d^2z}{dx\,dy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy = s\,dx + t\,dy.$$

883. Le cas le plus général est celui où l'on a m équations

et p variables ($m < p$). Dans cette hypothèse, m variables pourront être regardées comme des fonctions implicites des $p - m$ autres variables considérées comme indépendantes et dont les différentielles resteront constantes.

Les seconds membres des équations proposées étant réduits à zéro, les premiers membres de ces équations seront constamment égaux à zéro et leurs différentielles des divers ordres seront toutes nulles.

La différentielle totale d'une fonction étant toujours la somme des différentielles partielles de la fonction par rapport à toutes les variables, indépendantes ou dépendantes, qui y entrent, nous différentierons une première fois les premiers membres des m équations données, et nous obtiendrons les différentielles du premier ordre des m variables prises pour inconnues à l'aide d'un système de m équations du premier degré. Une seconde différentiation nous conduira à un nouveau système de m équations du premier degré renfermant comme inconnues les différentielles du deuxième ordre des variables désignées, etc.

884. Soit, par exemple, le système

$$f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0.$$

y et z seront alors des fonctions implicites de la variable x prise comme variable indépendante, dx étant supposé constant.

Une première différentiation nous donnera

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

et l'on déduira dy et dz de ces deux équations.

En différentiant de nouveau les équations précédentes, en distinguant bien la variable indépendante x des variables dépendantes y et z, il viendra (875), en employant la forme symbolique pour écrire plus rapidement les résultats,

$$\left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz\right)^2 + \frac{df}{dy}d^2y + \frac{df}{dz}d^2z = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz\right)^2 + \frac{dF}{dy}d^2y + \frac{dF}{dz}d^2z = 0.$$

Ces deux nouvelles équations feront connaître d^2y et d^2z, puisque dy et dz sont déterminées, et l'on pourra continuer en suivant toujours la même marche.

EXEMPLES.

885. 1° *Soit l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

où z est regardée comme une fonction de x et de y et où a est une constante. On demande de calculer dz et d^2z.

En employant les formules du n° 882, nous aurons

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2$$

Il viendra successivement

$$p=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},$$

$$q=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

Nous aurons ensuite

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{d^2f}{dz^2}=2,\qquad \frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{d^2f}{dx\,dz}=\frac{d^2f}{dy\,dz}=0.$$

Les équations (3) du n° 882 deviendront donc, en divisant par 2 les deux membres de chacune d'elles,

$$1+p^2+rz=0,$$
$$pq+sz=0,$$
$$1+q^2+tz=0,$$

et l'on en déduira, en faisant intervenir l'équation donnée,

$$r=-\frac{1+p^2}{z}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}=-\frac{a^2-y^2}{z^3},$$

$$s=-\frac{pq}{z}=-\frac{xy}{z^3},$$

$$t=-\frac{1+q^2}{z}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}=-\frac{a^2-x^2}{z^3}.$$

On trouvera finalement, d'après ces valeurs,

$$dz = -\frac{x\,dx + y\,dy}{z},$$

$$d^2z = -\frac{1}{z^3}\left[(a^2 - y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (a^2 - x^2)\,dy^2\right].$$

886. 2° *Soient les deux équations*

$$x + y + z - k = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

où y et z sont des fonctions implicites de la variable indépendante x et où k et a sont des constantes. On demande de déterminer dy et dz, d^2y et d^2z.

En opérant directement et en différentiant une première fois les deux équations, on a

$$dx + dy + dz = 0,$$
$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

En résolvant ces deux équations du premier degré en dy et en dz, on trouve facilement

$$dy = \frac{z\,dx - x\,dx}{y - z}, \qquad dz = \frac{x\,dx - y\,dx}{y - z}$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{x - y}{y - z}.$$

En différentiant de nouveau les résultats précédents et en se rappelant que dx est constant, on a

$$d^2y + d^2z = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + y\,d^2y + z\,d^2z = 0.$$

La première équation donne $d^2z = -d^2y$. La deuxième devient alors, en remplaçant dy et dz par leurs valeurs,

$$dx^2 + \frac{(z - x)^2}{(y - z)^2}\,dx^2 + \frac{(x - y)^2}{(y - z)^2}\,dx^2 + (y - z)\,d^2y = 0;$$

d'où l'on conclut

$$d^2y = \frac{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}{(z - y)^3}\,dx^2$$
$$= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz}{(z - y)^3}\,dx^2.$$

Une transformation évidente conduit à

$$d^2y = \frac{3a^2 - k^2}{(z-y)^3}\,dx^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2 - k^2}{(z-y)^3}.$$

On a ensuite

$$d^2z = \frac{3a^2 - k^2}{(y-z)^3}\,dx^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3a^2 - k^2}{(y-z)^3}.$$

CHAPITRE XIII.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS. FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

Formule de Taylor.

887. Cette formule célèbre, dont nous avons déjà trouvé l'expression finie dans le cas des polynômes entiers (735 et suiv.), permet de développer toute fonction d'une seule variable en série ordonnée suivant les puissances de l'accroissement qu'on lui donne à partir d'une valeur fixée arbitrairement.

Cette formule est soumise à cette condition : que la série obtenue soit convergente.

Quand la fonction $F(x)$ est un polynôme entier de degré m, on obtient, pour le développement de $F(x+h)$ suivant les puissances entières et positives de l'accroissement h, la formule finie (735)

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)\frac{h}{1} + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + F^m(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Le développement du second membre s'arrête à la $m^{ième}$ dérivée, puisque les suivantes sont nulles.

Nous allons montrer que la même forme de développement, sauf la condition de convergence, peut s'appliquer à une fonction *quelconque*, pourvu qu'elle soit continue dans un certain intervalle; mais, alors, le développement du second membre se poursuit indéfiniment, et l'on a à considérer une *série*.

888. Désignons par $F(x)$ une fonction quelconque de x, *finie et continue* pour toutes les valeurs de la variable allant d'une valeur donnée x_0 à une autre valeur donnée $x_0 + h = x_1$.

Supposons que la même condition soit remplie par les $(n+1)$ *premières dérivées de la fonction.*

Nous poserons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x_0+h) = F(x_0) &+ \frac{h}{1}F'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}F''(x_0) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x_0) + \dots \\ &+ \frac{h^n}{1.2.3\dots n}F^n(x_0) + \frac{h^{p+1}}{1.2.3\dots n(p+1)}R. \end{aligned}\right.$$

p est un nombre entier quelconque. R est une quantité inconnue qu'il faut déterminer de manière à satisfaire à la relation (1) et qui dépend évidemment de x_0 et de h.

Substituons x_1 à x_0+h dans le premier membre de la relation (1), et mettons dans le second membre x_1-x_0 à la place de h; en réduisant ensuite ce second membre à zéro, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x_1) - F(x_0) - \frac{x_1-x_0}{1}F'(x_0) \\ &\quad - \frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}F''(x_0) - \frac{(x_1-x_0)^3}{1.2.3}F'''(x_0) - \dots \\ &\quad - \frac{(x_1-x_0)^n}{1.2.3\dots n}F^n(x_0) - \frac{(x_1-x_0)^{p+1}}{1.2.3\dots n(p+1)}R = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous substituons maintenant à x_0, dans le premier membre de l'égalité (2), *excepté dans* R, une valeur de la variable x comprise dans l'intervalle (x_0, x_1), ce premier membre deviendra une fonction de x *qui ne sera plus nulle.* En la désignant par $f(x)$, nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = F(x_1) &- F(x) - \frac{x_1-x}{1}F'(x) \\ &- \frac{(x_1-x)^2}{1.2}F''(x) - \frac{(x_1-x)^3}{1.2.3}F'''(x) - \dots \\ &- \frac{(x_1-x)^n}{1.2.3\dots n}F^n(x) - \frac{(x_1-x)^{p+1}}{1.2.3\dots n(p+1)}R. \end{aligned}\right.$$

Cette fonction $f(x)$ est continue et finie dans l'intervalle (x_0, x_1), d'après les conditions indiquées. Elle s'annule évidemment, d'après l'égalité (2), pour $x=x_0$; et elle s'annule encore pour $x=x_1$. Puisqu'elle est continue dans l'intervalle considéré, elle admet une dérivée dans le même intervalle; et il résulte de ce qu'on vient de dire et du théorème

de Rolle (846) que cette dérivée s'annulera nécessairement pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1.

D'ailleurs, pour trouver la dérivée de $f(x)$, nous remarquerons que $F(x_1)$ est une constante et que, à partir du troisième terme du second membre de la relation (3), on a à prendre la dérivée d'un produit de deux facteurs. En écrivant alors *sur des lignes séparées* les termes où figurent les dérivées de $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., ceux où figurent les dérivées de (x_1-x), $(x_1-x)^2$, ..., et enfin la dérivée du dernier terme où entre R, il viendra

$$\begin{aligned} f'(x) = &- F'(x) - \frac{x_1-x}{1} F''(x) - \frac{(x_1-x)^2}{1.2} F'''(x) - \dots \\ &- \frac{(x_1-x)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^n(x) - \frac{(x_1-x)^n}{1.2.3\dots n} F^{n+1}(x) \\ &+ F'(x) + \frac{x_1-x}{1} F''(x) + \frac{(x_1-x)^2}{1.2} F'''(x) + \dots \\ &+ \frac{(x_1-x)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^n(x) \\ &+ \frac{(x_1-x)^p}{1.2.3\dots n} R. \end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve

$$(4) \qquad f'(x) = \frac{(x_1-x)^p}{1.2.3\dots n} R - \frac{(x_1-x)^n}{1.2.3\dots n} F^{n+1}(x).$$

$f'(x)$ devant s'annuler pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1, et qu'on peut représenter par conséquent par $x_0+\theta h$, θ étant un nombre positif compris entre 0 et 1, nous aurons, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation (4),

$$0 = \frac{(x_1-x_0-\theta h)^p}{1.2.3\dots n} R - \frac{(x_1-x_0-\theta h)^n}{1.2.3\dots n} F^{n+1}(x_0+\theta h),$$

c'est-à-dire, en remettant h à la place de x_1-x_0 et en multipliant les deux membres de l'égalité par $1.2.3\dots n$,

$$0 = h^p(1-\theta)^p R - h^n(1-\theta)^n F^{n+1}(x_0+\theta h),$$

d'où

$$(5) \qquad R = h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} F^{n+1}(x_0+\theta h).$$

Le terme complémentaire de l'égalité (1) devient ainsi

$$\frac{h^{p+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)}\,h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}\,\mathrm{F}^{n+1}(x_0+\theta h)$$

ou

$$(6)\qquad \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\,\mathrm{F}^{n+1}(x_0+\theta h).$$

En reportant cette valeur dans la même égalité et en écrivant x à la place de x_0 pour mieux marquer que la valeur de la variable prise pour point de départ est arbitraire, *sous les conditions indiquées,* nous obtiendrons finalement

$$(A)\quad \begin{cases} \mathrm{F}(x+h)=\mathrm{F}(x)+\dfrac{h}{1}\mathrm{F}'(x)+\dfrac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x)+\dfrac{h^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(x)+\ldots \\ \qquad +\dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}^n(x)+\dfrac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\mathrm{F}^{n+1}(x+\theta h) \end{cases}$$

La formule (A) est la *formule de* Taylor, dans le cas général.

Lorsque le terme complémentaire, c'est-à-dire le dernier terme du second membre, tend vers zéro autant qu'on veut, quand n croît indéfiniment, le second membre de la formule se change en une *série convergente* ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de l'accroissement h : c'est la *série de* Taylor. *Le terme complémentaire* devient le *reste* de la série, et fait connaître l'erreur commise quand on s'arrête dans la série au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme.

889. Si, dans la formule (A), on change h en $-h$, il vient

$$(B)\quad \begin{cases} \mathrm{F}(x-h)=\mathrm{F}(x)-\dfrac{h}{1}\mathrm{F}'(x)+\dfrac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x)-\dfrac{h^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(x)+\ldots \\ \qquad \pm\dfrac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\mathrm{F}^{n+1}(x-\theta h). \end{cases}$$

Les formules (A) et (B) sont applicables, sauf les remarques que nous présenterons ultérieurement, à toutes les fonctions qui restent finies et continues, ainsi que leurs $(n+1)$ premières dérivées, entre les limites $x-h$ et $x+h$.

890. Autres formes du reste. — p étant un nombre quel-

conque, on peut faire $p = n$. Le terme complémentaire (888) prend alors la forme très simple, indiquée pour la première fois par LAGRANGE,

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} F^{n+1}(x+\theta h).$$

Si l'on fait $p = 0$, on obtient cette autre forme du reste de la série (888)

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n}(1-\theta)^n F^{n+1}(x+\theta h),$$

qui a été donnée par CAUCHY et qui peut être utile dans les applications.

891. Les différentes formes du reste contenant le facteur $F^{n+1}(x+\theta h)$, où θ est un nombre indéterminé compris entre 0 et 1, la difficulté pour s'assurer de la convergence de la série de Taylor est de reconnaître si $F^{n+1}(x+\theta h)$ conserve une valeur finie quand n croît indéfiniment.

Prenons le reste de la série sous sa forme la plus simple (890)

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} F^{n+1}(x+\theta h),$$

et remarquons que le premier facteur

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

tend toujours vers zéro, quand n croît indéfiniment. En effet, lorsque $n+1$ a dépassé la valeur de h et que l'on continue à faire croître n, on doit multiplier l'expression précédente par les fractions proprement dites $\frac{h}{n+2}$, $\frac{h}{n+3}$, $\cdots$, qui deviennent de plus en plus petites. Lors même qu'elles seraient toutes égales à la première, on sait que leur produit aurait pour limite zéro (635). Il en sera donc de même *a fortiori* du premier facteur du reste, et ce reste tendra alors vers zéro autant qu'on voudra, si la fonction $F(x)$ et toutes ses dérivées jusqu'à $F^{n+1}(x)$ demeurent continues et finies entre x et $x+h$, lorsque n croît indéfiniment.

Dans cette hypothèse et en ne conservant que les $(n+1)$ premiers termes de la série, si l'on désigne par m et par M

la plus petite et la plus grande valeur de $F^{n+1}(x)$ quand x varie de x à $x+h$, le terme complémentaire sera lui-même compris entre

$$\frac{mh^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{Mh^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)};$$

et l'on obtient ainsi deux limites de l'erreur commise.

892. Il n'est pas inutile de faire observer que, *sauf la forme du reste,* la fonction $F(x+h)$ ne peut pas être développée, suivant les puissances croissantes de h, d'une autre manière que par la formule (A) (888); car nous avons démontré (579) l'identité de deux séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une même variable, lorsque leurs sommes sont égales.

893. Si, dans l'équation (A) (888), en donnant au reste la forme la plus simple (890), on fait successivement $n=0$ et $n=1$, la formule de Taylor se réduit à ses deux ou à ses trois premiers termes, et devient successivement

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x+\theta h),$$

ce qui est la formule des accroissements finis (847), et

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x+\theta h).$$

On l'emploie souvent sous l'une de ces deux formes.

894. Si l'on pose $y=F(x)$, la formule de Taylor peut s'écrire, en adoptant toujours pour le reste la forme la plus simple,

$$F(x+h)=y+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}F^{n+1}(x+\theta h).$$

Mais, h étant l'accroissement constant arbitraire donné à x, les quantités

$$hF'(x), \quad h^2F''(x), \quad \ldots, \quad h^nF^n(x), \quad h^{n+1}F^{n+1}(x)$$

sont précisément, par définition (852), les différentielles successives

$$dy, \quad d^2y, \quad \ldots, \quad d^n y, \quad d^{n+1} y$$

de la fonction y. On peut donc écrire, en désignant par

$$(d^{n+1} y)_{x+\theta h}$$

la valeur de la différentielle du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre, qui répond, non plus à x, mais à une valeur de x comprise entre x et $x+h$,

$$(A') \quad \begin{cases} F(x+h) = y + dy + \dfrac{d^2y}{2} + \dfrac{d^3y}{6} + \ldots \\ \qquad\qquad + \dfrac{d^n y}{1.2.3\ldots n} + \dfrac{[d^{n+1} y]_{x+\theta h}}{1.2.3\ldots(n+1)}. \end{cases}$$

Si l'on suppose maintenant h infiniment petit et égal à dx, les termes successifs du second membre deviennent des infiniment petits (852) dont l'ordre va en augmentant et, par suite, l'erreur commise en s'arrêtant à un certain terme est un infiniment petit d'ordre supérieur relativement au dernier terme conservé.

On présente parfois ainsi la formule de Taylor; et, dans ce cas, les termes de la série permettent d'approcher de la valeur de $F(x+h)$ par une suite d'approximations dont l'ordre est de plus en plus élevé, l'erreur qui persiste après l'addition de chaque terme étant infiniment petite par rapport à ce terme lui-même.

Formule de Maclaurin.

895. On peut, dans la formule (A) (888), permuter x et h. On a alors, puisque le premier membre ne change pas,

$$\begin{aligned} F(x+h) = F(h) &+ \frac{x}{1} F'(h) + \frac{x^2}{1.2} F''(h) \\ &+ \frac{x^3}{1.2.3} F'''(h) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^n(h) \\ &+ \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)} (1-\theta)^{n-p} F^{n+1}(h+\theta x). \end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant $h = 0$, il vient

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) \\ &\quad + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^n(0) \\ &\quad + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p}F^{n+1}(\theta x). \end{aligned}\right.$$

On donne à ce résultat le nom de *formule de* Maclaurin, bien qu'elle ne soit, comme on le voit, qu'un cas particulier de la formule de Taylor, et que Maclaurin lui-même, dans son *Traité des Fluxions,* l'attribue à Taylor.

La série, ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de x, qu'on obtient dans le second membre de la relation (C) quand on fait croître n indéfiniment, a $F(x)$ pour limite, toutes les fois que le terme complémentaire ou le reste de la série a lui-même zéro pour limite.

Ce reste, pour $n = p$, prend la forme simple

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}F^{n+1}(\theta x);$$

pour $p = 0$, il devient

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n}(1-\theta)^n F^{n+1}(\theta x).$$

Comme nous l'avons déjà observé pour la série de Taylor (892), tout développement d'une fonction $F(x)$ en série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de x se confond nécessairement avec celui qui est donné par la formule de Maclaurin.

896. Si l'on avait trouvé d'abord la formule de Maclaurin, on en aurait déduit immédiatement celle de Taylor, en considérant $F(x+h)$ comme une fonction de h et en la développant suivant la formule de Maclaurin. On obtient ainsi, en effet, puisque, lorsque l'on suppose $h = 0$ dans $F(x+h)$, il reste $F(x)$,

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots;$$

ce qui est la formule de Taylor.

Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables.

897. Nous considérerons une fonction de deux variables. Le raisonnement que nous allons présenter s'étend sans difficulté au cas où la fonction proposée contient trois ou un plus grand nombre de variables.

Nous pourrions suivre la marche indiquée pour le développement des polynômes, dans le cas de deux variables (740).

Ainsi, prenant la fonction quelconque $F(x, y)$, nous commencerions par développer $F(x+h, y)$, suivant les puissances de h et d'après la formule de Taylor (888), en regardant x comme seule variable. Dans le résultat obtenu, nous changerions y en $y+k$, et nous développerions chacun de ses coefficients d'après la même formule et suivant les puissances de k. Nous parviendrions de cette manière au développement de $F(x+h, y+k)$. Mais il est préférable de suivre une autre marche due à Cauchy, et qui conduit à une expression plus simple du reste.

898. Remplaçons $F(x+h, y+k)$ par

$$F(x+ht, y+kt) = f(t),$$

et développons cette dernière fonction suivant les puissances de t, en appliquant la formule de Maclaurin (895). En faisant ensuite $t=1$ dans le résultat trouvé, nous obtiendrons évidemment le développement cherché.

Il viendra, en adoptant la forme la plus simple du reste,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &F(x+ht, y+kt) \\ &\quad = f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) + \frac{t^2}{1.2} f''(0) + \frac{t^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots \\ &\qquad + \frac{t^n}{1.2.3\dots n} f^n(0) + \frac{t^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} f^{n+1}(\theta t). \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les termes de ce développement, nous allons chercher l'expression générale de $f^m(t)$, et nous y ferons ensuite $t=0$.

Nous avons trouvé précédemment (871), pour représenter la différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre d'une fonction de deux varia-

bles, $u = \varphi(x, y)$, l'expression symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

où il suffit de remplacer les exposants des puissances de du par les mêmes indices de différentiation.

Or nous pouvons poser ici

$$x + ht = u, \qquad y + kt = v,$$

et regarder u et v comme deux variables distinctes pour lesquelles on aura

$$du = h\,dt, \qquad dv = k\,dt,$$

en supposant dt constant et en remarquant que les valeurs de x et de y sont indépendantes de t. Il en résulte

$$f(t) = \mathrm{F}(x + ht, y + kt) = \mathrm{F}(u, v),$$

c'est-à-dire, symboliquement,

$$d^m f(t) = d^m \mathrm{F}(u, v) = \left(\frac{d\mathrm{F}}{du}du + \frac{d\mathrm{F}}{dv}dv\right)^m.$$

Si l'on divise par dt^m les deux membres de la relation précédente, on a évidemment, en tenant compte des valeurs de du et de dv,

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = f^m(t) = \left(\frac{d\mathrm{F}}{du}h + \frac{d\mathrm{F}}{dv}k\right)^m;$$

car, en divisant chaque terme de la parenthèse du second membre par dt, on le divise lui-même par dt^m.

Faisons maintenant $t = 0$, ou $u = x$ et $v = y$, dans les dérivées de $\mathrm{F}(u, v)$ par rapport aux variables u et v. Ces dérivées deviendront les dérivées correspondantes de $\mathrm{F}(x, y)$ par rapport à x et à y. On peut donc écrire

$$f^m(0) = \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h + \frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)^m,$$

en entendant toujours l'expression au sens symbolique.

La valeur de $f^{n+1}(\theta t)$, qui entre dans le terme complémentaire de l'égalité (1), s'obtiendra aussi à l'aide de la relation que nous venons d'employer. On formera l'expression

$$f^{n+1}(t) = \left(\frac{d\mathrm{F}}{du}h + \frac{d\mathrm{F}}{dv}k\right)^{n+1}.$$

On remplacera ensuite les exposants de $d\mathrm{F}$ par les indices correspondants; et l'on substituera enfin à u et à v les valeurs $x+h\theta t$ et $y+k\theta t$, qui deviendront $x+\theta h$ et $y+\theta k$ pour $t=1$.

Ce qui précède permet d'écrire symboliquement, comme il suit, l'égalité (1), *en y faisant d'ailleurs* $t=1$,

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(x+h, y+k)\\ &\quad=\mathrm{F}(x,y)+\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h+\frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h+\frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)^2\\ &\qquad+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h+\frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)^3+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h+\frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)^n\\ &\qquad+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}h+\frac{d\mathrm{F}}{dy}k\right)^{n+1}_{(x=x+\theta h,\ y=y+\theta k)}. \end{aligned}\right.$$

Les indices inférieurs signifient que, après avoir régulièrement formé le dernier développement, on devra y remplacer x et y par $x+\theta h$ et $y+\theta k$, θ étant une fraction positive proprement dite.

Lorsque le dernier terme du second membre a pour limite zéro, quand n croît indéfiniment, $\mathrm{F}(x+h, y+k)$ se trouve développée suivant une série convergente indéfinie.

C'est ce qui a lieu nécessairement, lorsque aucune des dérivées qui entrent dans le terme complémentaire ne peut devenir infinie par la substitution de $x+\theta h$ et de $y+\theta k$ à la place de x et de y. Admettons, en effet, que P soit un nombre supérieur en valeur absolue à chacune de ces dérivées. Le terme complémentaire sera alors évidemment inférieur à

$$\frac{\mathrm{P}^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}(h+k)^{n+1};$$

et cette expression a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment (891).

899. Si l'on suppose que h et k deviennent les infiniment petits dx et dy, on a

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{F}}{dy}dy\right)^m=d^m\mathrm{F}(x,y).$$

La formule (D) (898) prend alors la forme

$$(D')\quad \left\{\begin{array}{l} F(x+dx, y+dy) \\ \quad = F(x,y) + dF(x,y) + \dfrac{d^2F(x,y)}{2} + \dfrac{d^3F(x,y)}{6} + \dots \\ \qquad + \dfrac{d^nF(x,y)}{1.2.3\dots n} + \dfrac{[d^{n+1}F(x,y)]_{(x+\theta dx,\, y+\theta dy)}}{1.2.3\dots(n+1)}, \end{array}\right.$$

la valeur de la différentielle du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre répondant, non plus à x et à y, mais à une valeur de x comprise entre x et $x+dx$ et à une valeur de y comprise entre y et $y+dy$.

La formule (D') montre que l'expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de deux variables est identique à celle de l'accroissement infiniment petit d'une fonction d'une seule variable (894).

Si dx et dy sont infiniment petits principaux ou du premier ordre, chaque terme du développement obtenu est infiniment petit par rapport à celui qui le précède, et l'erreur commise en s'arrêtant au terme d'ordre n est un infiniment petit d'ordre $n+1$.

900. Pour étendre maintenant la formule de Maclaurin (895) aux fonctions de deux variables, il suffit de faire à la fois $x=0$ et $y=0$ dans la formule (D) (898). En désignant par $\left(\dfrac{dF}{dx}\right)_0$, $\left(\dfrac{dF}{dy}\right)_0$, $\left(\dfrac{d^2F}{dx^2}\right)_0$, ..., ce que deviennent alors les différentes dérivées, on a ainsi, en effectuant,

$$\begin{aligned} F(h,k) = F(0,0) &+ h\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + k\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 \\ &+ \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 + k^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0\right] \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme h et k sont complètement arbitraires, on peut les remplacer par x et par y, et il vient

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{l} F(x,y) = F(0,0) + x\left(\dfrac{dF}{dx}\right)_0 + y\left(\dfrac{dF}{dy}\right)_0 \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[x^2\left(\dfrac{d^2F}{dx^2}\right)_0 + 2xy\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 + y^2\left(\dfrac{d^2F}{dy^2}\right)_0\right] \\ \qquad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

C'est la formule de Maclaurin étendue au cas de deux variables.

Le terme complémentaire devient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}y\right]^{n+1}_{[x=\theta x,\ y=\theta y]},$$

c'est-à-dire que, dans les différentes dérivées qui y entrent, on doit remplacer x par θx et y par θy, θ étant toujours un nombre indéterminé, positif et moindre que 1.

901. Il ne faut pas perdre de vue que les formules de Taylor et de Maclaurin ne peuvent être étendues ainsi aux fonctions de deux ou de plusieurs variables, qu'autant que la fonction proposée et toutes ses dérivées partielles restent continues et finies jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement, pour toutes les valeurs de x et de y comprises dans l'intervalle considéré (888).

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DE LA FORMULE DE MACLAURIN A QUELQUES DÉVELOPPEMENTS IMPORTANTS.

Développement de la formule du binôme pour un exposant quelconque.

902. Proposons-nous de trouver le développement de $(a+b)^m$, dans le cas où l'exposant m est quelconque.

L'expression $(a+b)^m$ est alors susceptible de plusieurs valeurs, dès que m n'est pas un nombre entier, positif ou négatif (120). Mais si $a+b$ est une quantité positive, l'une de ces valeurs est réelle et positive, et c'est la seule que nous considérerons ici.

En posant $\frac{b}{a}=x$, nous écrirons

$$(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m(1+x)^m,$$

et la question est ramenée à développer

$$F(x)=(1+x)^m.$$

Or nous avons trouvé précédemment, d'une manière générale, pour la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre de x^m (854, 1°),

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Nous n'avons évidemment qu'à remplacer, dans ce résultat, x par $1+x$ (777), pour avoir

$$F^n(x)=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

et

$$F^n(0)=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1).$$

Il en résulte immédiatement, d'après la formule de Mac-

laurin (895), et en écrivant le résultat de manière à lui donner l'aspect du développement habituel (265),

$$F(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Quand x est plus grand que 1 en valeur absolue, la série obtenue, abstraction faite du terme complémentaire, *est divergente.*

En effet, le rapport de deux termes consécutifs, tels que

$$u_{n-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}x^{n-1}$$

et

$$u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n$$

est représenté par

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{m-n+1}{n}x = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right)x.$$

Ce rapport a donc pour limite $-x$ quand n croît indéfiniment; et, par suite, quand la valeur absolue de x est plus grande que 1, la série est divergente (504).

On voit qu'*il ne peut y avoir convergence que si x est moindre que 1 en valeur absolue;* et ce n'est que dans ce cas qu'il est nécessaire de s'assurer que le reste de la série a pour limite zéro.

Supposons d'abord x compris entre 0 et 1, c'est-à-dire *positif.*

On peut mettre le reste sous la forme

$$\left[\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots(n+1)}x^{n+1}\right]\left[\frac{1}{1+\theta x}\right]^{n+1-m}.$$

La première parenthèse tend vers zéro, quand n croît indéfiniment; car, lorsque n croît d'une unité, elle se trouve multipliée par le facteur

$$\frac{m-n-1}{n+2}x,$$

quantité qui, pour n assez grand, se rapproche autant qu'on veut de $-x$ (ce qu'on voit en divisant les deux termes de la fraction par n), c'est-à-dire devient moindre que 1 en valeur absolue. On a donc à considérer dans cette parenthèse, et à partir d'un certain point, une suite de facteurs dont le nombre augmente indéfiniment, qui sont plus petits que 1 et décroissants, et dont, par conséquent, le produit a pour limite zéro, de sorte que cette limite est aussi celle de la parenthèse.

La seconde parenthèse est évidemment moindre que 1 et sa limite est zéro pour n assez grand, à moins que θ ne tende vers zéro en même temps que n tend vers l'infini; dans cette hypothèse, elle tend vers la limite 1 en restant moindre que 1.

Le reste de la série a, par conséquent, zéro pour limite dans tous les cas, et cette série est convergente lorsque x, positif, est compris entre 0 et 1.

Supposons maintenant x compris entre 0 et -1, c'est-à-dire *négatif*.

Le raisonnement précédent n'est plus applicable, parce que la seconde parenthèse indiquée dans l'expression du reste devient plus grande que 1 pour n assez grand et croît indéfiniment en même temps que n, à moins que θ ne tende simultanément vers zéro; et, alors, elle tend vers la limite 1, en restant supérieure à 1.

Il faut donc avoir recours à la seconde forme du reste, qui est ici (895)

$$\left[\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots n}x^{n+1}\right][(1-\theta)^n(1+\theta x)^{m-n-1}].$$

On voit, comme ci-dessus, que la première parenthèse a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Quant à la seconde parenthèse, on peut l'écrire, en remplaçant x par $-z$, puisque x est négatif,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^n.$$

La fraction $\frac{1-\theta}{1-\theta z}$ est une fraction proprement dite, et sa puissance $n^{\text{ième}}$ tend vers zéro ou vers l'unité à mesure que n

augmente, tandis que la puissance $(m-1)^{\text{ième}}$ de la fraction $1-\theta z$ demeure toujours une quantité finie.

Le reste de la série a donc encore zéro pour limite, et cette série est aussi convergente lorsque x, négatif, est compris entre o et -1.

En résumé, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, on a

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n + \dots.$$

Le développement de $(a+b)^m$ suivant la formule habituelle (265), *lorsque l'exposant m n'est plus entier mais quelconque, n'est donc permis que dans l'hypothèse où a est plus grand que b en valeur absolue.*

903. Il nous reste à examiner les cas particuliers où l'on a $x = \pm 1$, pour lesquels les raisonnements précédents ne sont plus admissibles.

La formule qu'on vient de démontrer ayant lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1 et, par conséquent, pour des valeurs de x aussi proches qu'on voudra de $+1$ ou de -1, sera encore vraie pour $x = +1$ ou pour $x = -1$, à la condition que les séries correspondantes du second membre demeurent convergentes; car les deux membres de la formule étant toujours égaux dans l'intervalle indiqué, si chacun d'eux tend vers une limite déterminée pour $x = +1$ ou pour $x = -1$, ces deux limites seront nécessairement égales entre elles.

Or, pour $x = \pm 1$, on obtient les deux développements suivants :

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} + \dots,$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} \mp \dots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est (962)

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \pm\left(\frac{m+1}{n} - 1\right).$$

Si $m+1$ est un nombre négatif, c'est-à-dire si m est compris entre -1 et $-\infty$, ce rapport est plus grand que 1 en valeur absolue, et la convergence est impossible pour les deux développements à la fois, puisque leurs termes ne tendent pas vers zéro (504).

A la limite, pour $m=-1$, le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ est égal à ∓ 1, de sorte que les termes des deux séries considérées ont tous la même valeur absolue et que la convergence est encore impossible. La première devient la série indéterminée $1-1+1-1+\ldots$, et la seconde, la série divergente $1+1+1+1+\ldots$.

Il faut donc supposer $m+1$ positif, c'est-à-dire m compris entre -1 et $+\infty$.

Considérons d'abord le premier développement. Le rapport d'un terme au précédent est ici

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{m+1}{n} - 1,$$

de sorte que, pour $m+1$ positif et pour n assez grand, ce rapport finit toujours par être moindre que 1 en valeur absolue. Les termes de la première série finissent donc par diminuer de l'un à l'autre, en étant alternativement positifs et négatifs, ce qui entraîne la convergence de la série (536).

Finalement, *on a*

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

tant que $m+1$ est positif.

Considérons le second développement. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\left(\frac{m+1}{n} - 1\right) = 1 - \frac{m+1}{n}.$$

Ce rapport, pour n assez grand, finit toujours par rester inférieur à 1; mais sa limite, pour $n=\infty$, est égale à l'unité : on est donc dans le doute (517).

Pour décider, désignons par (U) le développement

$$(U) \quad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots,$$

et comparons-le à la série (V)

$$(V) \quad \frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{4^{m+1}} + \dots.$$

On a, en même temps, pour le rapport d'un terme au précédent dans les deux séries,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{m+1}{n}$$

et

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{m+1}}}{\frac{1}{n^{m+1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-m-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-m-1}.$$

x ou $\frac{1}{n}$ étant ici moindre que 1, on peut appliquer à cette dernière expression la formule du binôme (902) et écrire, en se bornant à trois termes,

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = 1 - \frac{m+1}{1}\frac{1}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{-m-3}.$$

On a donc, puisque $m+1$ est positif,

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} > \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{u_n}{v_n} < \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}.$$

Il en résulte (527, 509, VI) que la convergence de la série (V) doit entraîner celle de la série (U). Or la série (V) est convergente, lorsque m est positif (519, 3°); il en est donc de même de la série (U).

Ainsi, *l'on a*

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots,$$

tant que m est positif.

Il est clair, d'ailleurs, que le premier membre de la formule devient *infini, lorsque m est négatif,* et que, par suite, la série du second membre est alors divergente.

Développement des fonctions exponentielles.

904. 1° *Soit d'abord*

$$F(x) = e^x.$$

Toutes les dérivées de la fonction e^x sont égales à cette fonction. Elles restent donc finies pour toute valeur finie de x, et elles se réduisent à l'unité pour $x = 0$, comme la fonction elle-même. Quant à la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée $F^{n+1}(\theta x)$, elle devient $e^{\theta x}$, et l'on a, en prenant la forme la plus simple du reste (895),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} e^{\theta x}.$$

Le facteur

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}$$

peut devenir plus petit que toute quantité donnée, lorsqu'on fait croître n indéfiniment, comme on l'a déjà démontré (891), D'ailleurs, $e^{\theta x}$ est une quantité finie. Le terme complémentaire du second membre ou le reste de la série a donc zéro pour limite. Par suite, cette série est convergente, et l'on peut écrire

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \dots,$$

résultat déjà obtenu par une autre voie (560).

905. 2° *Soit maintenant*

$$F(x) = a^x.$$

On a, d'une manière générale (854, 2°), en indiquant par $l^n a$ la $n^{\text{ième}}$ puissance de la,

$$F^n(x) = a^x l^n a.$$

Par suite,

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = la, \quad F''(0) = l^2 a, \quad \dots, \quad F^{n+1}(\theta x) = a^{\theta x} l^{n+1} a.$$

Il en résulte

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2 l^2 a}{1.2} + \frac{x^3 l^3 a}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n l^n a}{1.2.3\dots n} + \frac{x^{n+1} l^{n+1} a}{1.2.3\dots(n+1)} a^{\theta x}.$$

Le reste tend évidemment vers zéro à mesure que n augmente (891). et la série est convergente. On a donc, pour toute valeur finie de x,

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2 l^2 a}{1.2} + \frac{x^3 l^3 a}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n l^n a}{1.2.3\dots n} + \dots.$$

906. En faisant dans l'égalité précédente $a = e$, d'où $la = le = 1$, on retombe sur le développement de e^x (904).

On peut, réciproquement, déduire le développement de a^x de celui de e^x.

En effet, de $a = e^{la}$ (648), on tire

$$a^x = (e^{la})^x = e^{x\,la}.$$

D'après cela, dans le développement de e^x, changeons x en $x\,la$, ce qui est permis puisque x est quelconque. Le facteur $e^{\theta x}$ du terme complémentaire deviendra $e^{\theta x\,la}$, c'est-à-dire

$$(e^{x\,la})^\theta = a^{\theta x},$$

et l'on retrouvera exactement le développement du n° 905.

Développement de $l(1+x)$.

907. Soit

$$F(x) = l(1+x).$$

Nous ne prenons pas directement la fonction lx, parce que nous voulons appliquer la formule de Maclaurin et que, pour $x = 0$, la fonction lx et toutes ses dérivées seraient infinies (653, 99).

D'après le résultat obtenu d'une manière générale (854, 3°), on peut évidemment écrire, pour le cas considéré de $F(x) = l(1+x)$ et en se reportant au théorème des fonctions de fonctions (777),

$$F^n(x) = (-1)^{n-1} 1.2.3\dots(n-1)(1+x)^{-n}.$$

On trouvera donc directement la première dérivée de la fonction

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1};$$

et l'on aura ensuite, en faisant successivement $n = 2, 3, \dots n$, dans la formule ci-dessus

$$F''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$
$$F'''(x) = (-1)^2 1.2(1+x)^{-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F^n(x) = (-1)^{n-1} 1.2.3\dots(n-1)(1+x)^{-n},$$
$$= \mp 1.2.3\dots(n-1)(1+x)^{-n},$$
$$F^{n+1}(\theta x) = (-1)^n 1.2.3\dots n(1+\theta x)^{-n-1}$$
$$= \pm 1.2.3\dots n \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Il viendra donc, en faisant $x = 0$ dans la fonction et dans ses dérivées successives, sauf la dernière, et en se rappelant (653) que $l.1 = 0$,

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
$$\mp \frac{x^n}{n} \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Nous avons déjà étudié cette série (539, 2°), abstraction faite du terme complémentaire, et nous avons reconnu qu'elle était *divergente* lorsque x était supérieur à 1 en valeur absolue ou égal à -1, et qu'elle était *convergente* lorsque x était inférieur à 1 en valeur absolue ou égal à $+1$.

Nous allons vérifier de nouveau cette convergence, en considérant le terme complémentaire qu'on peut écrire

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Si x a une valeur positive moindre que 1 ou égale à 1, $\frac{x}{1+\theta x}$ est une fraction proprement dite dont la puissance $(n+1)^{\text{ième}}$ peut devenir moindre que toute quantité donnée. Le reste de la série a donc alors zéro pour limite, et la série est convergente.

Si x a une valeur négative comprise entre o et -1, posons $x=-z$. Le terme complémentaire deviendra, en laissant son signe de côté (**482**),

$$\frac{1}{n+1}\frac{z^{n+1}}{(1-\theta z)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{1-\theta z}\right)^{n+1}.$$

Sous cette forme, on ne peut pas affirmer que le reste de la série tende vers zéro, parce qu'on ne sait pas si $\frac{z}{1-\theta z}$ est une fraction proprement dite. Pour lever la difficulté, nous aurons recours à la forme plus générale du reste (895)

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n}(1-\theta)^n\,\mathrm{F}^{n+1}(\theta x).$$

On trouve alors, pour le terme complémentaire qui répond à la fonction $l(1+x)$, en remplaçant toujours x par $-z$ sans tenir compte du signe du résultat,

$$\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots n}(1-\theta)^n\,1.2.3\ldots n(1-\theta z)^{-n-1}$$

ou

$$(z-\theta z)^n\frac{z}{(1-\theta z)^{n+1}}=\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n\frac{z}{1-\theta z}.$$

Comme z est moindre que 1, $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est une fraction proprement dite inférieure à 1, et sa puissance $n^{\text{ième}}$ a zéro pour limite quand n croît indéfiniment; $\frac{z}{1-\theta z}$ est d'ailleurs une quantité finie inférieure à $\frac{z}{1-z}$. Le terme complémentaire de la série a donc zéro pour limite, et la série est encore convergente.

En résumé, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et aussi pour $x=1$, on a

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

Pour $x=-1$, le premier et le second membre de cette égalité deviennent tous deux égaux à $-\infty$; car le premier membre se réduit à $l.0=-\infty$ (**653**), et la série du second

membre se confond avec la série harmonique (505) changée de signe.

Le développement que nous venons d'établir va nous conduire aux formules relatives au calcul des logarithmes.

Calcul des logarithmes népériens.

908. La série

$$(1) \qquad l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

étant convergente (907) pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 exclusivement et $+1$ inclusivement, on peut d'abord y changer x en $\frac{z}{N}$, en désignant par N et par $z<N$ deux nombres positifs quelconques. Il vient ainsi

$$l(1+x)=l\left(1+\frac{z}{N}\right)=l\frac{N+z}{N}=l(N+z)-lN,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$(2) \qquad l(N+z)=lN+\frac{z}{N}-\frac{z^2}{2N^2}+\frac{z^3}{3N^3}-\frac{z^4}{4N^4}+\dots.$$

On peut aussi changer x en $-x$ dans l'égalité (1), *à la condition que x demeure toujours compris entre* 0 *et* 1. On obtient alors la nouvelle égalité

$$(3) \qquad l(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots.$$

En retranchant l'égalité (3) de l'égalité (1), on a

$$(4) \quad l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right).$$

Comme $\frac{1+x}{1-x}$ est plus grand que 1, on peut poser, en désignant par z et par N deux nombres positifs quelconques,

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{N}=\frac{N+z}{N},$$

d'où il résulte

$$x=\frac{z}{2N+z}.$$

Le premier membre de la relation (4) devenant

$$l\frac{N+z}{N} = l(N+z) - lN,$$

on peut écrire, en remplaçant x par sa valeur dans le second membre,

$$(5)\quad (lN+z) = lN + 2\left[\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \dots\right].$$

On voit que les formules (2) et (5) permettent de calculer le logarithme népérien du nombre $N+z$ lorsque l'on connaît celui du nombre N.

En faisant, en particulier, $z=1$ dans ces deux formules, on a

$$(6)\quad l(N+1) = lN + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \dots,$$

$$(7)\quad l(N+1) = lN + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots\right].$$

909. Les séries (2) et (5) sont très convergentes, dès que N est un peu considérable relativement à z.

Proposons-nous, par exemple, d'évaluer le degré d'approximation que l'on obtient en s'arrêtant dans la série (5) à un certain terme.

Négligeons, *dans la parenthèse du second membre,* tous les termes qui suivent le terme de rang $p+1$ ou le terme

$$\frac{2z^{2p+1}}{(2p+1)(2N+z)^{2p+1}}.$$

L'erreur commise sera égale à

$$2\left[\frac{z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}} + \frac{z^{2p+5}}{(2p+5)(2N+z)^{2p+5}} + \dots\right];$$

elle sera donc moindre que

$$\frac{2z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}}\left[1 + \frac{z^2}{(2N+z)^2} + \frac{z^4}{(2N+z)^4} + \dots\right]$$

ou, la parenthèse formant une progression indéfiniment dé-

croissante dont la raison est $\frac{z^2}{(2N+z)^2}$, moindre que (*Alg. élém.*, 342)

$$\frac{2z^{2p+3}}{(2p+3)(2N+z)^{2p+3}\left[1-\frac{z^2}{(2N+z)^2}\right]}.$$

En désignant par E l'erreur commise et en simplifiant, on aura donc, d'une manière générale,

$$E<\frac{z^{2p+3}}{(2p+3)\,2N(N+z)(2N+z)^{2p+1}}.$$

Si l'on ne conserve que le premier terme de la parenthèse du second membre de l'égalité (5) (908), il faut faire dans ce qui précède $p=0$ et l'on a, à la fois,

$$l(N+z)=lN+\frac{2z}{2N+z}$$

et

$$E<\frac{z^3}{6N(N+z)(2N+z)}$$

ou, *a fortiori*, en négligeant z au dénominateur,

$$E<\frac{1}{12}\left(\frac{z}{N}\right)^3.$$

910. C'est en réalité au moyen de la série (7) (908) que l'on calcule les logarithmes népériens. En faisant d'abord dans cette série $N=1$, on a, puisque $l.1=0$,

$$l.2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+\ldots.$$

On commence par réduire en décimales les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^7}$, ..., en divisant par 9 les résultats successivement obtenus à partir du premier; puis, on divise respectivement les quotients correspondants par la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ...

En prenant les dix premiers termes du second membre, on obtient, avec dix décimales exactes,

$$l.2=0,69314\,71806\ldots$$

En supposant N = 2, dans la même série (7), on a

$$l.3 = l.2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} + \ldots.$$

On réduit d'abord en décimales les fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5^3}$, $\frac{2}{5^5}$, $\frac{2}{5^7}$, ..., en divisant par 25 les résultats successivement obtenus à partir du premier; puis, on divise respectivement les quotients correspondants par la suite naturelle des nombres impairs. On abrège le calcul en remarquant que, au lieu de diviser par 25, on peut diviser par 100 et multiplier par 4.

On a ainsi, avec la même approximation et en conservant huit termes dans le second membre,

$$l.3 = 1,09861\,22887\ldots.$$

On obtient $l.4$, en doublant $l.2$, et l'on trouve

$$l.4 = 1,38629\,43611\ldots.$$

En faisant N = 4 dans la série (7), il vient

$$l.5 = l.4 + \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} + \ldots.$$

On obtient les fractions $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9^3}$, $\frac{2}{9^5}$, $\frac{2}{9^7}$, ..., en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^9}$, $\frac{2}{3^{13}}$, ..., et l'on n'a plus qu'à diviser les quotients correspondants par la suite des nombres impairs. En conservant les six premiers termes du second membre, on a, avec dix décimales exactes,

$$l.5 = 1,60943\,79124\ldots.$$

On a ensuite

$$l.6 = l(2.3) = l.2 + l.3.$$

En faisant N = 6 dans la série (7), on trouve $l.7$; etc.

Calcul des logarithmes vulgaires.

911. Pour passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires dont la base est 10, il suffit de multiplier les pre-

miers par le *module relatif* (663)

$$M = \frac{1}{l.10}.$$

On a d'ailleurs

$$l.10 = l(2.5) = l.2 + l.5,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède (910),

$$l.10 = 2,3025850930\ldots\ldots$$

Il vient donc

$$M = \frac{1}{l.10} = 0,4342944819\ldots\ldots$$

Nous avons déjà donné (663) les valeurs de $l.10$ et $\frac{1}{l.10}$ avec quinze décimales exactes.

Si l'on multiplie maintenant par M les deux membres de l'égalité (7) (908), on a évidemment

$$(8)\quad \log(N+1) = \log N + 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]$$

et c'est à l'aide de cette dernière série qu'on a établi les *Tables usuelles*.

Les premiers calculs seuls sont pénibles.

En effet, lorsqu'on ne conserve que le premier terme de la parenthèse du second membre, il suffit évidemment, pour avoir une limite supérieure de l'erreur commise E_1, de faire $z = 1$ dans la limite indiquée pour E au n° 909 et de la multiplier par M. On a ainsi

$$E_1 < \frac{M}{12}\left(\frac{1}{N}\right)^3.$$

Lorsqu'on ne conserve, dans la parenthèse du second membre de l'égalité (8), que les deux premiers termes, l'erreur commise E_2 est moindre que

$$\frac{2M}{5(2N+1)^5}\left[1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \ldots\right]$$

ou que

$$\frac{2M}{5(2N+1)^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2N+1)^2}} = \frac{2M}{5(2N+1)^3(4N^2+4N)}.$$

On a donc, en simplifiant,

$$E_2 < \frac{M}{10N(N+1)(2N+1)^3}$$

et, *a fortiori*,

$$E_2 < \frac{M}{80}\left(\frac{1}{N}\right)^5.$$

M étant moindre que $\frac{1}{2}$, il résulte de la valeur de E_2 que, dès qu'on est parvenu au nombre 101, il suffit de conserver les trois premiers termes du second membre de l'égalité (8), pour obtenir $\log(N+1)$ avec dix décimales exactes; car on a alors, en remplaçant M par $\frac{1}{2}$,

$$E_2 < \frac{1}{160}\frac{1}{10^{10}} \quad \text{ou} \quad E_2 < \frac{1}{10^{12}}.$$

Il résulte de même de la valeur de E_1 que, dès qu'on est parvenu à 1001, il suffit de conserver les deux premiers termes du second membre de l'égalité (8), pour obtenir $\log(N+1)$ avec huit décimales exactes; car on a alors, en remplaçant M par $\frac{1}{2}$,

$$E_1 < \frac{1}{24}\frac{1}{10^9} \quad \text{ou} \quad E_1 < \frac{1}{10^{10}}.$$

Justification directe de l'emploi de la règle des parties proportionnelles dans les calculs par logarithmes.

912. Nous avons admis, en traitant des logarithmes arithmétiques (*Alg. élém.*, 407 et suiv.), qu'il y avait *proportionnalité* entre les petits accroissements donnés aux nombres et les accroissements correspondants de leurs logarithmes; et nous avons montré que, lorsqu'on opérait à l'aide de la partie la plus élevée des Tables, on arrivait ainsi à un résultat exact, à la condition de ne pas conserver plus de sept décimales dans l'expression des logarithmes et plus de sept chiffres significatifs dans celle des nombres.

C'est sur ce point que nous voulons revenir ici.

Nous avons trouvé (907), pour l'expression du reste de la

série (1) (908), dans le cas de x positif,

$$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Ce reste a donc le signe de $(-1)^n$, et sa valeur absolue est moindre que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; en désignant par θ_1 une quantité comprise entre 0 et 1, on peut, par conséquent, le représenter encore par la formule

$$(-1)^n \frac{\theta_1 x^{n+1}}{n+1}.$$

Si l'on se borne aux deux premiers termes de la série, en supposant x compris entre 0 et 1, on a donc, en faisant $n=1$,

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{\theta_1 x^2}{2}. \tag{9}$$

En remplaçant x par $\frac{z}{N}$ [équation (2), 908], il vient

$$l(N+z) = lN + \frac{z}{N} - \frac{\theta_1 z^2}{2N^2} \tag{10}$$

ou, en multipliant les deux membres par le module relatif M pour passer aux logarithmes vulgaires (911),

$$\log(N+z) - \log N = M\left(\frac{z}{N} - \frac{\theta_1 z^2}{2N^2}\right). \tag{11}$$

Si l'on fait $z=1$ dans cette relation, il faut substituer à θ_1 une nouvelle valeur θ'_1 aussi comprise entre 0 et 1, et l'on a

$$\log(N+1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'_1}{2N^2}\right). \tag{12}$$

Cela posé, représentons par δ l'accroissement du logarithme du nombre N, quand ce nombre prend l'accroissement z, et par Δ la différence tabulaire correspondante. Nous aurons

$$\log(N+z) - \log N = \delta \quad \text{et} \quad \log(N+1) - \log N = \Delta.$$

La proportionnalité admise (*Alg. élém.*, 410) conduit à

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{z}{1},$$

c'est-à-dire à

$$\delta = z\Delta \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Si l'on désigne par ε l'erreur commise dans le calcul de $\log(N + z)$ à l'aide des Tables et par ζ l'erreur commise, réciproquement, dans le calcul du nombre $N + z$ si son logarithme est donné, on devra avoir en réalité

$$\delta = z\Delta + \varepsilon, \qquad z = \frac{\delta}{\Delta} + \zeta.$$

Remplaçons dans ces égalités δ et Δ par leurs valeurs déduites des équations (11) et (12), et il viendra

$$\varepsilon = \delta - z\Delta = M\left(\frac{z}{N} - \frac{\theta_1 z^2}{2N^2}\right) - z\,M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'_1}{2N^2}\right)$$

$$= \frac{M z}{2N^2}(\theta'_1 - \theta_1 z)$$

et, en simplifiant immédiatement la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$,

$$\zeta = z - \frac{\delta}{\Delta} = z - \frac{z - \frac{\theta_1 z^2}{2N}}{1 - \frac{\theta'_1}{2N}} = \frac{z(\theta_1 z - \theta'_1)}{2N - \theta'_1} = z\,\frac{\theta_1 z - \theta'_1}{2N - \theta'_1}.$$

Puisque M est moindre que $\frac{1}{2}$ et que les quantités z, θ_1, θ'_1 sont comprises entre o et 1, on a nécessairement, en représentant par $\pm\varepsilon$ et $\pm\zeta$ les valeurs absolues de ε et de ζ,

$$\pm\varepsilon < \frac{1}{4N^2} \qquad \text{et} \qquad \pm\frac{\zeta}{N} < \frac{1}{2N^2}.$$

On voit donc que, si N est égal ou supérieur à 1000, comme dans le cas où l'on se sert des Tables de Hoüel à cinq décimales (*Trigon.*, 122), l'erreur $\pm\varepsilon$ est moindre que le quart d'une unité du sixième ordre décimal, tandis que l'erreur relative $\pm\frac{\zeta}{N}$ (*Alg. élém.*, 413) est inférieure à une demi-unité du même ordre, de sorte que l'emploi de la proportion

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{z}{1}$$

est légitime lorsqu'on se borne à cinq figures, soit qu'il s'agisse du calcul du logarithme d'un nombre donné ou de celui du nombre qui répond à un logarithme donné.

Si N est égal ou supérieur à 10000, comme dans le cas où l'on sert des Tables de CALLET ou des Tables de SCHRÖN, *édition française* (*Alg. élém.*, 405), les erreurs dont il s'agit deviennent respectivement moindres que le quart et la moitié d'une unité du huitième ordre décimal; et l'on peut compter sur sept figures exactes dans les deux calculs qu'on a à effectuer.

Développement des fonctions $\sin x$ et $\cos x$.

913. Nous avons démontré précédemment (854, 5°) que la dérivée d'ordre n de $\sin x$ était égale à

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

et que la dérivée d'ordre n de $\cos x$ avait pour valeur

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Il en résulte que les dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$ restent finies, quel que soit x.

D'ailleurs, on a vu (854, 4°) que les dérivées de $\sin x$ reprennent périodiquement et indéfiniment les quatre valeurs

$$\cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x,$$

tandis que celles de $\cos x$ reprennent périodiquement et indéfiniment les quatre valeurs

$$-\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

Les dérivées d'*ordre impair* sont, dans le premier cas, $\pm\cos x$; les dérivées d'*ordre pair* sont, dans le second cas, $\mp\cos x$.

Pour $x = 0$, *les valeurs de la fonction* $\sin x$ *et de ses dérivées* forment donc une suite périodique ayant pour période

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1,$$

tandis que *les valeurs* de la *fonction* $\cos x$ *et de ses dérivées*

forment une suite périodique ayant pour période

$$1,\quad 0,\quad -1,\quad 0.$$

En appliquant la formule de Maclaurin (895), on aura donc ici

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \\ &\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \mp \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} \mathrm{F}^{n+1}(\theta x),\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \\ &\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \mp \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} \mathrm{F}^{n+1}(\theta x).\end{aligned}\right.$$

Comme on l'a déjà vu (891), le facteur $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}$ tend vers zéro autant qu'on veut pour n assez grand. D'autre part, dans le développement de $\sin x$, *toutes les dérivées d'ordre pair disparaissent.* $n+1$ est donc alors *un nombre impair* et l'on a, d'après la remarque faite plus haut,

$$\mathrm{F}^{n+1}(\theta x) = \pm \cos \theta x,$$

quantité finie, quel que soit x.

Dans le développement de $\cos x$, *toutes les dérivées d'ordre impair disparaissent.* $n+1$ est donc alors *un nombre pair,* et l'on a

$$\mathrm{F}^{n+1}(\theta x) = \mp \cos \theta x.$$

Le reste a, par conséquent, zéro pour limite dans les deux séries, et l'on peut écrire, quel que soit x, *les deux séries convergentes* (539, 3°)

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots.$$

Nous admettrons que l'on peut écrire (904)

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \frac{i^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{i^5x^5}{1.2.3.4.5} + \dots \\ &= 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} + \dots.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, il est facile de constater que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x;$$

on a aussi, en changeant i en $-i$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x;$$

il résulte de ces relations les deux formules très importantes

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

914. Si l'arc x est compris sur la circonférence de rayon 1 entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les termes des séries qui représentent $\sin x$ et $\cos x$ vont constamment en diminuant, à partir du premier pour le sinus, à partir du second pour le cosinus, et l'on peut écrire les inégalités

$$\sin x < x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \ldots,$$

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \ldots.$$

On obtient ainsi, pour le sinus et le cosinus d'un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, des limites plus resserrées que celles indiquées en Trigonométrie (*Trigon.*, 105, 106). En particulier, la différence entre l'arc et le sinus est moindre que le *sixième* du cube de l'arc, et la différence entre le cosinus et l'excès de l'unité sur la moitié du carré de l'arc est moindre que le *vingt-quatrième* de la quatrième puissance de l'arc.

Développement de la fonction arc tang x.

704. Considérons encore la fonction

$$y = F(x) = \text{arc tang } x,$$

et cherchons d'abord l'expression générale de la $n^{\text{ième}}$ dérivée.

En prenant les dérivées successives, on a immédiatement (824)

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

puis, de proche en proche (787),

$$F''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$F'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x.2(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

.....

Il est facile de continuer; mais la loi générale n'apparaît pas d'elle-même, et il faut suivre une autre marche pour la découvrir.

Partons de

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

et posons

$$x = \cot\varphi.$$

Nous aurons, en même temps,

$$\varphi = \operatorname{arc\,cot} x, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} = -\sin^2\varphi$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cot^2\varphi} = \sin^2\varphi.$$

Nous trouverons donc successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx} = -\sin^2\varphi\sin 2\varphi,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi.2\frac{d\varphi}{dx}\sin^2\varphi$$

$$= 2\sin^2\varphi[2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin^2\varphi]$$

$$= 2\sin^3\varphi[3\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi],$$

c'est-à-dire (*Trigon.*, 61)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1.2\sin^3\varphi\sin 3\varphi,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 1.2.3\sin^2\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx}\sin 3\varphi + 1.2\cos 3\varphi.3\frac{d\varphi}{dx}\sin^3\varphi,$$

$$= -1.2.3\sin^4\varphi[\cos\varphi\sin 3\varphi + \sin\varphi\cos 3\varphi],$$

c'est-à-dire (*Trigon.*, 53)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -1.2.3\sin^4\varphi\sin 4\varphi.$$

En poursuivant, on arrive évidemment à la formule générale

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x) = (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)\sin^n\varphi\sin n\varphi.$$

D'ailleurs, de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \sin^2\varphi,$$

on déduit

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

et l'on peut écrire finalement

$$F^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arc\,cot}x),$$

relation dans laquelle on fera $n = 2, 3, 4, \ldots, n$. On a directement $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$.

Cela posé, comme $\operatorname{arc\,cot} 0 = \frac{\pi}{2}$ et que $\sin n\frac{\pi}{2}$ est égal à 0 *ou* à ± 1 suivant que n est pair *ou* impair (*Trigon.*, 29, 11, 12), la formule de Maclaurin conduit ici au développement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \\ &\mp \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{\sin[(2n+1)\operatorname{arc\,cot}\theta x]}{(1+\theta^2x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Il nous reste à chercher les conditions de convergence de la série.

On a, pour la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}x^2 = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}x^2.$$

A mesure que n augmente, ce rapport, toujours moindre

que x^2, tend donc vers x^n autant qu'on veut et est égal à x^2 pour n infini.

Par suite, la série est convergente (**531**) lorsqu'on a $x^2 < 1$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et comme, dans cette hypothèse, le terme complémentaire de la série a zéro pour limite, lorsque n croît indéfiniment, le développement (1) représente bien $\text{arc tang} x$.

La série est encore évidemment convergente pour les deux valeurs limites $x = -1$ et $x = +1$ (**536**).

Lorsque l'on a, au contraire, $x^2 > 1$, c'est-à-dire lorsque x est plus grand que 1 en valeur absolue, les termes de la série ne diminuent pas en ayant zéro pour limite (**539**, 2°) : le terme complémentaire n'a donc pas lui-même zéro pour limite, et la série ne peut pas être convergente (**504**).

Il faut remarquer que, à une valeur donnée de x, répondent une infinité de valeurs de la fonction considérée, $\text{arc tang} x$ (*Trigon.*, **43**); mais, parmi ces valeurs et dans l'intervalle où la convergence existe, une seule se réduit à zéro quand x approche de o d'une manière continue : c'est la valeur de $\text{arc tang} x$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et c'est celle-là que nous devrons choisir.

La série (1) a été donnée par LEIBNITZ, et elle porte souvent son nom.

Nous allons nous en servir pour calculer *le rapport de la circonférence au diamètre* (*Géom.*, 227, 233 et suiv.)

Calcul de π.

916. Dans la série

$$\text{(1)} \qquad \text{arc tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

supposons $x = 1$. La série demeure convergente (**915**), et l'on a

$$\text{arc tang} x = \frac{\pi}{4}.$$

Par suite,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Mais cette série converge trop lentement pour qu'on puisse

l'employer au calcul de π. Nous allons donc déterminer d'autres expressions qui, par leur combinaison, nous permettront d'opérer beaucoup plus rapidement.

Posons, d'une manière générale,

$$\operatorname{arc\,tang} y = a, \qquad \operatorname{arc\,tang} z = b$$

ou

$$\operatorname{tang} a = y, \qquad \operatorname{tang} b = z.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} = \frac{y+z}{1-yz},$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \operatorname{arc}(a+b) = \operatorname{arc\,tang} y + \operatorname{arc\,tang} z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y+z}{1-yz}.$$

Nous voulons avoir, par hypothèse,

$$\operatorname{arc\,tang} y + \operatorname{arc\,tang} z = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} 1;$$

ce qui, d'après la relation (2), entraîne la condition

$$(3) \qquad \frac{y+z}{1-yz} = 1 \qquad \text{ou} \qquad y+z = 1-yz.$$

Par exemple, si l'on fait $y = \frac{1}{2}$, on trouve $z = \frac{1}{3}$, et l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3}.$$

On obtiendra, comme il suit, la combinaison la plus avantageuse.

Désignons par Y l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$. Il viendra (*Trigon.*, 63)

$$\operatorname{tang} 2Y = \frac{2 \operatorname{tang} Y}{1 - \operatorname{tang}^2 Y} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4Y = \frac{2 \operatorname{tang} 2Y}{1 - \operatorname{tang}^2 2Y} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Ce résultat prouve que l'arc $4Y$ doit surpasser l'arc $\frac{\pi}{4}$ d'une très petite quantité.

Remplaçons y dans la relation (3) par $\operatorname{tang} 4Y$ ou par $\frac{120}{119}$. On trouve alors

$$z = -\frac{1}{239}$$

et, à cette tangente négative, correspond l'arc $-Z$. On peut donc écrire

$$\frac{\pi}{4} = 4Y - Z = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239}$$

La série (1) donne d'ailleurs

$$(4)\quad 4Y = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots\right],$$

$$(5)\quad Z = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots.$$

Les séries (4) et (5), convergentes puisque les quantités $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{239}$ sont moindres que 1 (**915**), le sont très rapidement, surtout la seconde. Pour avoir π avec quinze décimales exactes, il suffit, en effet, de conserver *onze termes* dans la première série et d'en prendre *trois* seulement dans la seconde. On pourrait, dans cette hypothèse, aller jusqu'à la dix-septième décimale; mais, comme il faut multiplier deux fois par le facteur 4, d'abord pour avoir $4Y$, et ensuite pour avoir π, on ne comptera que sur les quinze premières décimales, et l'on trouvera comme précédemment (*Géom.*)

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\dots.$$

CHAPITRE XV.

RECHERCHE DES VRAIES VALEURS DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS FORME INDÉTERMINÉE.

Expressions se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

917. Soit une fonction de x de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Il peut arriver que les deux termes de cette fraction deviennent ensemble *nuls* ou *infinis*, pour une certaine valeur de x égale à x_0. La fonction prendra alors la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (*Alg. élém.*, **116** et suiv.). Nous nous proposons de calculer sa véritable valeur, c'est-à-dire la limite vers laquelle elle converge, lorsque x tend vers la valeur spéciale x_0.

La difficulté peut être levée très souvent à l'aide du théorème suivant, auquel on donne habituellement le nom de *règle de* L'HOSPITAL. On la trouve dans son *Analyse des infiniment petits*, publiée en 1696, et elle lui appartient sans aucun doute malgré une réclamation *singulièrement tardive* de JEAN BERNOULLI.

Voici l'énoncé de cette règle remarquable :

Si les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ tendent simultanément vers zéro ou vers l'infini, lorsque x tend vers une valeur spéciale x_0, et si les dérivées de ces fonctions restent en même temps déterminées, les deux rapports

$$\frac{f(x)}{F(x)} \quad et \quad \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

tendent vers la même limite lorsque x s'approche indéfiniment de x_0.

918. 1° *Admettons d'abord qu'on ait* $f(x_0) = 0$ *et* $F(x_0) = 0$.

Nous avons démontré (849) la relation générale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)},$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1. Elle s'applique précisément dans les conditions supposées, et elle devient, dans l'hypothèse indiquée,

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

Les fonctions f et F étant continues et leurs dérivées déterminées dans l'intervalle (x_0, x_0+h), faisons tendre h vers zéro. Les deux membres de l'égalité précédente resteront constamment égaux et auront, par conséquent, les mêmes limites pour $h=0$. On peut donc écrire

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad [\text{pour } x = x_0];$$

ce qui justifie l'énoncé précédent (917).

919. La démonstration que nous venons de donner exige que x_0 soit une quantité finie, l'infini ne pouvant figurer dans les calculs comme une quantité déterminée (480).

Il faut donc examiner à part le cas de $x_0 = \infty$. Nous changerons alors de variable en posant

$$x = \frac{1}{z},$$

et nous aurons

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Si x tend vers l'infini, z tendra vers zéro, valeur déterminée. On peut donc écrire, d'après ce qui précède (918), en

remarquant que $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\mathrm{F}\left(\frac{1}{z}\right)$ sont des fonctions de fonction de x (777),

$$\lim \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2} \mathrm{F}'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{F}'\left(\frac{1}{z}\right)} \quad [\text{pour } z = 0],$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)} \quad [\text{pour } x = \infty].$$

La règle reste donc la même.

920. 2° *Admettons, en second lieu, qu'on ait* $f(x_0) = \infty$ *et* $\mathrm{F}(x_0) = \infty$.

On peut poser

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\left[\frac{1}{\mathrm{F}(x)}\right]}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

et l'on voit que, pour $x = x_0$, les fonctions $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}$ et $\frac{1}{f(x)}$ deviennent nulles toutes les deux. On peut donc encore appliquer la règle précédente (918) et écrire (777)

$$\lim \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \lim \frac{-\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim \frac{\left[\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\right]^2}{\left[\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}\right]}.$$

Si, pour $x = x_0$, $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ tend vers une limite finie L, différente de zéro, on a donc (486)

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}^2}{\lim \frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{L} = \lim \frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)} \quad [\text{pour } x = x_0].$$

Le théorème énoncé au n° 917 est, par conséquent, encore vérifié.

921 Il est nécessaire de montrer que la même conclusion subsiste, lorsque la limite L est nulle ou infinie.

Supposons-la d'abord nulle. Désignons alors par K une constante quelconque, et considérons la fonction

$$\frac{f(x)}{F(x)} + K \quad \text{ou} \quad \frac{f(x) + K\,F(x)}{F(x)}.$$

Puisque, par hypothèse, la limite de $\frac{f(x)}{F(x)}$ est nulle, la limite de la fonction qu'on vient de former doit être égale à K. On peut donc appliquer la règle (920) et écrire

$$\lim \frac{f(x) + K\,F(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x) + K\,F'(x)}{F'(x)} = K.$$

Il en résulte évidemment

$$\lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = 0 = \lim \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Si la limite L de $\frac{f(x)}{F(x)}$ est égale à l'infini, la limite du rapport inverse est zéro. On a donc, d'après ce qu'on vient de démontrer,

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)} = 0,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \infty = \lim \frac{f(x)}{F(x)}.$$

922. *La règle de* L'Hospital ne fait, en réalité, que reculer la difficulté; car il peut arriver que les dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ soient aussi, ensemble, nulles ou infinies pour $x = x_0$, comme les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ elles-mêmes.

On doit alors répéter l'application du théorème relativement à la nouvelle fonction

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

en la remplaçant par le rapport

$$\frac{f''(x)}{F''(x)},$$

et continuer de la même manière si l'indétermination subsiste toujours.

Il faut donc généraliser comme il suit l'énoncé du théorème (917) :

Si les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont simultanément nulles ou infinies pour $x = x_0$, et que l'on soit obligé de poursuivre le calcul de leurs dérivées respectives jusqu'à celles de l'ordre n, afin d'en trouver au moins une qui ait une valeur finie différente de zéro pour $x = x_0$, on a

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f^n(x)}{F^n(x)} \quad [\text{pour } x = x_0].$$

EXEMPLES.

923. 1° *Soit l'expression*

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}.$$

On demande sa véritable valeur pour $x = a$.

En appliquant la règle précédente, il vient (789)

$$\lim \frac{x^m - a^m}{x - a} = \frac{m x^{m-1}}{1} \quad (\text{pour } x = a),$$

c'est-à-dire que la valeur cherchée est

$$m a^{m-1}.$$

On peut facilement vérifier ce résultat, puisqu'on connaît le quotient de $x^m - a^m$ par $x - a$ et qu'on a (229)

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1}.$$

Si l'on fait $x = a$, le polynôme du second membre se réduit bien à $m a^{m-1}$.

2° *Chercher la limite des deux rapports*

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{x}$$

pour $x = 0$.

On a ici (811, 814)

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} \text{ [pour } x = 0] = 1,$$

$$\lim \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} \text{ [pour } x = 0] = 1.$$

Ce sont les résultats obtenus en Trigonométrie (*Trigon.*, 104).

3° *Soit l'expression*

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

On demande sa véritable valeur pour $x = 0$.

Nous serons forcé ici (922) d'appliquer successivement la règle jusqu'aux troisièmes dérivées. On a, en effet,

$$\lim \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \text{ [pour } x = 0] = \frac{0}{0};$$

puis,

$$\lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \text{ [pour } x = 0] = \frac{0}{0};$$

et enfin

$$\lim \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \text{ [pour } x = 0] = \frac{2}{1}.$$

La vraie valeur cherchée est donc égale à 2.

4° *Soit le rapport*

$$\frac{a^x}{x^n},$$

où a *est une constante positive et* n *un entier positif. On demande sa véritable valeur pour* $x = \infty$.

Il faut appliquer successivement la règle (922) jusqu'aux dérivées d'ordre n.

On a, en effet, ***en supposant*** a ***plus grand que*** 1,

$$\lim \frac{a^x}{x^n} = \lim \frac{a^x la}{n x^{n-1}} \text{ [pour } x = \infty] = \frac{\infty}{\infty};$$

$$\lim \frac{a^x la}{n x^{n-1}} = \lim \frac{a^x (la)^2}{n(n-1).x^{n-2}} \text{ [pour } x = \infty] = \frac{\infty}{\infty};$$

.....

$$\lim \frac{a^x (la)^{n-1}}{n(n-1)(n-2)\ldots 2x} = \lim \frac{a^x (la)^n}{1.2.3\ldots n} \text{ [pour } x = \infty] = \infty$$

La véritable valeur cherchée est donc l'infini.

Si l'on suppose a *plus petit que* 1, cette véritable valeur devient zéro.

5° *Soit la fonction rationnelle* (604)

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots}.$$

On demande sa véritable valeur pour $x = \infty$ (*Alg. élém.*, 119).

Il faut encore appliquer la règle (922) jusqu'aux dérivées d'ordre convenable, en distinguant trois cas.

1° *On a* $m > n$.

On prendra le rapport des dérivées d'ordre n des deux termes de l'expression. Le dénominateur sera devenu un nombre constant (736), et le numérateur contiendra encore x. La vraie valeur de la fonction, pour $x = \infty$, sera donc l'infini.

2° *On a* $m < n$.

On prendra le rapport des dérivées d'ordre m des deux termes de l'expression. Le numérateur sera devenu un nombre constant, et le dénominateur contiendra encore x. La vraie valeur de la fonction, pour $x = \infty$, sera donc zéro.

3° *On a* $m = n$.

On prendra le rapport des dérivées d'ordre $m = n$ des deux termes de l'expression. Le numérateur sera devenu $1.2.3\dots ma$, et le dénominateur sera devenu $1.2.3\dots m\mathrm{A}$. La vraie valeur de la fonction, pour $x = \infty$, sera donc $\frac{a}{\mathrm{A}}$.

En résumé, *suivant que le degré du numérateur de la fonction rationnelle sera supérieur, inférieur ou égal au degré du dénominateur, la vraie valeur de la fonction, pour* $x = \infty$, *sera l'infini, zéro ou le rapport des coefficients des premiers termes du numérateur et du dénominateur ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable.*

Autres symboles d'indétermination.

924. Les autres symboles d'indétermination (*Alg. élém.*, 118) peuvent, en général, se ramener aux précédents. C'est ce que nous allons montrer.

925. I. — *Cas où la fonction se présente sous la forme* $0.\infty$.

On a à considérer l'expression

$$y = f(x)\,\mathrm{F}(x),$$

et l'on suppose que, pour $x = a$, on a $f(a) = 0$ et $\mathrm{F}(a) = \infty$.

La fonction y prend alors la forme indéterminée

$$y = 0.\infty.$$

Or, on peut écrire

$$(1) \qquad y = \frac{f(x)}{\left[\frac{1}{F(x)}\right]} \quad \text{ou} \quad y = \frac{F(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

et l'on a, sous cette nouvelle forme et pour $x = a$,

$$y = \frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\infty}{\infty}.$$

Il suffit donc d'appliquer la règle de l'Hospital (922) à la fonction proposée mise sous la forme (1).

926. II. — *Cas où la fonction se présente sous la forme* $\infty - \infty$.

On a à considérer l'expression

$$y = f(x) - F(x),$$

et l'on suppose que, pour $x = a$, on a $f(a) = \infty$ et $F(a) = \infty$. La fonction y prend alors la forme indéterminée

$$y = \infty - \infty.$$

Or, on peut écrire

$$(1) \qquad y = \frac{1}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]} - \frac{1}{\left[\frac{1}{F(x)}\right]} = \frac{\left[\frac{1}{F(x)}\right] - \left[\frac{1}{f(x)}\right]}{\left[\frac{1}{f(x)F(x)}\right]}$$

et l'on a alors, pour $x = a$,

$$y = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

Il suffit donc encore d'appliquer la règle de l'Hospital à la fonction proposée mise sous la forme (1).

Il est parfois préférable d'écrire

$$(2) \qquad y = f(x)\left[1 - \frac{F(x)}{f(x)}\right],$$

et de chercher la véritable valeur du quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ qui, pour $x = a$, se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Si, en opérant ainsi, on trouvait que la véritable valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ est l'unité, y se présenterait sous la forme $0.\infty$, et l'on serait ramené au cas précédent (925).

927. III. — *Cas où la fonction se présente sous l'une des formes* 0^0, ∞^0, 1^∞.

On a à considérer l'expression

$$y = F(x)^{f(x)}. \tag{1}$$

Si l'on suppose que, pour $x = a$, on ait $F(a) = 0$ et $f(a) = 0$, la fonction y prendra la forme indéterminée

$$y = 0^0;$$

si l'on suppose $F(a) = \infty$ et $f(a) = 0$, elle prendra la forme

$$y = \infty^0;$$

enfin, si l'on suppose $F(a) = 1$ et $f(a) = \infty$, elle prendra la forme

$$y = 1^\infty.$$

Pour trouver les vraies valeurs cachées sous ces nouveaux symboles, nous prendrons alors les logarithmes des deux membres de l'égalité (1). Il viendra

$$\log y = f(x) \log F(x). \tag{2}$$

La question sera donc ramenée à chercher la limite de $\log y$ qui se présente évidemment, pour $x = a$ et dans les trois hypothèses successivement indiquées, sous la forme

$$0(-\infty) \quad \text{ou} \quad 0.\infty,$$

puisque l'on a (653)

$$\log 0 = \mp\infty, \qquad \log\infty = \pm\infty, \qquad \log 1 = 0.$$

Nous rentrerons ainsi dans le premier cas (925).

EXEMPLES.

928. *Soit l'expression*

$$y = x l x.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = 0$.

On a alors

$$y = 0(-\infty).$$

Nous écrirons donc (925)

$$y = \frac{lx}{\left[\frac{1}{x}\right]},$$

et la fonction, mise sous cette forme, devient $\frac{-\infty}{\infty}$ pour $x = 0$. Par suite (922),

$$\lim y = \lim \frac{lx}{\left[\frac{1}{x}\right]} = \lim \left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right] [\text{pour } x = 0] = \lim(-x)_{[x=0]} = 0.$$

2° *Soit l'expression*

$$y = \cot x - \frac{1}{x}.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = 0$.

On a alors (*Trigon.*, 29)

$$y = \infty - \infty.$$

On écrira donc (926)

$$y = \frac{1}{\frac{1}{\cot x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tang} x}{x \operatorname{tang} x},$$

et la fonction, mise sous cette forme, devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$.

Par suite (922)

$$\lim y = \lim \frac{x - \operatorname{tang} x}{x \operatorname{tang} x} = \lim \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x + \frac{x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x} [\text{pour } x = 0] = \frac{0}{0}.$$

Comme la limite de y se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut passer

aux dérivées du deuxième ordre, et l'on a

$$\lim y = \lim \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x} = \lim \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} \text{ [pour } x = 0] = 0.$$

3° *Soit l'expression*

$$y = e^x - x.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = \infty$.

On a alors

$$y = \infty - \infty,$$

et l'on peut écrire

$$y = e^x \left[1 - \frac{x}{e^x} \right].$$

Pour $x = \infty$, la fraction $\frac{x}{e^x}$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et l'on a (922)

$$\lim \frac{x}{e^x} = \lim \frac{1}{e^x} \text{ [pour } x = \infty] = 0.$$

Il en résulte

$$\lim y = \lim e^x \lim \left[1 - \frac{x}{e^x} \right] \text{ [pour } x = \infty] = \lim e^x{}_{[x=\infty]} = \infty.$$

4° *Soit l'expression*

(1) $$y = x^x.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = 0$.

On a alors

$$y = 0^0.$$

Nous prendrons donc (927) les logarithmes népériens des deux membres de l'égalité (1), et il viendra

$$ly = x lx.$$

Mais, pour $x = 0$, on a, d'après le premier exemple traité (1°),

$$\lim x lx = 0.$$

On a donc aussi

$$\lim ly = 0,$$

c'est-à-dire, pour $x = 0$,

$$\lim y = 1,$$

comme au n° 670.

5° *Soit l'expression*

(1) $$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = \infty$.

On a alors

$$y = \infty^0.$$

Nous prendrons donc (927) les logarithmes des deux membres de l'égalité (1), et il viendra

$$\log y = \frac{1}{x}\log x.$$

Pour $x = \infty$, $\log y$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On peut donc poser (922,798)

$$\lim \log y = \lim \frac{\log x}{x} = \lim \frac{\log e}{x} \text{ [pour } x = \infty\text{]} = 0.$$

On a, par conséquent, pour $x = \infty$,

$$\lim y = 1,$$

comme au n° 639.

On voit, en même temps, que la vraie valeur de la fonction $\frac{\log x}{x}$ pour $x = \infty$, est égale à zéro, comme on l'a déjà trouvé au n° 668.

6° *Soit l'expression*

$$y = \sqrt[x^2]{\cos x}.$$

On demande la véritable valeur de la fonction pour $x = 0$.

Pour $x = 0$, la fonction devient

$$y = \sqrt[0]{1};$$

mais on peut l'écrire

$$y = \cos^{\frac{1}{x^2}} x, \tag{1}$$

et, pour $x = 0$, la fonction se présente alors sous la forme

$$y = 1^{\infty}.$$

En prenant les logarithmes népériens des deux membres de l'égalité (1) (927), on

$$ly = \frac{1}{x^2} l\cos x,$$

et la question est ramenée à trouver la limite de ly pour $x = 0$. Comme on trouve pour cette valeur de x,

$$\frac{l\cos x}{x^2} = \frac{0}{0},$$

on a (922)

$$\lim \frac{l\cos x}{x^2} = \lim \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} \text{ [pour } x = 0\text{]}$$

$$= \lim \left[-\frac{\sin x}{x} \frac{1}{2\cos x} \right] \text{ [pour } x = 0\text{]} = -\frac{1}{2}.$$

Si la limite de ly, pour $x = 0$, est $-\frac{1}{2}$, on a

$$\lim y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Cas particuliers.

929. Il peut arriver que le rapport des dérivées se présente *toujours* sous forme indéterminée, à quelque ordre de dérivation qu'on parvienne, et que la règle ordinaire (922) demeure, par conséquent, impuissante. C'est ce qui aura lieu, notamment, lorsqu'il s'agira d'un rapport de radicaux.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = \frac{\sqrt[m]{x-a}}{\sqrt[p]{x^2-a^2}},$$

dont on veut trouver la véritable valeur pour $x = a$. La fonction se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$.

On a donc (922)

$$y = \lim \frac{\sqrt[m]{x-a}}{\sqrt[p]{x^2-a^2}} = \lim \frac{\frac{1}{m\sqrt[m]{(x-a)^{m-1}}}}{\frac{2x}{p\sqrt[p]{(x^2-a^2)^{p-1}}}}$$

$$= \lim \frac{p\sqrt[p]{(x^2-a^2)^{p-1}}}{2mx\sqrt[m]{(x-a)^{m-1}}} [\text{pour } x=a] = \frac{0}{0};$$

et, en continuant d'appliquer la règle habituelle (922), il est évident qu'on trouvera toujours le même symbole d'indétermination, puisque les radicaux ne disparaîtront pas.

Mais, si l'on cherche d'abord à simplifier l'expression de la fonction en la mettant sous la forme

$$y = \frac{(x-a)^{\frac{1}{m}}}{(x-a)^{\frac{1}{p}}(x+a)^{\frac{1}{p}}} = \frac{(x-a)^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}}}{(x+a)^{\frac{1}{p}}},$$

on voit immédiatement que la limite de y est zéro ou l'infini, suivant que p est plus grand ou plus petit que m.

930. Certaines fonctions deviennent *indéterminées* d'une manière complète, pour des valeurs spéciales de la variable, de sorte que la règle de l'Hospital (922) est encore en défaut si l'on parvient, en l'appliquant successivement, à une fonction de cette nature.

Il faut alors avoir recours aux artifices que peut suggérer l'habitude du calcul.

Soit, par exemple, la fonction

$$(1) \qquad y = \frac{x + \cos x}{x - \sin x}.$$

Pour $x = \infty$, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, bien qu'on ne puisse assigner alors aucune valeur à $\cos x$ et à $\sin x$, qui demeurent, évidemment, complètement indéterminés. Tout ce que l'on sait, c'est que, pour $x = \infty$, $\cos x$ et $\sin x$ restent toujours compris entre -1 et $+1$.

Si l'on applique la règle (922) à l'égalité (1), il vient

$$\lim y = \lim \frac{x + \cos x}{x - \sin x} = \lim \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} \quad [\text{pour } x = \infty],$$

et, d'après ce que l'on vient de dire, on se trouve en face d'un rapport absolument indéterminé, sans que ce rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Il faut, dans ce cas, reprendre directement l'expression (1) et la traiter par le procédé élémentaire, en divisant son numérateur et son dénominateur par x, avant de faire $x = \infty$ (*Alg. élém.*, 119). On a ainsi

$$y = \frac{1 + \dfrac{\cos x}{x}}{1 - \dfrac{\sin x}{x}};$$

et, comme $\sin x$ et $\cos x$ ne peuvent pas surpasser 1 en valeur absolue, on trouve immédiatement, en faisant $x = \infty$,

$$\lim y_{(x=\infty)} = 1.$$

Fonctions implicites.

931. Soit la fonction implicite

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Nous avons trouvé (836), en égalant à zéro la dérivée du premier membre,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Il peut arriver que, pour certaines valeurs conjuguées de x et de y, les deux dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ de la fonction f s'annulent à la fois. La dérivée $\frac{dy}{dx}$ se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$.

Le moyen le plus simple de lever cette indétermination consiste à dériver une seconde fois l'équation (2), en regardant dx comme une constante, mais non dy. On a ainsi (880)

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Mais, pour les valeurs attribuées à x et à y, le coefficient de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nul. On trouvera donc la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de l'équation du second degré

$$\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

dans le premier membre de laquelle on devra, bien entendu, substituer les valeurs spéciales attribuées à x et à y.

932. Soit, par exemple, l'équation

$$y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^5 = 0,$$

qui représente la courbe connue sous le nom de *courbe du diable* (*voir* t. V), dont l'origine des coordonnées est un *point multiple*.

Cherchons la véritable valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ pour $x = 0$ et $y = 0$. Nous aurons, dans cette hypothèse,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{4x^3 - 200x}{4y^3 - 192y} = \frac{0}{0}.$$

Appliquons alors l'équation (3) du numéro précédent. Il viendra, le coefficient du second terme de cette équation s'annulant de lui-même,

$$(12y^2 - 192)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 200 - 12x^2 = 0.$$

On en déduit, en faisant dans le premier membre de cette équation x et y égaux à 0 et en divisant par 8,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{25}{24}}.$$

On obtiendra ainsi (748) les inclinaisons sur l'axe des x des deux tangentes à la courbe en son point multiple.

CHAPITRE XVI.

VARIATION DES FONCTIONS. THÉORIE DES MAXIMUMS ET DES MINIMUMS (1).

Croissance ou décroissance d'une fonction d'une seule variable.

933. Nous commencerons par rappeler l'expression qui nous a conduit à la définition de la différentielle d'une fonction $y = f(x)$.

Cette expression est (758)

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Supposons que, pour une valeur donnée de x, $f'(x)$ ait une valeur finie et bien déterminée, différente de zéro.

Si l'on fait alors tendre Δx vers zéro en le prenant pour infiniment petit principal, α tendra aussi vers zéro, et le produit $\alpha \Delta x$ disparaîtra devant $f'(x)\Delta x$ comme infiniment petit d'ordre supérieur (723, 2°). Il en résulte que Δy aura le signe du produit $f'(x)\Delta x$ ou le signe de $f'(x)$, *si l'on convient de prendre l'accroissement* Δx *positif.*

Par suite, si la dérivée $f'(x)$ est positive, l'accroissement Δy est aussi positif, c'est-à-dire que la fonction va en croissant. Si la dérivée $f'(x)$ est négative, l'accroissement Δy est aussi négatif, c'est-à-dire que la fonction va en décroissant.

En général, *une fonction* $y = f(x)$ *croît ou décroît, à partir*

(1) D'après le Dictionnaire de l'Académie, les mots *maximum* et *minimum* sont des substantifs masculins. Nous croyons qu'il ne faut pas les décliner comme en latin, et qu'on doit les employer de la même manière que les mots *pensum*, *factum*, *factotum*, etc. Nous ne dirons donc pas des *maxima* et des *minima*, bien que ces locutions aient été souvent adoptées par d'illustres auteurs, que nous sommes loin d'ailleurs de critiquer.

d'une valeur déterminée de x, suivant que sa dérivée est, pour cette même valeur de x, positive ou négative. La réciproque est vraie (*Géom.*, 40).

Si $f'(x)$ s'annulait pour la valeur choisie de x, l'égalité (1) deviendrait $\Delta y = \alpha \Delta x$. L'accroissement de la fonction se réduirait donc à un infiniment petit d'ordre supérieur et, sauf cet infiniment petit, on pourrait regarder la fonction comme *stationnaire* dans un intervalle infiniment petit comprenant la valeur considérée de x.

934. L'interprétation géométrique de la dérivée (748) concorde avec ce qui précède.

Si l'on construit la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ (*fig.* 5), l'ordonnée y croît évidemment, en général, à partir d'une valeur de x, pour laquelle on a $f'(x) > 0$; cette ordonnée décroît, au contraire, si l'on a $f'(x) < 0$. Si l'on a $f'(x) = 0$, la tangente à la courbe au point considéré est parallèle à l'axe des x, et l'on peut regarder l'ordonnée y comme stationnaire dans un intervalle infiniment petit.

935. *Si la fonction $y = f(x)$ admet dans un intervalle (x_0, X) une dérivée $f'(x)$ et que, dans cet intervalle, cette dérivée ne soit ni constamment nulle pour les valeurs de x comprises dans un certain intervalle renfermé dans le premier, ni négative, la fonction est constamment croissante dans l'intervalle (x_0, X).*

En désignant par x_1 une certaine valeur de x comprise dans l'intervalle (x_0, X) et par x_m, x_p, deux valeurs *quelconques* de x appartenant au même intervalle et comprenant x_1, on a, en effet (847),

$$(1) \qquad f(x_p) - f(x_m) = (x_p - x_m) f'(x_1).$$

La quantité $f'(x_1)$ étant, par hypothèse, positive ou nulle sans changer de signe, on a, en supposant $x_p > x_m$,

$$f(x_m) \leqq f(x_p).$$

Mais, dans l'intervalle (x_m, x_p), la fonction $f(x)$ ne peut être constante, puisque $f'(x)$ n'est pas constamment nulle. Il existe donc une valeur x_n comprise entre x_m et x_p, telle que $f(x_n)$ diffère *au moins* de l'une des quantités $f(x_m)$ et

$f(x_p)$. Par suite, on a, en même temps et nécessairement (933),

$$x_m < x_n < x_p,$$
$$f(x_m) \leqq f(x_n) \leqq f(x_p).$$

D'ailleurs, si $f(x_n) = f(x_m)$, il diffère de $f(x_p)$, et si $f(x_n) = f(x_p)$, il diffère de $f(x_m)$. On a donc forcément

$$f(x_m) < f(x_p),$$

et la fonction $f(x)$ est constamment croissante dans l'intervalle (x_0, X).

On démontrera de même que, *si la fonction* $y = f(x)$ *admet dans un intervalle* (x_0, X) *une dérivée* $f'(x)$, *qui ne soit ni constamment nulle pour les valeurs de* x *comprises dans un certain intervalle renfermé dans le premier, ni positive, la fonction est constamment décroissante dans l'intervalle* (x_0, X).

Maximums et minimums des fonctions d'une seule variable.

936. La question des maximums et des minimums se pose nécessairement pour les fonctions finies et continues, soumises à des oscillations limitées (591, 604).

Nous avons déjà défini (*Algèbre élémentaire*, 286) ce qu'on doit entendre par le maximum et le minimum d'une grandeur variable.

Lorsqu'une variable continue, après avoir augmenté d'une manière continue dans un certain intervalle, diminue ensuite de la même manière, elle atteint nécessairement une valeur *plus grande* que celles qui précèdent et qui suivent immédiatement, c'est-à-dire qu'elle passe par un *maximum*.

Lorsque la grandeur variable considérée, après avoir diminué au contraire d'une manière continue dans un certain intervalle, augmente ensuite de la même manière, elle atteint nécessairement une valeur *plus petite* que celles qui précèdent et qui suivent immédiatement, c'est-à-dire qu'elle passe par un *minimum*.

D'après cela, soient $y = f(x)$ une fonction de la variable x et x_0 une valeur particulière de x. Désignons par h une quantité positive, d'ailleurs aussi petite que l'on voudra et pouvant varier de 0 à ε.

Si l'on a, constamment et à la fois,

$$f(x_0) > f(x_0 - h) \qquad \text{et} \qquad f(x_0) > f(x_0 + h),$$

pendant que h parcourt l'intervalle $(0, \varepsilon)$ ou que x parcourt l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, la fonction y atteint un *maximum* quand la variable x passe par la valeur x_0, et $f(x_0)$ est un *maximum* de y.

Si l'on a, au contraire, constamment et à la fois,

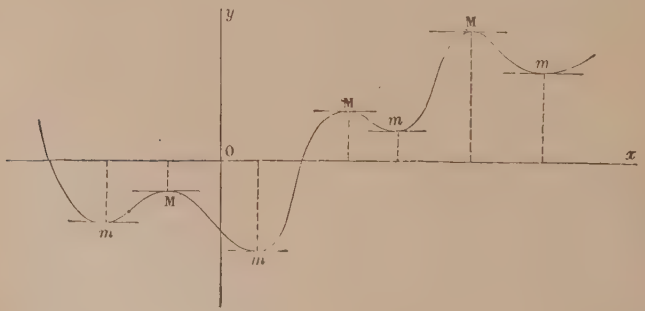
$$f(x_0) < f(x_0 - h) \qquad \text{et} \qquad f(x_0) < f(x_0 + h),$$

dans les mêmes circonstances, la fonction y atteint un *minimum* quand la variable x passe par la valeur x_0, et $f(x_0)$ est un *minimum* de y.

937. Une fonction peut évidemment présenter plusieurs maximums et plusieurs minimums qui devront, d'après ce que l'on vient de dire (936), se succéder alternativement. Il en résulte qu'un maximum peut être moindre qu'un minimum qui ne le précède ni ne le suit immédiatement.

Quand on fait abstraction de leurs signes, un maximum négatif devient un minimum absolu, et un minimum négatif devient au contraire un maximum absolu.

Fig. 12.



La *fig.* 12, qui est censée représenter graphiquement la fonction $y = f(x)$ et où les maximums correspondent à la lettre M et les minimums à la lettre m, rend ces remarques évidentes, ainsi que celles faites aux nos 933, 934, 935, 936.

938. Lorsque l'on fait croître x dans un certain intervalle, la fonction $y = f(x)$ croît continuellement si sa dérivée $f'(x)$

reste constamment positive; elle décroît continuellement, si sa dérivée $f'(x)$ reste constamment négative (935).

Par conséquent, *la fonction $y=f(x)$ ne peut atteindre aucun maximum ni aucun minimum, tant que, x croissant, la dérivée $f'(x)$ conserve le même signe.*

Mais, si cette dérivée $f'(x)$ *change de signe* lorsque x atteint et franchit une certaine valeur x_0, la fonction $y=f(x)$ passe nécessairement par un maximum ou par un minimum $f(x_0)$.

Si $f'(x)$ passe ainsi *du positif au négatif,* la fonction $y=f(x)$ diminue après avoir augmenté, et $f(x_0)$ est un *maximum* de la fonction.

Si $f'(x)$ passe, au contraire, *du négatif au positif,* la fonction $y=f(x)$ augmente après avoir diminué, et $f(x_0)$ est un *minimum* de la fonction.

D'ailleurs, $f'(x)$ ne peut changer de signe qu'*en s'annulant,* si cette fonction dérivée reste finie et continue, ou bien encore en devenant *discontinue* ou *infinie* (*Algèbre élémentaire,* 318 et suivants.)

On arrive donc à ce premier théorème : *Les valeurs de x qui conduisent aux maximums et aux minimums de la fonction $y=f(x)$ doivent être cherchées uniquement parmi celles qui annulent la dérivée $f'(x)$ ou qui la rendent discontinue ou infinie,* EN LA FAISANT CHANGER DE SIGNE.

939. Le plus souvent, les maximums et les minimums de la fonction répondent aux valeurs de x, pour lesquelles $f'(x)$ change de signe en s'annulant et en restant finie et continue, c'est-à-dire aux racines réelles de *l'équation dérivée*

$$f'(x)=0.$$

On distingue alors les maximums et les minimums à l'aide du caractère déjà indiqué (938).

La fonction atteint un maximum lorsqu'elle diminue après avoir augmenté, c'est-à-dire lorsque $f'(x)$ passe du positif au négatif; la fonction atteint un minimum lorsqu'elle augmente après avoir diminué, c'est-à-dire lorsque $f'(x)$ passe du négatif au positif.

Mais, si $f'(x)$ passe du positif au négatif, $f'(x)$ décroît, et sa dérivée $f''(x)$ est négative; si $f'(x)$ passe du négatif au positif, $f'(x)$ croît, et sa dérivée $f''(x)$ est positive (935).

On peut donc dire encore que *le double caractère du maximum est*

$$f'(x) = 0, \quad \text{en même temps que} \quad f''(x) < 0,$$

et que le *double caractère du minimum est*

$$f'(x) = 0, \quad \text{en même temps que} \quad f''(x) > 0.$$

La première règle (938) est souvent plus simple à appliquer.

940. L'emploi de la série de Taylor, lorsqu'il est permis, fait retrouver les mêmes résultats, et conduit ensuite à une généralisation nécessaire.

Si l'on se borne aux deux premiers termes de la série (893), on peut écrire, pour la valeur spéciale $x = x_0$,

$$(1) \qquad F(x_0 + h) - F(x_0) = h F'(x_0 + \theta h).$$

θ étant compris entre 0 et 1 et h étant supposé infiniment petit, $F'(x_0 + \theta h)$ diffère infiniment peu de $F'(x_0)$, en raison de la continuité supposée de la fonction dérivée $F'(x)$. *Si* $F'(x_0)$ *n'est pas nulle*, $F'(x_0 + \theta h)$ a donc le même signe que $F'(x_0)$, quel que soit le signe de h. Il en résulte que le second membre de la relation (1) et, par suite, son premier membre, change de signe en même temps que h.

Si $F'(x_0)$ a une valeur positive, on a alors

$$F(x_0 - h) < F(x_0) < F(x_0 + h);$$

et, si $F'(x_0)$ a une valeur négative, on a

$$F(x_0 - h) > F(x_0) > F(x_0 + h).$$

La fonction $F(x)$ est, par conséquent, constamment croissante ou décroissante entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, et $x = x_0$ ne peut correspondre à aucun maximum ni à aucun minimum.

Pour que $x = x_0$ puisse correspondre à un maximum ou à un minimum de la fonction, il faut qu'on ait, comme précédemment,

$$F'(x_0) = 0.$$

Mais, dans cette hypothèse, la série de Taylor, réduite à ses trois premiers termes, devient

$$(2) \qquad F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} F''(x_0 + \theta h).$$

Et l'on voit, par le même raisonnement, que, *si* $F''(x_0)$ *n'est pas nulle*, le second membre de la relation (2) et, par suite, son premier membre, ne change plus de signe en même temps que h et conserve, dans l'intervalle considéré, le signe de $F''(x_0)$.

Si la dérivée seconde $F''(x_0)$ est *négative*, $F(x_0)$ surpasse à la fois $F(x_0-h)$ et $F(x_0+h)$, de sorte que $F(x_0)$ est un *maximum* de la fonction.

Si la dérivée seconde $F''(x_0)$ est *positive*, $F(x_0)$ est moindre à la fois que $F(x_0-h)$ et que $F(x_0+h)$, de sorte que $F(x_0)$ est un *minimum* de la fonction.

On retombe ainsi sur les résultats des nos 938 et 939. On voit, de plus, que, si l'on avait, en même temps, $F'(x_0)=0$ et $F''(x_0)=0$, on ne pourrait rien décider. Il faut donc compléter le premier théorème obtenu, de la manière suivante.

941. Considérons la série de Taylor, sans limiter le nombre des termes du second membre. Nous aurons (889, 890), toujours pour $x=x_0$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x_0+h)-F(x_0)\\ &\quad=\frac{h}{1}F'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}F''(x_0)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x_0)+\dots\\ &\qquad+\frac{h^n}{1.2.3\dots n}F^n(x_0)+\frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}F^{n+1}(x_0+\theta h). \end{aligned}\right.$$

Supposons que la valeur $x=x_0$ annule les n premières dérivées de $F(x)$, sans annuler la $(n+1)^{\text{ième}}$. La formule (1) se réduira à

$$(2)\quad F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}F^{n+1}(x_0+\theta h).$$

Puisque $F^{n+1}(x_0)$ n'est pas nul, $F^{n+1}(x_0+\theta h)$, qui en diffère infiniment peu en raison de la continuité supposée de $F^{n+1}(x)$ dans l'intervalle étudié, sera de même signe que $F^{n+1}(x_0)$, quel que soit le signe de h.

Cela posé, *si* $n+1$ *est impair*, h^{n+1} changera de signe en même temps que h, et il en sera de même du premier membre de la relation (2), de sorte que, pour $x=x_0$, $F(x)$ *n'atteindra aucun maximum ni aucun minimum.*

Si, au contraire, $n+1$ *est pair*, h^{n+1} ne changera pas de

signe en même temps que h et demeurera positif. Le premier membre de la relation (2) conservera donc le signe de $F^{n+1}(x_0)$, que h soit négatif ou positif. Et, par conséquent, $F(x_0)$ *sera un maximum de* $F(x)$ *si l'on a* $F^{n+1}(x_0) < 0$ *et, un minimum, si l'on a* $F^{n+1}(x_0) > 0$.

Nous résumerons ce qui précède dans l'énoncé suivant :

En général, *si une valeur* x_0 *de la variable* x *annule les* n *premières dérivées de la fonction* $F(x)$ *sans annuler la* $(n+1)^{ième}$, *cette valeur* x_0 *ne fait atteindre à la fonction ni maximum ni minimum lorsque* $n+1$ *est un nombre impair, tandis que, si* $n+1$ *est un nombre pair,* $F(x_0)$ *est un maximum ou un minimum de* $F(x)$, *suivant que* $F^{n+1}(x_0)$ *a une valeur négative ou positive.*

Ainsi, il faut que la première dérivée qui ne s'annule pas soit d'*ordre pair* pour qu'il y ait maximum ou minimum.

942. Il n'est pas inutile de remarquer que la fonction proposée étant $y = F(x)$, on peut mettre la série de Taylor sous la forme (894)

$$F(x+h) - F(x) = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}d^{n+1}y + \ldots.$$

On peut donc dire encore que, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il est nécessaire que la valeur $x = x_0$ annule un nombre impair de différentielles successives dy, d^2y, d^3y, ..., et qu'il y a maximum ou minimum, suivant que la première différentielle d'ordre pair qui subsiste est, pour $x = x_0$, négative ou positive.

Applications.

943. Nous commencerons par retrouver quelques résultats déjà obtenus en Algèbre élémentaire.

I. *Chercher le maximum de la fonction*

$$y = f(x) = x(a-x).$$

On a ici

$$f'(x) = a - 2x.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = \frac{a}{2}$. Elle est positive pour une valeur

de x un peu plus petite et, négative, pour une valeur de x un peu plus grande. Elle passe donc du positif au négatif, quand x croît en traversant la valeur $\frac{a}{2}$. Cette valeur $\frac{a}{2}$ répond donc à un maximum de $f(x)$, et ce maximum, $f\left(\frac{a}{2}\right)$, est égal à $\frac{a^2}{4}$.

II. *a étant une constante positive donnée et p et q étant des entiers positifs, chercher les maximums et les minimums de la fonction*

$$y = f(x) = x^p(a-x)^q.$$

La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = px^{p-1}(a-x)^q - qx^p(a-x)^{q-1}.$$

En l'égalant à zéro et en mettant $x^{p-1}(a-x)^{q-1}$ en facteur, on obtient l'équation

$$x^{p-1}(a-x)^{q-1}[pa-(p+q)x] = 0.$$

Elle se partage immédiatement en trois autres

$$x = 0, \qquad a-x = 0, \qquad pa-(p+q)x = 0,$$

qui donnent

$$x = 0, \qquad x = a, \qquad x = \frac{pa}{p+q} \qquad \text{et} \qquad a-x = \frac{qa}{p+q}.$$

Les deux valeurs $x = 0$ et $x = a$ répondent à $f(x) = 0$.

Pour une valeur de x un peu moindre que 0, c'est-à-dire négative, $f'(x)$ a une valeur négative si $p > 1$ est pair, et cette fonction dérivée a une valeur positive pour une valeur de x un peu plus grande que 0, c'est-à-dire positive. La dérivée passe ainsi du négatif au positif, ce qui est le caractère d'un minimum.

En donnant à x une valeur un peu moindre que a, puis une valeur un peu plus grande, on arrive à un résultat analogue, si $q > 1$ est pair.

$f(x)$ passe donc par un minimum pour $x = 0$, quand p est pair et, pour $x = a$, quand q est pair, et ce minimum est 0.

Enfin, pour une valeur de x un peu moindre que $\frac{pa}{p+q}$, la dérivée $f'(x)$ est positive, et elle devient négative pour une valeur de x un peu plus grande que $\frac{pa}{p+q}$. Elle passe ainsi du positif au négatif, ce qui est le caractère d'un maximum.

$f(x)$ passe donc par un maximum pour

$$x = \frac{pa}{p+q} \qquad \text{et pour} \qquad a-x = \frac{qa}{p+q}.$$

Les deux facteurs x et $a - x$ sont alors proportionnels à leurs exposants respectifs p et q et, pour obtenir leurs valeurs, il suffit de partager leur somme a proportionnellement à ces exposants (*Alg. élém.*, 297).

Le maximum de $F(x)$ est alors

$$p^p q^q \left(\frac{a}{p+q}\right)^{p+q}.$$

III. *Chercher le maximum et le minimum de la fonction rationnelle* (*Alg. élém.*, 315 et suiv.)

$$(1) \qquad y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Nous aurons, pour la dérivée de la fonction, en simplifiant et en ordonnant,

$$(2) \qquad f'(x) = \frac{(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb')}{(a'x^2 + b'x + c')^2}.$$

Les valeurs de x qui annulent $f'(x)$ annulent aussi le numérateur de l'expression (2). Nous poserons donc

$$(3) \qquad (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0.$$

Il faut, bien entendu, que les racines de cette équation n'annulent pas en même temps le dénominateur de l'expression (3).

Nous devons considérer en outre les valeurs de x qui rendent ce dénominateur infini, sans faire prendre une valeur analogue au numérateur. Or, pour $x = \pm\infty$, $f'(x)$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Mais cette indétermination répond en réalité à la valeur zéro, puisque le degré du numérateur de l'expression (2) est inférieur à celui du dénominateur (923, 5°). Nous mettrons donc à part cette valeur particulière $x = \pm\infty$ qui annule $f'(x)$ sans correspondre à un maximum ou à un minimum.

Revenons à l'équation (3). Si l'on désigne par x_1 et x_2 les racines de cette équation, elles feront connaître respectivement un maximum et un minimum de $f(x)$, qui auront pour expressions $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Pour décider entre le maximum et le minimum, il restera à déterminer les signes pris par $f'(x)$ pour des valeurs de x un peu plus petites et un peu plus grandes que x_1 et que x_2.

Cette méthode est, au fond, identique à la méthode élémentaire. Nous allons l'appliquer à l'exemple numérique déjà traité (*Alg. élém.*, 320), c'est-à-dire à la fonction

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Nous en déduirons

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

On voit que $f'(x)$ s'annule pour $x = -2$ et pour $x = 0$.

Lorsque x atteint, en croissant depuis $-\infty$, la valeur -2 et la dépasse, $f'(x)$, positive jusque-là, devient négative. $x=-2$ répond donc à un maximum de $f(x)$, qui est $f(-2)=\frac{5}{3}$.

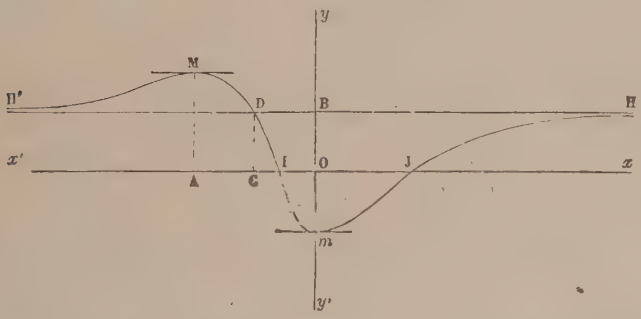
Lorsque x atteint, en croissant toujours, la valeur 0 et la dépasse, $f'(x)$, négative depuis $x=-2$, redevient positive. $x=0$ répond donc à un minimum de $f(x)$, qui est $f(0)=-1$.

Pour montrer combien l'emploi de la dérivée simplifie les discussions de cette espèce, construisons la courbe représentative de la fonction (*fig.* 13).

Pour $x=\mp\infty$, on a évidemment (923, 5°) $y=1$. La droite H'H menée parallèlement à l'axe des x, à la distance OB $=1$, est donc une asymptote de la courbe.

Pour des valeurs négatives de x, très grandes en valeur absolue et

Fig. 13.



jusqu'à $x=-2$, la dérivée $f'(x)$ est positive. La fonction y va donc en croissant constamment (935), et la courbe commence par s'élever au-dessus de son asymptote. Elle atteint ainsi son point maximum M, qui répond à $x=\text{OA}=-2$ et dont l'ordonnée $\text{MA}=\frac{5}{3}$. Au delà, la dérivée $f'(x)$ devient négative et le demeure tant que x reste négative. y diminue donc, et la courbe descend vers l'axe des x. Comme on a $y=1$ pour

$$x^2-x-1=x^2+x+1,$$

c'est-à-dire pour $x=\text{OC}=-1$, elle coupe son asymptote au point correspondant D. Elle la rencontre aussi à l'infini, puisque, le coefficient du terme en x^2 dans l'équation précédente étant égal à zéro, cette équation admet encore pour racine $x=\pm\infty$ (*Alg. élem.*, 241). Comme $x=\pm\infty$ rend $f'(x)=0$, l'asymptote H'H est, en réalité, une tangente à la courbe à l'infini et dans les deux sens.

La courbe continue à descendre au delà du point D, jusqu'à ce

qu'elle parvienne à son point minimum m, qui répond à $x = 0$ et à $y = 0m = -1$.

Après ce point minimum, x devenant positive, la dérivée $f'(x)$ redevient elle-même positive, et la fonction recommence à croître indéfiniment, puisque sa dérivée ne change plus de signe.

La courbe, en descendant après son point maximum et en remontant après son point minimum, coupe nécessairement deux fois l'axe des x.

On a, en effet, pour $y = 0$,

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Les points où la courbe traverse l'axe des x ont ainsi pour abscisses

$$x = -0I = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618 \qquad \text{et} \qquad x = 0J = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618.$$

L'ordonnée y redevient positive à partir du point J; mais la courbe, en montant, ne pouvant plus rencontrer son asymptote qu'à l'infini, reste constamment au-dessous en s'en rapprochant indéfiniment dans le sens H.

944. IV. *Chercher le nombre x dont la racine x est un maximum.*

La fonction dont il faut chercher le maximum est

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}.$$

Mais les logarithmes croissant en même temps que les nombres quand la base est plus grande que 1, il revient au même de chercher le maximum de la fonction

$$f(x) = l\,x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\,lx.$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1 - lx}{x^2}.$$

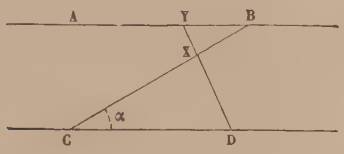
Cette dérivée s'annule pour $lx = 1$ ou pour $x = e$. En remarquant que, si l'on passe, pour x, d'une valeur plus petite que e à une valeur plus grande que e, $f'(x)$ passe du positif au négatif, on voit que $x = e$ répond à un maximum.

Par suite, la fonction proposée $x^{\frac{1}{x}}$ a pour maximum $e^{\frac{1}{e}}$.

945. V. Problème de Viviani. — *On donne les deux parallèles* AB, CD, *et la sécante* BC. *Mener par le point déterminé* D *la sécante* DXY *telle, que la somme des triangles* BXY, CXD, *soit un minimum* (*fig.* 14).

Nous poserons CD $= a$, CB $= b$, CX $= x$, et l'angle BCD $= \alpha$.

Fig. 14.



L'aire du triangle CXD a pour expression (*Trigon.*, 153)

$$\text{CXD} = \frac{1}{2} a x \sin\alpha.$$

L'aire du triangle BXY a de même pour expression

$$\text{BXY} = \frac{1}{2} (b - x)\, \text{BY} \sin\alpha.$$

La similitude de ces deux triangles donne d'ailleurs

$$\frac{\text{BY}}{\text{CD}} = \frac{\text{BX}}{\text{CX}}, \qquad \text{d'où} \qquad \text{BY} = a\,\frac{b-x}{x}.$$

Il en résulte

$$\text{BXY} = \frac{1}{2} a \frac{(b-x)^2}{x} \sin\alpha.$$

La fonction dont on a à chercher le minimum est donc

$$\frac{1}{2} a \left[x + \frac{(b-x)^2}{x} \right] \sin\alpha$$

ou, en laissant de côté le facteur constant $\frac{1}{2} a \sin\alpha$,

$$f(x) = x + \frac{(b-x)^2}{x}.$$

En égalant à zéro la dérivée $f'(x)$, on trouve

$$1 - \frac{2(b-x)x + (b-x)^2}{x^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x^2 - b^2 = 0.$$

On en déduit

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

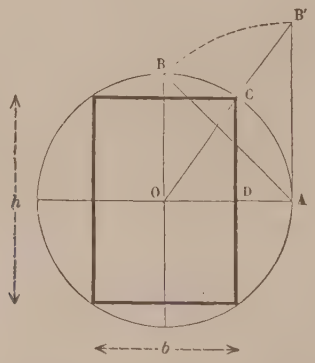
Cette valeur, qui est représentée par la moitié de la diagonale du carré construit sur b, répond bien à un minimum ; car, pour une valeur un peu plus petite de x, la dérivée $f'(x)$ est négative, et, pour une valeur un peu plus grande, elle devient positive.

Ce minimum a, d'ailleurs, pour expression

$$ab(\sqrt{2} - 1)\sin\alpha.$$

946. VI. *Étant donné un tronc d'arbre de longueur suffisante, on demande de le transformer en poutre rectangulaire présentant le maximum de résistance à la flexion* (*fig.* 15).

Fig. 15.



Supposons que le cercle O représente la section de l'arbre à l'état primitif. Soient b la base et h la hauteur de la section rectangulaire qu'on veut obtenir en enlevant les dosses. D'après la *théorie de la flexion plane des solides,* on sait que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit bh^2. C'est donc ce produit qu'on doit rendre maximum. En appelant D le diamètre de la section circulaire de l'arbre, on a

$$b^2 + h^2 = D^2 \qquad \text{ou} \qquad h^2 = D^2 - b^2,$$

et le produit bh^2 devient

$$b(D^2 - b^2).$$

En prenant la dérivée de cette expression par rapport à b et en l'égalant à o, on trouve évidemment

$$D^2 - b^2 - 2b^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2 = \frac{D^2}{3}.$$

Il en résulte

$$h^2 = \frac{2D^2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{b^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071\ldots.$$

Ce rapport s'éloigne très peu, comme on le voit, des rapports pratiques $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$ habituellement établis entre la base b et la hauteur h des poutres rectangulaires placées *sur champ*.

La construction géométrique qui permet de tracer immédiatement sur la section circulaire les traits de scie qui doivent transformer l'arbre en poutre rectangulaire de résistance maximum, est très simple. On mène (*fig.* 15) le côté AB du carré inscrit, on le reporte par un arc de cercle sur la tangente AB′, et l'on joint le point B′ obtenu au centre O. La perpendiculaire CD abaissée, du point de rencontre C de B′O avec la circonférence, sur le rayon OA, représente $\frac{h}{2}$ et OD représente $\frac{b}{2}$. On a, en effet,

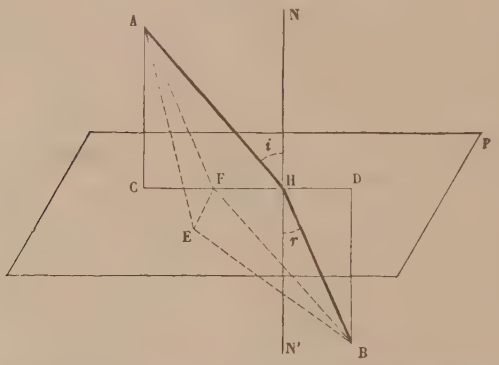
$$\frac{OD}{CD} = \frac{OA}{AB'} = \frac{OA}{OA\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

947. VII. Problème de Fermat. — *On suppose deux milieux physiques différents séparés par un plan indéfini* P *et, dans chacun de ces milieux, un point* A *et un point* B. *Un mobile, partant du point* A *et aboutissant au point* B, *se meut dans le premier milieu avec une vitesse uniforme u et, dans le second, avec une vitesse uniforme v. On demande de déterminer le chemin que doit suivre le mobile pour se rendre du point* A *au point* B *dans un temps qui soit un minimum* (*fig.* 16).

On sait que, dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru dans un temps donné est égal à la vitesse multipliée par le temps.

Il est évident, d'après cela, que, dans chaque milieu, le chemin parcouru, doit être rectiligne, puisque, les vitesses correspondantes étant constantes, les temps employés sont proportionnels aux chemins décrits. Le chemin total qu'on veut découvrir est donc une ligne brisée.

Fig. 16.



Il est facile de voir que cette ligne brisée est nécessairement dans le plan ACBD déterminé par les perpendiculaires AC et BD au plan P.

En effet, admettons que cette ligne brisée soit la ligne AEB non située dans le plan ACBD, et abaissons du point E où elle rencontre le plan P la perpendiculaire EF sur CD. Si l'on joint le point F aux points A et B, les triangles AFE, BFE, rectangles en F, montrent que le mobile parcourra le chemin AFB en moins de temps que le chemin AEB.

Supposons donc que la ligne brisée décrite par le mobile dans le temps cherché soit la ligne brisée AHB située dans le plan ACBD.

Nous poserons $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, $CH = x$. Nous aurons, par suite,

$$AH = \sqrt{a^2 + x^2},$$

et le temps employé à parcourir AH sera exprimé par

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}.$$

De même, nous aurons

$$HB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

et le temps employé à parcourir HB sera exprimé par

$$\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}.$$

La fonction dont on doit trouver le minimum est donc

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}.$$

En égalant à zéro la dérivée de cette fonction et en simplifiant, on a évidemment

$$(1)\qquad f'(x)=\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0.$$

Pour résoudre cette équation, il faut la mettre sous la forme

$$(2)\qquad \frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

et élever ses deux membres au carré. En chassant les dénominateurs, on obtient ensuite l'équation complète du quatrième degré

$$(u^2-v^2)x^4-2c(u^2-v^2)x^3$$
$$+[(a^2+c^2)u^2-(b^2+c^2)v^2]x^2-2ca^2u^2x+a^2c^2u^2=0,$$

qui est l'équation du problème.

Au lieu de chercher à la résoudre, menons par le point H la normale NN′ au plan P. Désignons par i l'angle *d'incidence* AHN et, par r, l'angle *de réfraction* BHN′. La figure donne alors

$$\sin\mathrm{CAH}=\sin i=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\sin\mathrm{DBH}=\sin r=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BH}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

L'équation (2) revient donc à

$$(3)\qquad \frac{\sin i}{u}=\frac{\sin r}{v}\qquad \text{ou à}\qquad \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u}{v}$$

et *telle est la condition du minimum.*

Il s'agit bien d'un minimum; car, en se reportant à l'équa-

tion (1), on voit immédiatement que, pour une valeur de x plus petite que celle qui répond à la condition exprimée par la relation (3), $\sin i$ diminue en même temps que $\sin r$ augmente, tandis que l'inverse se produit pour une valeur plus grande de x; $f'(x)$ passe donc du négatif au positif en traversant zéro.

Il peut être intéressant de rapprocher cette solution des ***lois de la réfraction de la Lumière.***

Maximums et minimums des fonctions implicites d'une seule variable.

948. Nous considérerons d'abord la fonction implicite

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

où y est une fonction de la variable x. En différentiant l'équation (1), on trouve (836), en divisant par dx,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

La condition du maximum ou du minimum étant, dans le cas le plus habituel (938),

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

l'équation (2) se réduit à

$$\frac{df}{dx} = 0. \tag{3}$$

En combinant les équations (1) et (3), on obtiendra donc, en général, les valeurs de x qui répondent aux maximums ou aux minimums de la fonction y.

949. Remarquons que l'on a, d'après l'équation (2),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Il en résulte que, si les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ s'an-

nulaient simultanément pour des valeurs de x et de y satisfaisant à l'équation (1) (948), les équations (2) et (3) se trouveraient à leur tour satisfaites, sans qu'on eût pour cela $\frac{dy}{dx} = 0$, et les valeurs correspondantes de x ne répondraient plus, en général, à la question.

950. Pour distinguer un maximum d'un minimum, il faut recourir aux dérivées d'ordre supérieur.

En différentiant l'équation (2) et en divisant par dx, on trouve (880)

$$(2\,bis)\qquad \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $\frac{dy}{dx}$ est supposée égale à zéro,

$$(4)\qquad \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{df}{dy}}.$$

Le signe de cette seconde dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$, pour les valeurs de x et de y qu'on étudie, tranchera la question. Le minimum de y répondra à $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ et le maximum, à $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (939).

Il est entendu que les quantités $\frac{d^2f}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2f}{dy^2}$ [équation (2 *bis*)] ne s'annulent pas pour ces mêmes valeurs de x et de y (949).

Si l'on avait $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, il faudrait consulter les dérivées d'ordre supérieur suivant la règle du n° 941.

951. Exemple. — *Soit la fonction implicite*

$$(1)\qquad f(x, y) = y^3 - 3xy + x^3 = 0,$$

dont on demande les maximums et les minimums.

On en déduit (948)

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 3y = 0. \tag{2}$$

En combinant les équations (1) et (2) et en éliminant entre elles la fonction y, on obtient évidemment

$$x^6 - 2x^3 = x^3(x^3 - 2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = \sqrt[3]{4}.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs

$$\frac{df}{dy} = 3y^2 - 3x.$$

Le premier système de valeurs ($x = 0$, $y = 0$), annulant $\frac{df}{dy}$, doit être rejeté (949). Quant au second système

$$(x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{4}),$$

qui n'annule pas $\frac{df}{dy}$, il répond à un maximum ou à un minimum.

En formant (950) l'expression

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{6x}{3y^2 - 3x} = -\frac{2x}{y^2 - x} = -2,$$

on voit que la fonction y passe par un *maximum* pour $x = \sqrt[3]{2}$ et que ce maximum est $\sqrt[3]{4}$.

952. Passons au cas général, et admettons qu'on ait à considérer m variables $x, y, z, u, \ldots$, liées entre elles par les $m - 1$ équations

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m-1}(x, y, z, u, \ldots) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Si l'on veut trouver les valeurs maximums et minimums de l'une des variables, y par exemple, on prendra l'une quelconque, x, des autres variables comme variable indépendante. La condition d'un maximum ou d'un minimum sera alors, dans le cas ordinaire,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

D'après cela, en différentiant les équations (1), en divisant par dx et en supprimant tous les termes où entre $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dx} + \dfrac{df_1}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_1}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \dfrac{df_2}{dx} + \dfrac{df_2}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_2}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{df_{m-1}}{dx} + \dfrac{df_{m-1}}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{df_{m-1}}{du}\dfrac{du}{dx} + \ldots = 0. \end{cases}$$

En éliminant les $m-2$ quantités $\frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots$, entre les $m-1$ équations qui forment le système (2), on arrivera à une relation

$$(3)\qquad F(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

entre les m variables considérées; et cette relation, jointe aux $m-1$ équations qui forment le système (1), permettra de déterminer les valeurs de $x, y, z, u, \ldots$, qui peuvent répondre à des maximums ou à des minimums de y.

953. Si l'on avait à chercher les maximums et les minimums d'une fonction explicite de $m-1$ variables, telle que

$$(1)\qquad v = F(x, y, z, u, \ldots),$$

ces $m-1$ variables étant liées par les $m-2$ équations

$$(2)\quad \begin{cases} f_1(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m-2}(x, y, z, u, \ldots) = 0, \end{cases}$$

ce cas particulier rentrerait dans le cas général (952).

En effet, on n'aurait qu'à joindre aux $m-2$ équations (2) l'équation (1) mise sous la forme

$$v - F(x, y, z, u, \ldots) = 0.$$

On aurait ainsi, comme dans le cas précédent, m variables $v, x, y, z, u, \ldots$, liées entre elles par $m-1$ équations, avec cette unique différence que la variable v dont on veut chercher les maximums et les minimums ne se trouve que dans une seule des équations considérées.

954. Exemple. — *On donne le volume d'un cylindre de révolution, et l'on demande de déterminer ses dimensions de manière que sa surface soit un minimum.*

Résoudre cette question, c'est obtenir pratiquement une capacité donnée sous forme cylindrique, avec la moindre dépense de matière.

On peut distinguer deux cas, suivant que le cylindre est ouvert ou fermé à sa partie supérieure.

1° *Le cylindre n'a pas de couvercle.*

Nous désignerons par V le volume donné du cylindre, par S sa surface, par x le rayon de sa base et par y sa hauteur. Les deux équations du problème seront

$$(1) \qquad \begin{cases} \pi x^2 y - V = 0, \\ 2\pi xy + \pi x^2 - S = 0. \end{cases}$$

On a ainsi trois variables S, x, y, liées entre elles par les deux équations (1), et il s'agit de trouver le minimum de S en prenant, par exemple, x comme variable indépendante. La condition du minimum sera alors

$$\frac{dS}{dx} = 0.$$

Nous différentierons donc les équations (1), nous diviserons ensuite par dx et nous n'écrirons pas les termes contenant $\frac{dS}{dx}$ (952). Il viendra, en supprimant les facteurs communs π et 2π,

$$(2) \qquad \begin{cases} 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = 0, \\ y + x \frac{dy}{dx} + x = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (2), on trouve facilement

$$xy - x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x = y. \tag{3}$$

L'équation (3), jointe aux équations (1), permet de trouver les valeurs de x, de y et de S, qui répondent au minimum de S. Par suite de l'équation (3), les équations (1) deviennent

$$\pi x^3 - V = 0,$$
$$3\pi x^2 - S = 0,$$

et l'on en déduit

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, \qquad S = 3\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}. \tag{4}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum, reprenons les équations (2), en conservant dans la seconde le terme d'abord négligé $-\frac{1}{2\pi}\frac{dS}{dx}$, et différentions-les de nouveau, en divisant ensuite par dx. Nous aurons

$$2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 1 - \frac{1}{2\pi}\frac{d^2S}{dx^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$2y + 4x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$2\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 1 - \frac{1}{2\pi}\frac{d^2S}{dx^2} = 0.$$

En éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ entre ces deux équations, on trouve

$$2y - x + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2\pi}\frac{d^2S}{dx^2} = 0. \tag{5}$$

D'après la première des équations (2), on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}.$$

L'équation (5) donne donc

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi}{x}[x - 2y + 4y]$$

ou, d'après l'équation (3),

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 6\pi.$$

Cette valeur étant plus grande que zéro, les résultats précédents répondent bien à un minimum.

Ainsi, *la surface du cylindre ouvert est un minimum quand sa hauteur est égale au rayon de sa base.*

2° *Le cylindre a un couvercle.*

Les équations (1) sont ici

$$(1) \qquad \begin{cases} \pi x^2 y - V = 0, \\ 2\pi xy + 2\pi x^2 - S = 0. \end{cases}$$

En différentiant ces équations comme dans le premier cas et en supprimant le terme $\frac{dS}{dx}$ qui doit être nul pour tout maximum ou minimum, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0, \\ y + x\frac{dy}{dx} + 2x = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces équations, on trouve

$$(3) \qquad 2x = y.$$

Les équations (1) deviennent donc

$$2\pi x^3 - V = 0,$$
$$4\pi x^2 + 2\pi x^2 - S = 0,$$

et l'on en déduit

$$(4) \qquad x = \frac{y}{2} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad S = 6\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

En rétablissant dans la seconde des équations (2) le terme

d'abord supprimé $-\frac{1}{2\pi}\frac{dS}{dx}$, en différentiant ensuite ces équations et en éliminant entre les résultats obtenus $\frac{d^2y}{dx^2}$, on trouve finalement

$$2y - 2x + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2\pi}\frac{d^2S}{dx^2} = 0. \tag{5}$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur tirée de la première des équations (2), on a donc

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi}{x}[2x - 2y + 4y],$$

relation qui devient, d'après l'équation (3),

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 12\pi.$$

C'est donc encore à un minimum que conduisent les résultats précédents.

Ainsi, *la surface du cylindre fermé est un minimum, quand sa hauteur est égale au diamètre de sa base.*

Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

955. Supposons une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ..., que nous représenterons par

$$v = F(x, y, z, \ldots).$$

Soient x_0, y_0, z_0, ..., des valeurs particulières de x, y, z, ... Désignons par h, k, l, ..., des quantités aussi petites qu'on voudra en valeur absolue, et pouvant varier de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, en représentant par ε une quantité positive aussi petite qu'on voudra.

Si l'on a constamment

$$F(x_0, y_0, z_0, \ldots) > F(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots),$$

pendant que les accroissements h, k, l, ... parcourent l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ ou que x, y, z, ... parcourent les inter-

valles $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, $(z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)$, ..., la fonction v atteint un *maximum*, quand les variables x, y, z, ..., passent par les valeurs spéciales x_0, y_0, z_0, ..., et $F(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ est ce maximum de v.

Si l'on a, au contraire, constamment

$$F(x_0, y_0, z_0, \ldots) < F(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \ldots),$$

dans les mêmes circonstances, la fonction v atteint un *minimum*, quand les variables x, y, z, ... passent par les valeurs spéciales x_0, y_0, z_0, ..., et $F(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ est ce minimum de v.

Il est facile de trouver la condition générale, commune aux maximums et aux minimums, en revenant, comme il suit, aux fonctions d'une seule variable.

Admettons que v ou la fonction F atteigne un maximum ou un minimum pour $x=a$, $y=b$, $z=c$, ...; on pourra, pour un instant, supposer que y, z, ... sont des constantes b, c, ..., et que x seule varie. La fonction F deviendra une fonction d'une seule variable x; et, puisque, par hypothèse, elle passe par un maximum ou par un minimum pour $x=a$, on devra avoir pour cette valeur F'_x ou $\frac{dF}{dx}$ nulle, infinie ou discontinue (938). Le plus souvent (939), la dérivée $\frac{dF}{dx}$ change de signe, en s'annulant et en restant finie et continue.

Le même raisonnement pouvant être répété pour les autres variables $y, z, \ldots$, on voit que *les valeurs de* $x, y, z, \ldots$, *qui rendent* v *ou la fonction* F *un maximum ou un minimum, doivent être cherchées parmi les valeurs qui rendent les dérivées partielles* $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \ldots$, *nulles, infinies ou discontinues ou*, le plus souvent, *parmi celles pour lesquelles ces dérivées changent de signe en s'annulant et en restant finies et continues.*

956. Lorsque ces dérivées partielles demeurent continues dans l'intervalle considéré, on peut retrouver le même résultat par la série de Taylor, et s'en servir ensuite pour distinguer entre les maximums et les minimums.

Pour plus de simplicité dans l'écriture, nous supposerons seulement trois variables indépendantes.

La série de Taylor peut s'écrire (897, 898), en n'allant pas au delà des premières puissances des accroissements,

$$F(x+h, y+k, z+l) - F(x, y, z) = \frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k + \frac{dF}{dz}l + R.$$

Pour des valeurs absolues infiniment petites de h, k, l, le reste R est négligeable devant les termes qui le précèdent, *toutes les fois que ces termes ne sont pas nuls*. Or, ces termes, dont l'ensemble détermine alors le signe du second membre et, par suite, du premier membre de la formule, changent de signes sans changer de valeurs quand on remplace h, k, l, par $-h$, $-k$, $-l$. Il en résulte que le premier membre change lui-même de signe, quand on traverse les valeurs supposées de x, y, z, et que ces valeurs ne peuvent répondre à aucun maximum ou minimum.

Pour que la fonction F puisse atteindre un maximum ou un minimum, il faut donc qu'on ait, à la fois,

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0.$$

C'est la conclusion déjà énoncée (955).

Il nous reste à chercher à quels caractères on peut reconnaître un maximum ou un minimum.

Nous considérerons successivement une fonction de deux variables et une fonction de trois variables indépendantes.

957. Cas d'une fonction de deux variables. — Soit la fonction

$$v = F(x, y).$$

En n'allant pas au delà des deuxièmes puissances des accroissements, la série de Taylor peut s'écrire

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left[\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}k^2\right] + R.$$

Supposons que x et y reçoivent des valeurs telles, que l'on ait à la fois

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Ces valeurs pourront correspondre alors à un maximum ou à un minimum de la fonction F.

Pour décider, nous remarquerons que le signe du second membre de la formule et, par suite, de son premier membre, sera, dans l'hypothèse admise, le même que celui du trinôme du second degré

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F}{dx\,dy}hk+\frac{d^2F}{dy^2}k^2. \tag{1}$$

Il faut donc, pour qu'il y ait *maximum,* que la valeur de ce trinôme reste constamment *négative,* quels que soient les signes et les valeurs absolues des accroissements h et k, pourvu que ces valeurs soient suffisamment petites; pour qu'il y ait *minimum,* il faut que la valeur de ce trinôme reste, dans les mêmes conditions, constamment *positive* (955).

Pour n'avoir qu'une variable, nous poserons $k=\rho h$, en désignant par ρ le rapport algébrique, d'ailleurs arbitraire, établi entre k et h. Le trinôme (1) pourra alors s'écrire, en faisant abstraction du facteur h^2 toujours positif et en renversant l'ordre des termes,

$$\frac{d^2F}{dy^2}\rho^2+2\frac{d^2F}{dx\,dy}\rho+\frac{d^2F}{dx^2}. \tag{2}$$

Or ce trinôme, du second degré par rapport à ρ, n'aura que des valeurs négatives, si le coefficient de son premier terme est négatif et si, lorsqu'on l'égale lui-même à zéro, les racines de l'équation correspondante sont imaginaires (*Alg. élém.*, 252).

Les conditions du maximum sont donc (*Alg. élém.*, 237)

$$\frac{d^2F}{dy^2}<0, \qquad \left[\frac{d^2F}{dx\,dy}\right]^2-\frac{d^2F}{dy^2}\frac{d^2F}{dx^2}<0.$$

Le même trinôme (2) n'aura que des valeurs positives, si le coefficient de son premier terme est positif et si, lorsqu'on l'égale lui-même à zéro, les racines de l'équation correspondante sont encore imaginaires.

Les conditions du minimum sont donc

$$\frac{d^2F}{dy^2}>0, \qquad \left[\frac{d^2F}{dx\,dy}\right]^2-\frac{d^2F}{dy^2}\frac{d^2F}{dx^2}<0.$$

On voit aisément que, dans les deux hypothèses, $\frac{d^2F}{dy^2}$ et $\frac{d^2F}{dx^2}$ ont nécessairement *le même signe.*

958. Si les trois dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{d^2F}{dx^2}, \quad \frac{d^2F}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2F}{dy^2}$$

devenaient nulles en même temps que celles du premier ordre, pour les valeurs attribuées à x et à y, les raisonnements précédents (956) montrent qu'il n'y aurait ni maximum ni minimum de la fonction, si les termes du troisième ordre subsistaient.

Si les quatre dérivées partielles du troisième ordre

$$\frac{d^3F}{dx^3}, \quad \frac{d^3F}{dx^2\,dy}, \quad \frac{d^3F}{dx\,dy^2}, \quad \frac{d^3F}{dy^3}$$

s'annulaient, il faudrait considérer les dérivées partielles du quatrième ordre, et il y aurait maximum ou minimum, si l'ensemble des termes correspondants conservait un signe invariable.

Si $\left[\frac{d^2F}{dx\,dy}\right]^2 - \frac{d^2F}{dy^2}\frac{d^2F}{dx^2}$ *est nul, il y a doute :* nous ne ferons pas ici la discussion de ce cas, qu'on appelle *douteux.*

959. Cas d'une fonction de trois variables. — Soit la fonction

$$v = F(x, y, z).$$

Supposons que x, y, z, reçoivent des valeurs telles, que l'on ait à la fois

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Ces valeurs pourront correspondre alors à un maximum ou à un minimum de la fonction F.

En n'allant pas au delà des termes du deuxième ordre et dans l'hypothèse admise, la série de Taylor pourra s'écrire,

en effectuant (898),

$$F(x+h, y+k, z+l) - F(x, y, z)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}hk + 2\frac{d^2F}{dx\,dz}hl + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}kl\right] + R,$$

R disparaissant encore devant les autres termes du second membre, pour des valeurs absolues de h, k, l, suffisamment petites.

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut donc que le polynôme qui précède R dans le second membre de la formule conserve, dans ces conditions, un signe invariable.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{d^2F}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = A', \quad \frac{d^2F}{dz^2} = A'',$$
$$\frac{d^2F}{dy\,dz} = B, \quad \frac{d^2F}{dx\,dz} = B', \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = B'',$$

et écrivons en même temps

$$\frac{k}{h} = \rho, \qquad \frac{l}{h} = \sigma.$$

Nous aurons ainsi, pour le polynôme considéré, en mettant h^2 en facteur,

$$\tfrac{1}{2}h^2[A + A'\rho^2 + A''\sigma^2 + 2B''\rho + 2B'\sigma + 2B\rho\sigma]$$

ou, en laissant de côté le facteur $\frac{1}{2}h^2$ dont le signe est invariable et en ordonnant par rapport à ρ,

$$A'\rho^2 + 2(B\sigma + B'')\rho + (A''\sigma^2 + 2B'\sigma + A).$$

Quels que soient les rapports arbitraires ρ et σ, il y aura *maximum* ou *minimum*, suivant que la valeur de ce polynôme sera constamment *négative* ou *positive*.

Or, en le regardant comme un trinôme du second degré en ρ, il en sera ainsi si l'on a

$$A' < 0 \text{ (pour le maximum)}, \qquad A' > 0 \text{ (pour le minimum)},$$

en même temps que

$$(B\sigma + B'')^2 - A'(A''\sigma^2 + 2B'\sigma + A) < 0.$$

Or, la seconde inégalité, qui doit avoir lieu quel que soit σ, revient à

$$(B^2 - A'A'')\sigma^2 + 2(BB'' - A'B')\sigma + (B''^2 - AA') < 0.$$

En regardant le premier membre de cette inégalité comme un trinôme du second degré en σ, elle sera satisfaite, si l'on a à la fois

$$B^2 - A'A'' < 0$$

(ce qui entraîne, d'après le signe de A', la condition $A'' < 0$ pour le maximum et $A'' > 0$ pour le minimum), et

$$(BB'' - A'B')^2 - (B^2 - A'A'')(B''^2 - AA') < 0$$

(ce qui entraîne $B''^2 - AA' < 0$ et, par suite, $A < 0$ pour le maximum et $A > 0$ pour le minimum).

La dernière inégalité développée donne, en simplifiant et en divisant ensuite tous les termes par le facteur commun A',

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' \gtrless 0,$$

suivant qu'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum; car, dans le cas du maximum, on a $A' < 0$, et il faut, en divisant par A', renverser le sens de l'inégalité (*Alg. élém.*, 215).

Ainsi, *les conditions du maximum sont*

$$A' < 0, \qquad B^2 - A'A'' < 0,$$
$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' > 0,$$

et *celles du minimum sont*

$$A' > 0, \qquad B^2 - A'A'' < 0,$$
$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' < 0.$$

On voit donc *que la condition*

$$B^2 - A'A'' < 0$$

doit être remplie, aussi bien pour un maximum que pour un minimum; et, ensuite, *que les trois coefficients* A, A', A'', *doivent avoir ensemble un signe contraire à celui de l'expression*

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',$$

leur signe commun étant MOINS *pour un* MAXIMUM *et* PLUS *pour un* MINIMUM.

Il y a *doute* pour les valeurs de x, y, z qui annulent le dernier polynôme écrit.

Il arrive d'ailleurs souvent qu'on décide entre le maximum et le minimum, en s'aidant de considérations particulières fournies par la nature du problème à résoudre.

960. Il n'est pas inutile de remarquer que, si toutes les dérivées partielles d'un certain ordre sont nulles, la différentielle totale du même ordre est nulle, puisqu'elle est la somme des produits respectifs des mêmes dérivées par les accroissements arbitraires attribués aux variables correspondantes.

Réciproquement, ces accroissements étant indépendants les uns des autres, si la différentielle totale d'un certain ordre est nulle, toutes les dérivées partielles de cet ordre sont également nulles.

On peut donc résumer tout ce qui précède (958) en disant que, *pour qu'une fonction atteigne un maximum ou un minimum, il faut que la première différentielle totale qui ne s'annule pas pour les valeurs attribuées aux variables soit d'ordre pair, et qu'elle conserve un signe invariable, qui sera le signe moins dans le cas du maximum et le signe plus dans le cas du minimum.*

Applications.

961. 1° *Inscrire dans une sphère donnée, de rayon r, un parallélipipède rectangle dont le volume soit un maximum.*

Désignons par $2x$, $2y$, $2z$, les arêtes latérales du parallélipipède. Son volume V aura pour expression

$$V = 8xyz. \tag{1}$$

Chacune de ses diagonales étant un diamètre de la sphère circonscrite, on a, en divisant par 4 les deux membres de l'égalité,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Il en résulte

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \tag{2}$$

Si V est maximum, il en est de même de V^2. La fonction dont on doit chercher le maximum est donc finalement, en

supprimant le facteur constant 64,

$$(3)\quad F(x,y) = x^2y^2(r^2 - x^2 - y^2) = r^2x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4.$$

C'est une fonction de deux variables indépendantes x et y.

Pour appliquer les résultats précédents, nous commencerons par chercher ses dérivées partielles du premier et du deuxième ordre. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{dF}{dx} = 2r^2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4,$$

$$\frac{dF}{dy} = 2r^2x^2y - 2x^4y - 4x^2y^3,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2r^2y^2 - 12x^2y^2 - 2y^4,$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dy} = 4r^2xy - 8x^3y - 8xy^3,$$

$$\frac{d^2F}{dy^2} = 2r^2x^2 - 2x^4 - 12x^2y^2.$$

Égalons à zéro les dérivées partielles du premier ordre. On peut supprimer, dans la première équation, le facteur commun $2xy^2$ et, dans la seconde, le facteur commun $2x^2y$. Les solutions correspondantes, $x = 0$ et $y = 0$, ne conviennent pas, évidemment, à la question proposée.

Nous aurons donc simplement à considérer le système

$$(4)\quad \begin{cases} r^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \\ r^2 - x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Il conduit, en tenant compte de l'équation (2), à

$$x = y = z = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Le parallélipipède rectangle inscrit dans la sphère donnée, et dont le volume atteint un maximum, est donc le cube qui a pour arête le tiers du côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

C'est ce que nous allons vérifier. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les valeurs trouvées pour x, y, z satisfassent aux deux inégalités (957)

$$\frac{d^2F}{dy^2} < 0, \qquad \left[\frac{d^2F}{dx\,dy}\right]^2 - \frac{d^2F}{dy^2}\frac{d^2F}{dx^2} < 0.$$

On trouve, successivement, pour ces valeurs,

$$\frac{d^2F}{dy^2} = \frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{8}{9}r^4, \qquad \frac{d^2F}{dx\,dy} = -\frac{4}{9}r^4.$$

La seconde inégalité se réduit donc à

$$\frac{16}{81}r^8 - \frac{64}{81}r^8 < 0,$$

et l'on a bien un maximum.

962. Le théorème connu sur le maximum du produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs variables dont la somme est constante (*Alg. élém.*, 292) nous aurait conduit bien plus rapidement à la solution de la question, que la méthode générale que nous venons d'appliquer.

Nous avons, en effet (961),

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const.},$$

et la fonction dont il faut déterminer le maximum est

$$\frac{V^2}{64} = x^2y^2z^2.$$

Il faut donc, d'après le théorème rappelé, qu'on ait

$$x^2 = y^2 = z^2,$$

c'est-à-dire, puisqu'il s'agit de quantités essentiellement positives,

$$x = y = z = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

On peut d'ailleurs retrouver comme il suit, en les étendant, les deux théorèmes si utiles démontrés précédemment sur les maximums d'un produit dont la somme des facteurs simples est constante (*Alg. élém.*, 292, 297).

963. 2° *Partager un nombre* A *en m parties* $x, y, z, \ldots, v$, *telles que le produit*

$$\mathfrak{P} = x^p y^q z^r \ldots v^t \tag{1}$$

soit un maximum, les exposants $p, q, r, \ldots, t$, *étant des nombres positifs donnés, entiers ou fractionnaires.*

On a l'équation de condition

$$x+y+z+\ldots+v=\mathrm{A} \tag{2}$$

et, pour que le produit $\mathfrak{P}$ atteigne un maximum, il faut qu'on ait (960)

$$d\mathfrak{P}=0. \tag{3}$$

En appliquant le théorème des différentielles logarithmiques (786) à l'équation (1), il vient évidemment

$$\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}=p\frac{dx}{x}+q\frac{dy}{y}+r\frac{dz}{z}+\ldots+t\frac{dv}{v}. \tag{3 bis}$$

$\left(\text{On a, en effet, en simplifiant, } \frac{dx^p}{x^p}=p\frac{dx}{x}.\right)$

D'ailleurs, l'équation (2) peut s'écrire

$$v=\mathrm{A}-x-y-z-\ldots,$$

d'où

$$\frac{dv}{v}=\frac{-dx-dv-dz-\ldots}{\mathrm{A}-x-y-z-\ldots}. \tag{4}$$

La valeur de $\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}$ devient donc

$$\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}=p\frac{dx}{x}+q\frac{dy}{y}+r\frac{dz}{z}+\ldots-t\frac{dx+dy+dz+\ldots}{\mathrm{A}-x-y-z-\ldots}, \tag{5}$$

et l'on a en même temps, en différentiant de nouveau (3 *bis*),

$$\left\{\begin{aligned} d\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} &= \frac{\mathfrak{P}\,d^2\mathfrak{P}-d\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{P}^2} \\ &= \frac{d^2\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}-\left(\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}\right)^2 \\ &= -p\left(\frac{dx}{x}\right)^2-q\left(\frac{dy}{y}\right)^2-r\left(\frac{dz}{z}\right)^2-\ldots-t\left(\frac{dv}{v}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si l'on fait maintenant $d\mathfrak{P}=0$ dans l'équation (5), pour arriver au maximum ou au minimum de $\mathfrak{P}$, on a

$$p\frac{dx}{x}+q\frac{dy}{y}+r\frac{dz}{z}+\ldots=t\frac{dx+dy+dz+\ldots}{\mathrm{A}-x-y-z-\ldots}. \tag{7}$$

Cette équation sera évidemment satisfaite si l'on a

$$\frac{p}{x}=\frac{q}{y}=\frac{r}{z}=\ldots=\frac{t}{\mathrm{A}-x-y-z-\ldots}$$

ou, en renversant et d'après la relation (2),

$$(8)\quad \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\ldots=\frac{v}{t}=\frac{\mathrm{A}}{p+q+r+\ldots+t}\ (\textit{Alg. élém.}, 63).$$

Il faut donc, pour avoir les valeurs de $x, y, z, \ldots, v$, qui répondent au maximum de $\mathfrak{P}$, partager le nombre donné A en parties proportionnelles aux exposants respectifs $p, q, r, \ldots, t$ [*Arithm.*, 430].

C'est bien un maximum de $\mathfrak{P}$ qu'on obtient ainsi (960); car, pour ces valeurs, en vertu de l'équation (6) et à cause de $d\mathfrak{P}=0$, on a nécessairement

$$d^2\mathfrak{P}<0.$$

Si l'on suppose $p=q=r=\ldots=t=1$, le maximum du produit

$$\mathfrak{P}_1=xyz\ldots v$$

s'obtient donc en prenant les m facteurs égaux entre eux et à $\frac{\mathrm{A}}{m}$ (*Alg. élém.*, 292).

Maximums et minimums des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes.

964. Supposons n équations renfermant $n+p$ variables $x, y, z, \ldots, v, w, \ldots$. Ces équations formeront un premier système

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots)=0, \\ f_2(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots)=0. \end{cases}$$

Parmi les $n+p$ variables, nous pourrons alors en regarder p, telles que $x, y, z, \ldots$, comme indépendantes, et les n autres variables, telles que $v, w, \ldots$, seront des fonctions des premières, définies par le système (1).

Admettons qu'on veuille trouver spécialement les maximums ou les minimums de la fonction v.

Nous différentierons les équations qui forment le système (1), et nous obtiendrons un nouveau système de n équations, qui sera

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dx}dx + \dfrac{df_1}{dy}dy + \dfrac{df_1}{dz}dz + \ldots + \dfrac{df_1}{dv}dv + \dfrac{df_1}{dw}dw + \ldots = 0, \\ \dfrac{df_2}{dx}dx + \dfrac{df_2}{dy}dy + \dfrac{df_2}{dz}dz + \ldots + \dfrac{df_2}{dv}dv + \dfrac{df_2}{dw}dw + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{df_n}{dx}dx + \dfrac{df_n}{dy}dy + \dfrac{df_n}{dz}dz + \ldots + \dfrac{df_n}{dv}dv + \dfrac{df_n}{dw}dw + \ldots = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, dx, dy, dz, ... sont des constantes, et dv, dw, ... sont les différentielles totales des fonctions v, w, ...

Entre les n équations (2), nous éliminerons les $n-1$ différentielles totales des fonctions w, ..., autres que la fonction v, en tenant compte immédiatement de la condition $dv = 0$, qui répond aux maximums ou aux minimums de cette dernière fonction (960).

Nous parviendrons de cette manière à une équation de la forme

$$(3)\qquad \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \ldots = 0,$$

où P, Q, R, ... seront des fonctions des variables indépendantes x, y, z, ... Comme les constantes dx, dy, dz, ... n'ont entre elles aucune dépendance, l'équation (3) se résout en un nouveau système de p équations

$$(4)\qquad \mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0, \qquad \ldots.$$

En réunissant les systèmes (1) et (4), on obtient $n+p$ équations pour déterminer les valeurs des $n+p$ variables, qui répondent aux maximums ou aux minimums de la fonction v spécialement considérée.

Pour reconnaître si les valeurs trouvées ainsi pour v sont des maximums ou des minimums, il faudra calculer la différentielle seconde d^2v et voir si elle conserve toujours le même signe et quel signe (960).

965. Il est clair que l'analyse précédente renferme le cas où l'on a à considérer des fonctions de plusieurs variables indépendantes liées entre elles par d'autres équations.

En faisant tout passer dans le premier membre de chaque équation, on transformera, en effet, les premières fonctions en fonctions implicites, et l'on obtiendra un système analogue au système (1) (964), avec cette seule différence que les équations qui lient les variables indépendantes ne renfermeront pas les fonctions proposées de ces variables.

CHAPITRE XVII.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

966. On nomme *équation différentielle du premier ordre* toute équation entre une variable indépendante x, une fonction y de cette variable et la dérivée y' de la fonction y.

Une relation entre y, ses n premières dérivées $y', y'', \ldots y^n$ où figure la variable x est une *équation différentielle d'ordre n.*

Soit, par exemple,

$$y = \arcsin x; \tag{1}$$

on a (822),

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$(1-x^2)\,y'^2 = 1; \tag{2}$$

cette dernière relation est une équation différentielle du *premier ordre:* si l'on prend la dérivée de cette équation et si l'on supprime le facteur commun $2y'$, on obtient l'équation différentielle du *second ordre*

$$(1+x^2)\,y'' - xy' = 0. \tag{3}$$

967. Considérons l'équation

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} = 1, \tag{1}$$

où A et B sont des constantes déterminées, où λ est un paramètre variable. Cette équation représente, au point de vue géométrique, un système de coniques *homofocales.*

Prenons la dérivée de cette équation, en supprimant le facteur 2,

$$\frac{x}{A+\lambda}+\frac{yy'}{B+\lambda}=0. \tag{2}$$

Des équations (1), (2) on déduit, en résolvant par rapport à $\frac{1}{A+\lambda}$, $\frac{1}{B+\lambda}$ considérés comme inconnues,

$$\frac{1}{A+\lambda}=\frac{y'}{x^2y'-xy}, \qquad \frac{1}{B+\lambda}=\frac{1}{y^2-xyy'},$$

puis

$$A+\lambda=\frac{x^2y'-xy}{y'}, \qquad B+\lambda=y^2-xyy'.$$

Par soustraction, on peut éliminer λ,

$$A-B=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy'$$

et l'on obtient cette équation

$$xyy'^2+(x^2-y^2-A+B)y'-xy=0, \tag{3}$$

qui s'applique à toutes les coniques représentées par l'équation (1) : *l'équation* (3) *est l'équation différentielle des coniques homofocales.*

968. Soit maintenant l'équation

$$y=\arcsin x+C_1,$$

où C_1 est une constante déterminée.

On a, comme au n° 934,

$$y'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

$$(1-x^2)y'^2=1;$$

on voit que l'équation différentielle du premier ordre (2) du n° 966 se rapporte non seulement à la fonction $y=\arcsin x$, mais encore à la fonction plus générale $y=\arcsin x+C_1$.

Soit encore l'équation

$$y=C_2(\arcsin x+C_1);$$

on a, comme au n° 934,

$$\frac{y'}{C_2} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

d'où

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0;$$

l'équation différentielle du second ordre (3) du n° 966 se rapporte donc à la fonction

$$y = C_2(\arcsin x + C_1),$$

beaucoup plus générale que la fonction $y = \arcsin x$.

969. Ce fait est général : *à une équation différentielle d'ordre n correspond une fonction y dépendant de n constantes bien déterminées, qu'on désigne sous le nom de* constantes arbitraires.

Inversement, considérons une équation

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

entre les variables x, y et n constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_n$.

Cette équation représente une infinité de fonctions distinctes, que l'on obtiendra en donnant successivement aux constantes tous les systèmes de valeurs possibles.

Toutes ces fonctions satisferont à une même équation différentielle d'ordre n, qu'on formera :

1° En prenant les n premières dérivées (880)

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 + \frac{dF}{dy}y'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^nF}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}dy}y' + \ldots\ldots\ldots + \frac{dF}{dy}y^{(n)} = 0.$$

2° En éliminant $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entre ces équations et l'équation proposée $F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

970. Applications. — I, II : se reporter aux n^{os} 967, 968.

III. L'équation générale des cercles

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

contient trois constantes. L'équation différentielle correspondante sera du troisième ordre. Les dérivées successives étant

$$x + yy' + a \quad + by' = 0,$$
$$1 + y'^2 + \; y y'' + by'' = 0,$$
$$3y'y'' + yy''' + by''' = 0,$$

il suffira d'éliminer b entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$(1 + y'^2 + yy'')y''' - y''(3y'y'' + yy''') = 0,$$

ou, en réduisant

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0;$$

c'est l'équation différentielle des cercles.

IV. *Équation différentielle des coniques.* — Prenons l'équation générale des coniques sous la forme

$$y = ax + b \pm (px^2 + 2qx + r)^{\frac{1}{2}}.$$

On a, en dérivant

$$y' = a \pm (px + q)(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = \pm p(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}} \mp (px + q)^2 (px^2 + 2qx + r)^{-}$$
$$= \pm \frac{p(px^2 + 2qx + r) - (px + q)^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \pm \frac{pr - q^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où

$$y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{(pr - qr)^{\frac{2}{3}}}.$$

En effectuant trois nouvelles dérivations, on a

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''',$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = -\frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2 - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{IV}},$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3 + \frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}} + \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}} - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{V}},$$

et il en résulte, pour l'équation différentielle des coniques,

$$-\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3 + \frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}} + \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y''y^{\mathrm{IV}} - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{V}} = 0,$$

ou, après simplifications,

$$-40y'''^3 + 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} - 9y''^2y^{\mathrm{V}} = 0.$$

Si la conique est une parabole, p est nul ; il suffit de s'arrêter à l'équation

$$\left(y''^{-\frac{3}{2}}\right)'' = 0,$$

ce qui donne, pour l'équation différentielle des paraboles,

$$5y'''^2 - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0.$$

LIVRE ONZIÈME.

ÉLÉMENTS DE CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES INTÉGRALES.

Définitions et théorèmes fondamentaux.

971. Dans ce qui précède, nous avons étudié les différentielles des divers ordres des fonctions quelconques d'une ou de plusieurs variables, et les questions analytiques qui s'y rattachent.

Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel, et il a pour but, d'une manière générale, la recherche des fonctions d'après leurs différentielles.

Nous nous bornerons à exposer les principes fondamentaux de ce calcul inverse et à indiquer les méthodes d'intégration les plus simples, afin de pouvoir les appliquer au besoin en Géométrie analytique.

Il ne s'agira que de fonctions d'une seule variable.

972. Considérons d'abord une courbe quelconque AB, rapportée à des axes rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 17).

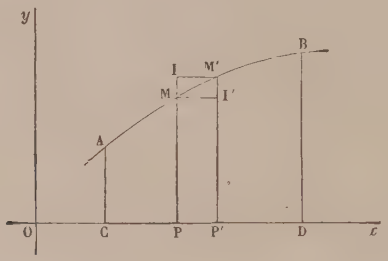
L'aire comprise entre une ordonnée fixe AC, une ordonnée quelconque MP, l'arc de courbe correspondant AM et l'axe Ox, est nécessairement une *fonction de l'abscisse* $x = OP$ du point M, puisqu'elle varie avec la position du point P, le point M variant alors lui-même sur la courbe.

Si l'on désigne par u l'aire ACPM, l'aire MPP'M', qui répond à l'accroissement $\Delta x = PP'$ de x, sera à son tour Δu.

Menons respectivement, par les points M et M', des parallèles MI' et M'I à l'axe Ox, jusqu'à la rencontre des ordon-

nées M'P' et MP, et supposons, sans que cela soit absolument nécessaire à la démonstration, que les points M et M' soient assez rapprochés pour que l'ordonnée y de la courbe varie toujours dans le même sens de l'un à l'autre. Nous aurons évidemment $I'M' = \Delta y$, et l'aire Δu sera comprise entre

Fig. 17.



les aires des deux rectangles MPP'I' et IPP'M'. On pourra donc poser (dans le cas de la figure)

$$y\,\Delta x < \Delta u < (y + \Delta y)\,\Delta x,$$

c'est-à-dire, en divisant par Δx,

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y$$

ou, en passant à la limite, et Δu comme Δy tendant vers zéro en même temps que Δx (747),

$$\frac{du}{dx} = y \quad \text{et} \quad du = y\,dx.$$

On arrive ainsi à ce résultat qu'il importe de retenir :

Les axes étant rectangulaires, la dérivée de l'aire d'une courbe, entendue dans le sens indiqué, est, d'une manière générale, égale à l'ordonnée de cette courbe.

Si, au lieu d'employer des axes rectangulaires, on employait des axes obliques faisant entre eux l'angle θ, les deux rectangles qui comprennent l'aire Δu seraient remplacés par deux parallélogrammes ayant leurs côtés parallèles aux axes et ayant pour aires respectives (*Trigon.*, 153)

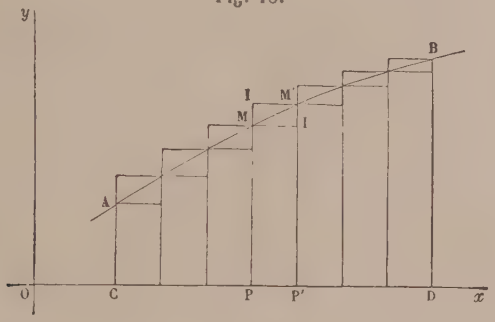
$$y\,\Delta x \sin\theta \quad \text{et} \quad (y + \Delta y)\,\Delta x \sin\theta.$$

On trouverait donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{du}{dx} = y \sin\theta \qquad \text{et} \qquad du = y\,dx \sin\theta.$$

973. Passons à la recherche de l'aire totale comprise entre les deux ordonnées fixes AC et BD, l'arc de courbe correspondant AB et l'axe Ox (*fig.* 18).

Fig. 18.



Divisons la portion CD de l'axe Ox en n parties, égales ou inégales, mais devenant toutes infiniment petites quand n devient infiniment grand. Sur ces divisions comme bases et avec les ordonnées correspondantes de la courbe, construisons des rectangles intérieurs et extérieurs à cette courbe AB, comme l'indique la figure. Par exemple, sur la division PP′ qui répond à l'aire curviligne MPP′M′, nous obtiendrons le rectangle *intérieur* MPP′I′ et le rectangle *extérieur* IPP′M′.

L'aire ACDB est, à la limite, la somme d'un nombre infiniment grand de parties infiniment petites, telles que MPP′M′.

Or, les deux rectangles MPP′I′ et IPP′M′, qui comprennent entre eux l'aire curviligne MPP′M′, ont même base, et leur rapport est celui de leurs hauteurs MP ou y et M′P′ ou $y + \Delta y$. Ce rapport, à la limite, est donc égal à l'unité, et il en sera de même, *a fortiori,* du rapport de l'aire MPP′M′ à celle de l'un des deux rectangles.

On a, par conséquent, le droit, *d'après le second principe fondamental de la Méthode infinitésimale* (742), de remplacer, dans la recherche qu'on poursuit, l'aire MPP′M′ et toutes les aires analogues par celle de l'un des deux rectangles qui les comprennent respectivement. En choisissant,

par exemple, le rectangle *intérieur* dont l'aire est exprimée par $y\,\Delta x$, on aura

$$\text{aire ACDB} = u = \lim \sum_{x=\text{OC}}^{x=\text{OD}} y\,\Delta x.$$

La caractéristique $\sum$ indique, comme à l'ordinaire, la somme de toutes les quantités analogues au produit $y\,\Delta x$ contenues dans l'intervalle déterminé par les valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire par OC et par OD.

Nous avons supposé (*fig.* 18) que l'ordonnée de la courbe AB croissait constamment dans l'intervalle considéré. Si l'ordonnée était constamment décroissante, le même raisonnement subsisterait. Comme on peut, d'ailleurs, partager l'aire totale à évaluer en portions pour lesquelles l'ordonnée de la courbe varie toujours dans le même sens, le raisonnement précédent s'applique finalement à un arc de courbe présentant, relativement à son ordonnée, des alternatives quelconques de croissance et de décroissance.

974. Reprenons l'expression

$$u = \lim \sum_{x=\text{OC}}^{x=\text{OD}} y\,\Delta x,$$

et faisons croître n indéfiniment.

Δx deviendra infiniment petit, et l'on pourra le remplacer par dx, puisque ce sera l'accroissement infiniment petit de l'abscisse. On aura ainsi $y\,dx$, différentielle de u (972), au lieu de $y\,\Delta x$. En même temps, on remplacera la notation

$$\lim \sum_{x=\text{OC}}^{x=\text{OD}} y\,\Delta x$$

par la notation

$$\int_{x=\text{OC}}^{x=\text{OD}} y\,dx,$$

qu'il faut lire *somme intégrale* ou *Intégrale* de tous les éléments différentiels de l'aire u.

L'expression $\sum_{x=OC}^{x=OD} y\,\Delta x$ n'indique qu'une valeur approchée de l'aire ACDB, et elle ne devient exacte qu'à la limite. L'expression $\int_{x=OC}^{x=OD} y\,dx$ représente exactement l'aire ACDB ou la somme *complète* de ses éléments, et c'est pour cela qu'on donne le nom d'*intégrale* à cette seconde expression.

L'ordonnée y de la courbe AB étant aussi une fonction de x que l'on désignera par $f(x)$, on peut, en posant en outre $OC = x_0$ et $OC = x_1$, écrire l'intégrale précédente sous la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Comme les limites en sont indiquées, cette intégrale est dite une INTÉGRALE DÉFINIE, *prise depuis l'abscisse x_0 jusqu'à l'abscisse x_1.*

Par convention, on place la limite inférieure au bas du signe $\int$ et, la limite supérieure, au haut de ce signe.

Calculer, au point de vue où nous nous sommes placé, une intégrale définie, c'est effectuer une *quadrature,* puisque c'est déterminer une aire telle que ACDB, ou le carré équivalent à cette aire.

975. Le problème qu'on vient de traiter donne la solution de la question posée par le Calcul intégral (971), solution qui, d'une manière générale, existe toujours.

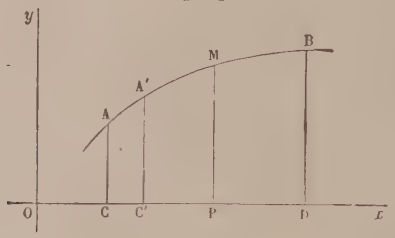
En effet, si $f(x)$ est une fonction réelle de la variable indépendante x, supposée continue entre les limites fixes x_0 et x_1, on pourra toujours trouver une fonction ayant pour différentielle $f(x)\,dx$ ou pour dérivée $f(x)$, entre les mêmes limites. Il suffira pour cela de construire (*fig.* 19) la courbe AB, dont l'équation ou l'ordonnée est

$$y = f(x).$$

Si l'on mène alors les ordonnées CA et PM qui répondent à l'abscisse fixe x_0 et à une abscisse variable x comprise entre $x_0 = OC$ et $x_1 = OD$, l'aire ACPM sera (972, 974) une

fonction $F(x)$ ayant pour différentielle $f(x)\,dx$ ou pour dérivée $f(x)$, entre les mêmes limites.

Fig. 19.



Nous énoncerons donc ce premier théorème :

1. *La limite de somme représentée par*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

est une fonction de la variable x ayant pour différentielle $f(x)\,dx$ ou, pour dérivée, $f(x)$.

On peut l'exprimer en écrivant

$$(1)\quad d\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad D\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = f(x).$$

La limite inférieure x_0 étant fixe, on a une *intégrale définie* (974), si la limite supérieure x_1 est également fixe. Si cette limite supérieure demeure variable, on dit, simplement, que *l'intégrale est prise à partir de x_0.*

976. *Quand on donne une fonction,* quelle qu'elle soit, *sa différentielle ou sa dérivée est,* comme on l'a vu, *complètement déterminée.*

Le problème inverse admet, au contraire, un nombre illimité de solutions; et l'*intégrale d'une différentielle $f(x)\,dx$ est susceptible d'une infinité de valeurs.*

Supposons, en effet, qu'une fonction $F(x)$ ait pour différentielle $f(x)\,dx$. Si l'on ajoute à cette fonction une *constante arbitraire* C, la nouvelle expression

$$F(x) + C$$

aura la même différentielle, puisque toute constante disparaît dans la différentiation d'une somme (781). Et, comme deux fonctions qui ont la même différentielle ne peuvent précisément différer que par une constante (762, 756), *toutes les fonctions* qui répondent à la question seront comprises dans l'expression générale

$$F(x) + C.$$

On pouvait s'attendre, d'après ce qui précède, à cette indétermination spéciale; car nous avons choisi, aussi arbitrairement (975), l'abscisse fixe x_0 ou OC. En partant (*fig.* 19) de l'abscisse OC', on aurait obtenu une aire différente A'C'PM, ayant encore pour différentielle $f(x)dx$.

L'expression générale

$$F(x) + C \tag{2}$$

est dite l'INTÉGRALE INDÉFINIE ou, simplement, l'INTÉGRALE de la *différentielle* $f(x)dx$, et on la représente, sans indication de limites, par la notation

$$\int f(x)dx.$$

Nous résumerons ce que nous venons de dire dans ce deuxième énoncé :

II. *Lorsque l'on a trouvé une fonction* $F(x)$ *dont la différentielle est* $f(x)dx$ *ou la dérivée* $f(x)$, *pour toute valeur de* x *comprise dans un intervalle déterminé, on obtient toutes les fonctions qui jouissent de la même propriété en ajoutant à la première* $F(x)$ *une constante arbitraire* C.

Des intégrales définies. — Élimination de la constante.

977. Toute intégrale définie est évidemment comprise dans l'intégrale indéfinie correspondante, et répond à une certaine valeur de la constante arbitraire C.

Ordinairement, le problème posé permet de connaître quelle valeur X_0 la fonction générale $F(x) + C$ doit prendre pour une *certaine* valeur x_0 de la variable x. On peut alors éliminer immédiatement la constante, puisque l'on doit avoir

$$F(x_0) + C = X_0, \qquad \text{d'où} \qquad C = X_0 - F(x_0),$$

et la fonction générale devient

$$F(x) - F(x_0) + X_0.$$

Le plus habituellement, elle doit s'annuler pour $x = x_0$, on a alors $X_0 = 0$, et elle prend la forme

$$F(x) - F(x_0).$$

On peut écrire, dans ce cas, sans constante arbitraire

$$\int f(x)dx = F(x) - F(x_0),$$

et cette expression est celle de l'aire ACPM (*fig.* 19), x_0 répondant à l'abscisse fixe OC, et l'abscisse $x = OP$ restant variable.

Si l'on donne à x la valeur déterminée $x_1 = OD$, l'intégrale devient elle-même complètement déterminée, c'est-à-dire que l'on a l'*intégrale définie de la différentielle* $f(x)dx$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0), \tag{3}$$

prise depuis $x = x_0$ *jusqu'à* $x = x_1$, *et ayant pour valeur l'aire* ACBD.

Nous pouvons donc énoncer ce dernier théorème fondamental, conclusion de tout ce qui précède :

III. *L'intégrale définie de la différentielle* $f(x)dx$, *prise de* $x = x_0$ *à* $x = x_1$, *est la limite vers laquelle tend la somme des valeurs de la différentielle* $f(x)\Delta x$ *ou* $f(x)dx$, *lorsque* x *varie d'une manière continue, c'est-à-dire en prenant des accroissements successifs infiniment petits, dans l'intervalle considéré.*

978. Ainsi, en se plaçant au point de vue du calcul, et *l'accroissement fini d'une fonction étant égal à la somme des accroissements infiniment petits qu'elle prend successivement dans l'intervalle proposé* (760), on voit que, *pour déterminer une intégrale définie telle que* (3) (977), *il faut trouver la fonction* $F(x)$ *dont la dérivée est* $f(x)$ *ou la différentielle* $f(x)dx$, *remplacer dans cette fonction* $F(x)$ *la variable* x *par sa limite supérieure* x_1, *puis par sa limite inférieure* x_0, *et retrancher le second résultat du premier.*

Il est entendu, pour le moment, que $f(x)$ conserve une valeur finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$, et que les deux limites x_0 et x_1 sont elles-mêmes finies.

979. Voici quelques remarques essentielles au point de vue des applications :

1° *Les signes d et* $\int$ représentent des opérations inverses l'une de l'autre et *se détruisent mutuellement lorsqu'on les superpose.*

On a donc, par définition même et en laissant la constante de côté,

$$(4) \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \text{et} \quad \int dF(x) = F(x).$$

2° *Quand on intervertit l'ordre des limites, on change le signe de l'intégrale définie.*

On a, en effet, par convention (974, 978) et $F'(x)$ étant égale à $f(x)$,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0),$$

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx = F(x_0) - F(x_1),$$

et il en résulte

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx$$

3° *Une intégrale peut présenter des éléments négatifs,* chaque produit $f(x)\Delta x$ ou $f(x)dx$ étant, dans tous les cas, positif ou négatif, suivant que ses facteurs sont de même signe ou de signes contraires.

Au lieu d'avoir une courbe telle que AB, la courbe $y = f(x)$ peut (*fig.* 20) affecter la forme AKMLB. Elle coupe alors deux fois l'axe Ox en K et en L.

Les deux portions d'aire ACK et LDB, situées au-dessus de l'axe Ox, sont positives, tandis que la portion d'aire KML, située au-dessous de cet axe, est négative.

En posant $OC = x_0$, $OD = x_1$, l'aire totale

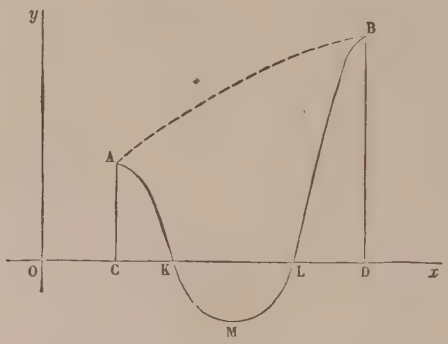
$$ACK - KML + LDB$$

sera toujours représentée par

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0),$$

et elle pourra être nulle, si la partie négative KML est égale, en valeur absolue, à la somme ACK + LDB des parties positives.

Fig. 20



4° *La dérivée $f(x)$ de $F(x)$ restant finie et continue quand x varie de x_0 à x_1, de x_1 à x_2, de x_2 à x_3, ..., de x_{n-1} à x_n, on a la formule*

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

En effet, la formule (6) revient à l'identité

$$F(x_n) - F(x_0) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})].$$

La formule (6) subsiste, lors même que les limites ne sont pas rangées par ordre de grandeur, les éléments du second membre qui ne se retrouvent pas dans le premier se détruisant nécessairement deux à deux. On peut le vérifier facilement, en ne considérant, par exemple, que les limites x_0, x_1, x_2, x_3, disposées dans l'ordre x_0, x_2, x_3, x_1.

5° *Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et $x_1 > x_0$ et si, dans cet intervalle, on a toujours $f(x) > \varphi(x)$, on a aussi*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx > \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)dx.$$

Les deux intégrales définies sont des limites de sommes, et chaque élément différentiel de la première somme est, par hypothèse, supérieur à l'élément différentiel correspondant de la seconde. L'inégalité indiquée est donc vérifiée.

Cette remarque permet de renfermer une intégrale définie entre deux limites.

En effet, si la fonction $f(x)$ demeure comprise entre les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(x)$, dans l'intervalle (x_0, x_1), et que ces fonctions soient continues dans cet intervalle, on a, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx > \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx.$$

Si l'on ne sait pas intégrer $f(x)\,dx$ et si l'on sait, au contraire, intégrer $\psi(x)\,dx$ et $\varphi(x)\,dx$, on obtiendra donc deux limites de l'intégrale inconnue.

930. Nous terminerons ces préliminaires, en montrant que le théorème fondamental sur les intégrales définies (977) peut être établi directement par l'Analyse, à l'aide des principes du Calcul différentiel.

Admettons que $F(x)$ soit l'une quelconque des intégrales de $f(x)\,dx$ (976) : on aura $f(x) = F'(x)$.

Par suite, α étant une fonction de x et de Δx qui s'annule en même temps que Δx, on pourra écrire (758)

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) + \alpha, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\Delta F(x) = [f(x) + \alpha]\,\Delta x. \tag{2}$$

Si l'on fait maintenant varier x par degrés de plus en plus rapprochés, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$, la continuité de $f(x)$ étant supposée, on obtiendra, pour chaque valeur at-

tribuée à x, une équation analogue à l'équation (2). En ajoutant toutes ces relations membre à membre, le premier membre de l'égalité résultante, somme des accroissements $\Delta F(x)$, représentera l'accroissement total de $F(x)$ entre les limites indiquées ou $F(x_1) - F(x_0)$, et l'on aura

$$(3) \quad F(x_1) - F(x_0) = \lim \sum_{x=x_0}^{x=x_1} f(x)\,\Delta x + \lim \sum_{x=x_0}^{x=x_1} \alpha\,\Delta x.$$

Mais $\sum \Delta x$ a ici pour limite finie $x_1 - x_0$. Par conséquent, les valeurs de α étant à la limite infiniment petites, on a, d'après un théorème précédemment démontré (731),

$$\lim \sum_{x=x_0}^{x=x_1} \alpha\,\Delta x = 0,$$

et il reste

$$(4) \quad F(x_1) - F(x_0) = \lim \sum_{x=x_0}^{x=x_1} f(x)\,\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Ainsi, l'intégrale définie est bien la *somme* des valeurs infiniment petites de la différentielle (760), entre les limites indiquées.

Procédés d'intégration les plus simples.

981. L'opération par laquelle on passe de la différentielle d'une fonction à cette fonction elle-même porte le nom d'*Intégration*.

Puisque les deux opérations, Différentiation et Intégration, sont inverses l'une de l'autre, chaque proposition relative à la différentiation a sa réciproque dans l'intégration.

On trouvera, à la fin de ce Volume, deux Tableaux parallèles, qui se répondent et se complètent mutuellement. Le premier renferme les différentielles et les dérivées les plus simples et les plus usuelles; le second fait connaître les intégrales qui résultent spontanément, pour ainsi dire, de la lecture des différentielles inscrites dans le premier.

Nous allons entrer dans quelques développements sur ce point, et indiquer ensuite les autres procédés les plus élémentaires.

INTÉGRATION IMMÉDIATE.

982. Nous remarquerons d'abord que, lorsque l'intégrale indéfinie d'une différentielle est connue (975, 976), la relation (3) fournit ensuite son intégrale définie entre les limites données (977, 978).

Cela posé, l'intégration est absolument immédiate, lorsqu'on retrouve, sans changement, sous le signe $\int$, la différentielle d'une fonction connue.

Nous allons parcourir quelques exemples.

1° Si l'on a à chercher

$$\int \frac{dx}{x},$$

on n'a qu'à se souvenir que la différentielle de lx est égale à $\frac{dx}{x}$ (799). On peut alors écrire, en désignant par C la constante arbitraire, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x} = lx + \mathrm{C}.$$

Si les limites données sont $x = a$ et $x = b > a$, on a donc (978)

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = lb - la = l\frac{b}{a}.$$

2° Si l'on a à chercher

$$\int \cos x\, dx,$$

il suffit de se rappeler que la fonction $\sin x$ a pour différentielle $\cos x\, dx$ (811), pour écrire

$$\int \cos x\, dx = \sin x + \mathrm{C}.$$

Si les limites sont, pour l'arc x, o et $\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

3° La fonction $\operatorname{tang} x$ ayant pour différentielle $\frac{dx}{\cos^2 x}$ (814), on a de même

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$$

et, pour les limites $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{4}$,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 0,4226\ldots.$$

983. 4° Soit encore

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La différentielle de $\operatorname{arc\,sin} x$ est précisément (822) celle qui est placée sous le signe $\int$. On a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C.$$

Mais il se présente ici, pour le passage à l'intégrale définie, une difficulté dont il faut être averti.

Supposons que les limites données soient $x = -1$ et $x = 1$. Nous aurons

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} 1 - \operatorname{arc\,sin}(-1).$$

Or, à un même sinus x, correspondent une infinité d'arcs compris dans les formules (*Trigon.*, 12)

$$2k\pi + x \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - x,$$

k étant un entier quelconque. La fonction $\operatorname{arc\,sin} x$ n'est donc

pas complètement déterminée, et il en est de même des deux termes arc sin 1 et arc sin -1, lorsqu'on les considère séparément; mais leur différence n'est pas indéterminée. C'est ce que nous allons montrer.

Les deux arcs (arc sin 1 et arc sin -1) peuvent faire partie, soit de la première formule générale que nous venons de rappeler, soit de la deuxième, soit, respectivement, de l'une et de l'autre. Le résultat demeurant identique, comme il est facile de le vérifier, nous admettrons que les deux arcs appartiennent à la première formule

$$2k\pi + x.$$

Nous pourrons alors écrire

$$\text{arc sin } 1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{arc sin } -1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2},$$

k conservant, bien entendu, la même valeur dans les deux égalités, puisqu'il s'agit d'un arc variant d'une manière continue depuis la valeur pour laquelle son sinus est -1 jusqu'à celle pour laquelle son sinus est 1.

Il en résultera finalement

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

984. 5° Si l'on donnait

$$\int \frac{dx}{1+x^2},$$

on aurait, de même (826),

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x + C.$$

Il s'ensuivrait

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } 1 - \text{arc tang } (-1).$$

A une même tangente x correspondent une infinité d'arcs compris dans la formule (*Trigon.*, 23)

$$k\pi + x.$$

Le plus petit arc dont la tangente est 1 étant $\frac{\pi}{4}$, on pourra donc écrire, sans ambiguïté (983), et en supposant l'entier k quelconque,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

985. La comparaison des deux Tableaux indiqués (981) conduira sans peine à d'autres résultats analogues, qu'il faut, autant que possible, retenir par cœur.

Il est essentiel de remarquer, à ce sujet, que la fonction logarithmique (982) et les fonctions circulaires inverses (983, 984) sont *des intégrales de différentielles algébriques*. Ces fonctions se seraient donc présentées nécessairement, dès le début du Calcul intégral, comme des éléments analytiques nouveaux, lors même que l'Algèbre et la Trigonométrie n'en auraient pas donné d'avance la théorie. On comprend par là, sans insister, qu'il est dans la nature même de l'intégration de donner naissance à de nouveaux types de fonctions en nombre illimité et que, par conséquent, les Mathématiques trouvent dans ce calcul inverse une mine inépuisable de recherches.

THÉORÈMES DE TRANSFORMATION ET DE DÉCOMPOSITION.

986. I. *On peut, à volonté, faire sortir un facteur constant du signe* $\int$ *ou le faire entrer sous ce signe.*

On a, évidemment,

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx, \tag{1}$$

a étant un facteur constant.

En effet, tout facteur constant persiste dans la différentiation (786), et deux fonctions qui ont la même différentielle ne peuvent différer que par une constante arbitraire *additionnelle* (976).

On peut dire encore qu'il revient au même de multiplier par un facteur constant chaque élément d'une somme ou la somme tout entière.

Ainsi, l'expression $a\int f(x)\,dx$ a pour différentielle $a\,f(x)\,dx$ et, comme elle renferme implicitement une constante arbitraire, elle représente bien l'intégrale indéfinie de $a\,f(x)\,dx$.

On aura donc, entre les mêmes limites x_0 et x_1,

$$\int_{x_0}^{x_1} a\,f(x)\,dx = a\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

987. II. *L'intégrale d'une somme algébrique de différentielles est égale à la somme algébrique des intégrales de ces différentielles.*

En effet, u, v et t, étant des fonctions de x, on a (781)

$$d(u+v-t) = du + dv - dt.$$

On a donc aussi

$$(2) \qquad \int d(u+v-t) = \int du + \int dv - \int dt;$$

car les deux membres de cette égalité ont même différentielle, et chaque intégrale indéfinie entraîne avec elle une constante arbitraire additionnelle.

On aura, par suite, entre les mêmes limites x_0 et x_1,

$$\int_{x_0}^{x_1} d(u+v-t) = \int_{x_0}^{x_1} du + \int_{x_0}^{x_1} dv - \int_{x_0}^{x_1} dt.$$

988. Le plus ordinairement, l'expression qui est sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue ; mais il suffit souvent d'une simple multiplication par un facteur constant convenablement choisi pour faire apparaître cette différentielle, et l'on peut alors regarder encore l'intégration comme immédiate. Le théorème I (986) a donc des applications très nombreuses, puisque l'on n'aura qu'à diviser ensuite le résultat obtenu par le facteur auxiliaire employé.

989. 1° Soit, par exemple,

$$\int x^m\,dx.$$

La quantité $x^m dx$ n'est pas une différentielle connue;

mais, en multipliant sous le signe par $m+1$, on voit que

$$(m+1)x^m dx$$

est précisément la différentielle de x^{m+1} (789).

Il en résulte qu'en multipliant sous le signe par $m+1$ et, en dehors du signe, par $\frac{1}{m+1}$, les deux opérations se détruiront (986), en donnant

$$(3) \qquad \int x^m dx = \frac{1}{m+1}\int (m+1)x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Il est utile d'énoncer ce résultat sous forme de règle ; car il n'en est pas de plus usuel.

Lorsque la fonction dérivée placée sous le signe $\int$ *est une puissance; on obtient immédiatement l'intégrale, sauf la constante, en augmentant d'une unité l'exposant de la puissance et en divisant le résultat par l'exposant ainsi modifié.*

En appliquant cette règle et le théorème II (987), on peut écrire immédiatement l'intégrale qui correspond à une fonction dérivée exprimée par un polynôme rationnel en x.

On a ainsi

$$\begin{aligned}\int (5x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3)\,dx \\ &= \int 5x^4 dx + \int 2x^3 dx - \int 7x^2 dx + \int 5x\,dx - \int 3\,dx \\ &= x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x + C.\end{aligned}$$

Les lecteurs feront bien, dans les commencements, de vérifier toujours le résultat de l'intégration effectuée, en prenant les différentielles des deux membres.

Nous ne devons pas terminer ce paragraphe, sans faire remarquer le cas d'exception qui se présente, lorsqu'on suppose dans la formule générale (3), $m = -1$. On trouve alors

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C,$$

au lieu de $lx + C$ que l'on devrait obtenir (982, 1°). Il ne faut pas d'ailleurs s'étonner que la formule générale devienne illusoire dans cette hypothèse, puisque l'intégrale $lx + C$, ces-

sant d'être algébrique, ne peut plus être représentée par l'expression

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Un artifice de calcul peut conduire au résultat exact. C étant une constante arbitraire, on peut, sans rien modifier, retrancher dans le second membre la fraction $\frac{1}{m+1}$, et écrire

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + C.$$

Pour $m = -1$, la fraction du second membre prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais, si l'on applique la règle de L'Hospital (922), en prenant le rapport des dérivées des deux termes relativement à m, on trouve d'abord

$$\frac{x^{m+1} lx}{1}$$

et, ensuite, pour $m = -1$, lx. On retombe bien ainsi sur la formule connue

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

990. 2° Soit encore

$$\int a^x dx.$$

La quantité placée sous le signe n'est pas une différentielle connue; mais elle deviendrait celle de a^x (802), si on la multipliait par $\frac{\log a}{\log e}$. C'est ce que l'on a le droit de faire, à la condition de multiplier hors du signe par le facteur inverse $\frac{\log e}{\log a}$. Il vient ainsi

$$\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a} \int \frac{\log a}{\log e} a^x dx = \frac{\log e}{\log a} a^x + C.$$

991. Le théorème relatif à la différentiation des fonctions de fonctions (778) peut être souvent invoqué, soit seul, soit combiné avec le théorème I (986).

3° Ainsi, la différentielle d'un logarithme conservant la fonction intacte au dénominateur (800) et la dérivée de la

variable indépendante étant l'unité, on a, évidemment,

$$\int \frac{dx}{x+a} = l(x+a) + C.$$

On a, de même

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = llx + C.$$

On a aussi (989)

$$\int \frac{dx}{(x+a)^p} = \int (x+a)^{-p}\,dx$$
$$= \frac{(x+a)^{-p+1}}{-p+1} + C = \frac{-1}{(p-1)(x+a)^{p-1}} + C.$$

En multipliant et en divisant par 2 (986), il vient également (778, 800)

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a^2} = \tfrac{1}{2}\,l(x^2+a^2) + C.$$

De même

$$\int \frac{lx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2\,lx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,(lx)^2 + C.$$

Enfin (778, 826)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

992. En décomposant la différentielle placée sous le signe en une somme de plusieurs autres et en appliquant le théorème II (987), on parvient fréquemment à tourner la difficulté et à effectuer l'intégration. Le théorème II joue donc, lui aussi, un rôle important, bien qu'il faille quelquefois une habileté toute particulière pour le mettre en œuvre.

993. 4° Soit, par exemple,

$$\int \frac{x^2-2x+5}{x-1}\,dx.$$

On peut effectuer la division indiquée, et l'expression devient

$$\int\left(x^2+x-1+\frac{4}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4l(x-1)+C.$$

Soit encore

$$\int\sin^2x\,dx.$$

On peut (*Trigon.*, 59) remplacer $\sin^2x$ par $\frac{1-\cos 2x}{2}$, et il vient alors (778, 811)

$$\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

994. 5° Considérons l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}.$$

En la multipliant et en la divisant par $\sin^2x+\cos^2x=1$, et en effectuant, on trouve successivement (814, 817)

$$\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int-\frac{dx}{\sin^2x}$$
$$=\operatorname{tang}x-\cot x+C.$$

6° Prenons, en dernier lieu, l'expression

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\int\frac{dx}{(a-bx)(a+bx)}.$$

Si l'on a l'idée d'introduire au numérateur la somme

$$a-bx+a+bx=2a,$$

il vient, en effectuant et en faisant usage de la remarque du n° 991,

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{(a-bx)+(a+bx)}{(a-bx)(a+bx)}dx$$
$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{a+bx}+\int\frac{dx}{a-bx}\right)$$
$$=\frac{1}{2ab}\left(\int\frac{b\,dx}{a+bx}-\int\frac{-b\,dx}{a-bx}\right)=\frac{1}{2ab}l\frac{a+bx}{a-bx}+C.$$

On peut se reporter au n° 809 (6°).

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

995. Supposons que l'expression différentielle $f(x)dx$ ne soit pas immédiatement intégrable, et que la variable x soit liée à une autre variable indépendante t par la relation

$$x = \varphi(t). \tag{1}$$

Il en résultera

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

et, par suite,

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \mathrm{F}(t)dt.$$

On aura donc

$$\int f(x)\,dx = \int \mathrm{F}(t)\,dt. \tag{2}$$

Si l'on peut déterminer immédiatement l'intégrale du second membre, ou si elle est plus simple que celle du premier membre, l'emploi de ce procédé de *substitution* sera avantageux. Dans le résultat obtenu finalement, on devra remplacer t par sa valeur en fonction de x.

Lorsque la première intégrale doit être prise entre les limites x_0 et x_1, il faut prendre l'intégrale substituée entre les limites t_0 et t_1, qui sont les valeurs de t pour lesquelles on a $x = x_0$ et $x = x_1$.

996. Quelques exemples éclairciront ce qui précède.

1° Soit d'abord

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

La quantité placée sous le signe $\int$ n'étant pas une différentielle connue, nous poserons, en désignant par t une nouvelle variable indépendante,

$$x = at, \qquad \text{d'où} \qquad dx = a\,dt.$$

Il viendra, en substituant

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + \mathrm{C},$$

c'est-à-dire, en revenant à x,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Il est clair, d'ailleurs, qu'on aurait pu éviter l'emploi du procédé par substitution, en s'appuyant sur le théorème relatif à la différentiation des fonctions de fonctions (991), et en posant directement

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Il en sera souvent ainsi dans les exemples simples, où le procédé dont il s'agit aura surtout pour objet de soulager l'attention.

2° Soit encore

$$\int (ax + b)^m dx.$$

Posons

$$ax + b = t.$$

Il en résultera

$$x = \frac{t - b}{a} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{a}.$$

En substituant, on aura donc

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{1}{a} \frac{t^{m+1}}{m + 1} + C$$

ou, en revenant à x,

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m + 1} + C.$$

Puisque la différentielle de $ax + b$ est $a dx$, on aurait pu aussi, dans cet exemple, éviter toute substitution et écrire immédiatement

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int (ax + b)^m a dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m + 1} + C.$$

3° Considérons, en dernier lieu, l'intégrale fréquemment

rencontrée

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c},$$

en supposant que les racines de l'équation $x^2+bx+c=0$ sont imaginaires, auquel cas on a (*Alg. élém.*, 237)

$$\frac{b^2}{4}-c<0 \qquad \text{ou} \qquad c-\frac{b^2}{4}>0.$$

On a aussi

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right).$$

t étant une autre variable indépendante, posons

$$x+\frac{b}{2}=t\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}, \qquad \text{d'où} \qquad dx=dt\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}.$$

Nous aurons évidemment, en substituant et en simplifiant,

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c}=\int \frac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}{\left(c-\frac{b^2}{4}\right)t^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\operatorname{arc\,tang} t+C$$

ou, en revenant à x,

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}+C.$$

Si les deux racines imaginaires de l'équation

$$x^2+bx+c=0$$

sont mises sous la forme $\alpha\pm\beta i$ (*Alg. élém.*, 237), on a

$$\alpha=-\frac{b}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta=\sqrt{c-\frac{b^2}{4}},$$

et l'on peut écrire

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c}=\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+C.$$

INTÉGRATION PAR PARTIES.

997. Ce procédé d'intégration est très important. Il est très fréquemment mis en œuvre et offre de précieuses ressources.

u et v étant deux fonctions de x, nous avons trouvé pour la différentielle de leur produit (783)

$$(1) \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

On a donc, en intégrant les deux membres (987).

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Nous n'avons pas ajouté de constante, parce que chaque membre de l'équation (1), intégré, comporte une constante arbitraire.

Puisque uv est une *partie intégrée,* on ramène de cette manière la recherche de l'intégrale $\int u\,dv$ à celle de l'intégrale $\int v\,du$, qui peut être plus simple, ou mieux se prêter aux exigences de la question à traiter.

On voit que, dans les deux intégrales substituées ainsi l'une à l'autre, les fonctions et les différentielles sont permutées : on a, dans la seconde, v à la place de u et du à la place de dv.

Ce procédé pourrait s'appeler aussi *intégration par facteurs,* puisqu'il est fondé sur la décomposition du produit qu'on veut intégrer en deux facteurs, dont l'un soit une différentielle connue : dans le produit $u\,dv$, dv est la différentielle connue de la fonction v.

998. Si l'on veut appliquer la formule (1) (997) à la recherche d'intégrales définies, on a, en appelant u_0 et v_0, u_1 et v_1, les valeurs des fonctions u et v pour $x = x_0$ et $x = x_1$,

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} u\,dv = [u_1 v_1 - u_0 v_0] - \int_{x_0}^{x_1} v\,du.$$

999. Nous allons appliquer l'intégration par parties à quelques exemples choisis.

1° Soit l'expression

$$\int lx\,dx.$$

Si l'on se reporte à la formule (2) (997), on a ici

$$u = lx, \qquad v = x, \qquad du = \frac{dx}{x}.$$

Par suite,

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\,\frac{dx}{x} = x\,lx - x + C.$$

2° Soit l'expression

$$\int \operatorname{arc\,tang} x\,dx.$$

On a ici

$$u = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad v = x, \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Par suite,

$$\int \operatorname{arc\,tang} x\,dx = x \operatorname{arc\,tang} x - \int x\,\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\,l(1+x^2) + C.$$

3° Soit l'expression

$$\int x e^x\,dx.$$

Ici, $e^x\,dx$ est la différentielle connue de e^x. On a donc

$$u = x, \qquad v = e^x, \qquad du = dx,$$

et, par conséquent,

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C.$$

4° Soit l'expression

$$\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx.$$

On a ici

$$u = \arcsin x, \qquad v = x, \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

par suite,

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On peut d'ailleurs écrire

$$\int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-2x\, dx}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

et l'on a, finalement,

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

1000. On peut avoir à appliquer le même procédé plusieurs fois et successivement, jusqu'à ce que l'on parvienne à une dernière intégrale, immédiatement connue.

5° Soit l'expression

$$\int x^3 e^x\, dx.$$

On a ici

$$u = x^3, \qquad v = e^x, \qquad du = 3x^2\, dx.$$

Par suite,

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - \int e^x 3x^2\, dx.$$

On devra calculer la seconde intégrale par le même procédé et en posant

$$u = 3x^2, \qquad v = e^x, \qquad du = 6x\, d$$

On aura ainsi

$$\int 3x^2 e^x\, dx = 3x^2 e^x - \int e^x 6x\, dx.$$

En opérant encore de même et en posant une troisième fois

$$u = 6x, \qquad v = e^x, \qquad du = 6\, dx,$$

il viendra enfin

$$\int 6x e^x\, dx = 6x e^x - \int e^x 6\, dx = 6x e^x - 6e^x.$$

On trouvera donc, finalement, en substituant dans la première formule les résultats successivement obtenus,

$$\int x^3 e^x \, dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

6° Soit, encore, l'expression

$$\int x^m \cos x \, dx.$$

$\cos x \, dx$ étant la différentielle de $\sin x$, on peut poser

$$u = x^m, \qquad v = \sin x, \qquad du = m x^{m-1} \, dx.$$

Par suite,

$$\int x^m \cos x \, dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x \, dx.$$

On peut mettre la seconde intégrale sous la forme

$$-\int x^{m-1} \sin x \, dx = \int x^{m-1} (-\sin x \, dx)$$

et poser, puisque $-\sin x \, dx$ est la différentielle de $\cos x$,

$$u = x^{m-1}, \qquad v = \cos x, \qquad du = (m-1) x^{m-2} \, dx.$$

On a ainsi

$$-\int x^{m-1} \sin x \, dx = x^{m-1} \cos x - (m-1) \int x^{m-2} \cos x \, dx.$$

La question est donc ramenée à la recherche de l'intégrale

$$\int x^{m-2} \cos x \, dx,$$

qui est de même forme que la proposée, sauf l'exposant de x. On devra, par conséquent, poursuivre l'application du procédé jusqu'à ce que, m étant supposé entier et positif, et diminuant d'une unité à chaque opération, on parvienne à l'intégrale connue

$$\int \cos x \, dx \quad \text{ou} \quad \int -\sin x \, dx,$$

suivant que m sera pair ou impair. L'opération sera alors terminée.

Prenons, pour fixer les idées, $m = 4$. Nous aurons successivement

$$\int x^4 \cos x\, dx = x^4 \sin x - 4\int x^3 \sin x\, dx,$$

$$-\int x^3 \sin x\, dx = x^3 \cos x - 3\int x^2 \cos x\, dx,$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx,$$

$$-\int x \sin x\, dx = x \cos x - \int \cos x\, dx = x\cos x - \sin x,$$

c'est-à-dire, finalement,

$$\int x^4 \cos x\, dx = \sin x[x^4 - 12x^2 + 24] + 4x\cos x[x^2 - 6] + C.$$

Cas particuliers des intégrales définies (1).

1001. I. Les limites de l'intégrale sont infinies.

Nous avons supposé, jusqu'à présent, que, dans l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx,$$

la fonction dérivée $f(x)$ restait finie et continue entre les deux limites x_0 et x_1, ces limites étant des quantités déterminées quelconques. Nous allons montrer que, $f(x)$ demeurant toujours finie et continue, tandis que l'une des deux limites ou toutes les deux deviennent infinies, l'intégrale correspondante peut conserver une valeur finie, ou bien devenir elle-même infinie ou indéterminée.

1002. Remarquons qu'une intégrale prise entre les limites x_0 et ∞ n'est autre chose que la limite vers laquelle tend la même intégrale prise entre les limites x_0 et x_1, lorsqu'on fait

(1) En disant ici quelques mots de cette question délicate, nous voulons seulement indiquer au lecteur les difficultés qui peuvent se présenter dans le calcul des intégrales définies.

tendre x_1 vers l'infini. On a ainsi

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \quad [\text{pour } x_1 = \infty].$$

On a, de même,

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \quad [\text{pour } x_0 = -\infty]$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \quad [\text{pour } x_0 = -\infty \text{ et } x_1 = \infty].$$

1003. 1° Soit, par exemple,

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}\,dx.$$

On aura d'abord

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C;$$

puis

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-x}\,dx = e^{-x_0} - e^{-x_1}$$

Si l'on fait tendre x_1 vers l'infini, la limite de $e^{-x_1} = \frac{1}{e^{x_1}}$ est zéro, et l'on a

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-x_0};$$

ce qui est une valeur finie.

Si l'on fait tendre, au contraire, x_0 vers moins l'infini en donnant une valeur déterminée à l'autre limite x_1, il vient

$$\int_{-\infty}^{x_1} e^{-x}\,dx = e^{\infty} - e^{-x_1} = \infty.$$

1004. 2° Soit, encore,

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

On aura d'abord (991, 3°)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C;$$

puis,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1}{a} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x_0}{a}\right).$$

Si l'on fait tendre x_1 vers l'infini, $\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1}{a}$ tend vers un arc dont la tangente est égale à l'infini, c'est-à-dire, si l'on veut, vers l'arc $\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x_0}{a}\right).$$

Si l'on fait tendre, au contraire, x_0 vers moins l'infini, on a, dans les mêmes conditions

$$\int_{-\infty}^{x_1} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1}{a} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Enfin, si l'on fait tendre à la fois x_0 vers $-\infty$ et x_1 vers ∞, il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}$$

1005. 3° Soit, en dernier lieu,

$$\int_{x_0}^{\infty} \cos x\, dx.$$

On aura d'abord

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

puis,

$$\int_{x_0}^{x_1} \cos x\, dx = \sin x_1 - \sin x_0.$$

Si l'on fait tendre maintenant x_1 vers l'infini, la valeur de $\sin x_1$ ne peut tendre vers aucune limite déterminée. La valeur de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \cos x\, dx$$

est donc elle-même complètement indéterminée.

1006. II. La fonction dérivée placée sous le signe $\int$ peut devenir infinie pour l'une des limites de l'intégrale ou entre ses limites.

Supposons d'abord que la fonction dérivée $f(x)$ demeure finie pour les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et x_1, mais qu'elle devienne infinie pour $x = x_1$. La valeur correspondante de l'intégrale peut être alors finie, infinie ou indéterminée.

En supposant toujours $x_1 > x_0$ et en désignant par ε un infiniment petit positif, on pourra poser

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx \quad [\text{pour } \varepsilon = 0].$$

Si la fonction $f(x)$ devient, au contraire, infinie pour $x = x_0$, on pourra écrire d'une manière analogue

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0+\varepsilon}^{x_1} f(x)\,dx \quad [\text{pour } \varepsilon = 0].$$

1007. Supposons, en second lieu, que la fonction $f(x)$ devienne infinie pour une certaine valeur de x comprise entre les deux limites x_0 et x_1 de l'intégrale. Cette dernière peut alors être finie, infinie ou indéterminée.

En désignant par X la valeur de x qui rend, dans l'intervalle (x_0, x_1), $f(x)$ infinie, nous pourrons écrire, d'une manière générale et d'après un théorème démontré précédemment (979, 4°),

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Comme on a, par hypothèse, $f(X) = \infty$, il faudra chercher les limites des intégrales du second membre d'après les indications données au n° 1006. En désignant par ε et par η deux infiniment petits positifs, *sans corrélation aucune*, nous poserons donc

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx \quad [\text{pour } \varepsilon = 0]$$

et

$$\int_{X}^{x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{X+\eta}^{x_1} f(x)\,dx \quad [\text{pour } \eta = 0].$$

La somme des deux limites obtenues fera connaître la valeur de l'intégrale proposée.

1008. 1° Soit l'expression

$$\int_{-x_0}^{x_1} x^{-4}\,dx,$$

x_0 et x_1 étant des quantités positives.

On a d'abord

$$\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{3x^3} + C.$$

puis

$$\int_{-x_0}^{x_1} x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3x_1^3} - \frac{1}{3x_0^3}$$

Cette valeur est négative. Cependant, tous les éléments différentiels de la forme $x^{-4}dx$ ou $\frac{dx}{x^4}$ sont positifs à cause de l'exposant pair de x^4. Le résultat obtenu n'est donc pas exact. En effet, nous sommes dans le cas d'exception qu'il s'agit d'étudier, puisque $f(x) = \frac{1}{x^4}$ devient infinie pour $x = 0$, valeur comprise entre $-x_0$ et x_1. Nous devons donc poser (1007)

$$\int_{-x_0}^{0} x^{-4}\,dx = \lim \int_{-x_0}^{0-\varepsilon} x^{-4}\,dx = \left[-\frac{1}{3(0-\varepsilon)^3} - \frac{1}{3x_0^3}\right] \quad [\text{pour } \varepsilon = 0]$$

$$= \left(\frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{1}{3x_0^3}\right)[\text{pour } \varepsilon = 0] = \infty$$

et

$$\int_{0}^{x_1} x^{-4}\,dx = \lim \int_{0+\eta}^{x_1} x^{-4}\,dx = \left[-\frac{1}{3x_1^3} + \frac{1}{3(0+\eta)^3}\right] \quad [\text{pour } \eta = 0]$$

$$= \left(-\frac{1}{3x_1^3} + \frac{1}{3\eta^3}\right) \quad [\text{pour } \eta = 0] = \infty.$$

Les deux intégrales partielles dont la somme représente l'intégrale proposée sont donc infinies de même signe, et cette intégrale a elle-même une valeur infinie.

1009. 2° Soit, encore, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x}$$

On a, comme on le sait,

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C,$$

d'où

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = l\frac{x_1}{x_0}.$$

Si les deux limites sont de même signe, il n'y a aucune difficulté; mais, si elles sont de signes contraires, le second membre se présente sous forme imaginaire. Nous nous trouvons dans le même cas d'exception; car, dans l'intervalle de ces deux limites de signes contraires, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ passe nécessairement par l'infini pour $x = 0$.

Pour bien faire apparaître la différence de signes des deux limites, nous désignerons par x_0 et par x_1 deux nombres positifs et, pour lever la difficulté, nous poserons (1007)

$$\int_{-x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \lim\left(\int_{-x_0}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\eta}^{x_1} \frac{dx}{x}\right),$$

ε et η étant des infiniment petits arbitraires, sans aucune corrélation.

On aura alors

$$\lim \int_{-x_0}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} = l\frac{0-\varepsilon}{-x_0} = l\frac{\varepsilon}{x_0}$$

et

$$\lim \int_{0+\eta}^{x_1} \frac{dx}{x} = l\frac{x_1}{0+\eta} = l\frac{x_1}{\eta}.$$

La somme des deux limites sera donc

$$l\frac{x_1}{\eta} + l\frac{\varepsilon}{x_0} = l\frac{x_1}{x_0} + l\frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Mais, ε et η étant arbitraires, leur rapport est indéterminé, et l'intégrale proposée a elle-même une valeur indéterminée.

Si l'on suppose $\varepsilon = \eta$, on a $l\frac{\varepsilon}{\eta} = l\,1 = 0$, et la valeur de l'intégrale se réduit à $l\frac{x_1}{x_0}$. C'est ce que Cauchy appelle, dans les cas analogues, la *valeur principale* de l'intégrale indéterminée.

Cette *valeur principale* a donc pour expression générale (1007)

$$\lim\left[\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{X+\varepsilon}^{x_1} f(x)\,dx\right].$$

Nouvelle démonstration de la série de Taylor.

1010. Les propriétés des intégrales définies et l'application du procédé d'intégration par parties (997) conduisent à une démonstration simple et élégante de la série de Taylor (888).

Soient, en effet, x et h deux quantités données et t une variable. Considérons la fonction

$$f(x+h-t),$$

et supposons-la continue, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées, pour les valeurs de t comprises entre 0 et h; ce qui revient à dire que $f(x)$ et ses $n+1$ premières dérivées sont continues dans l'intervalle $(x,\ x+h)$.

La différentielle de $f(x+h-t)$ par rapport à t étant égale (778) à

$$-f'(x+h-t)\,dt,$$

nous aurons, identiquement (979, 2°)

$$\int_h^0 -f'(x+h-t)\,dt = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt = f(x+h) - f(x).$$

Cela posé, si l'on veut appliquer l'intégration par parties (997) à l'expression

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt,$$

on aura ici

$$u = f'(x+h-t), \qquad v = t, \qquad du = -f''(x+h-t)\,dt,$$

et il viendra, par suite,

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = t f'(x+h-t) + \int_0^t t f''(x+h-t)\,dt.$$

En opérant de même pour l'intégrale du second membre et en poursuivant l'application de la méthode, on aura, successivement,

$$\int_0^t t f'(x+h-t)\,dt = \frac{t^2}{1.2} f''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt,$$

$$\int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt = \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^3}{1.2.3} f^{1v}(x+h-t)\,d$$

.....

$$\int_0^t \frac{t^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^n(x+h-t)\,dt = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(x+h-t)\,d$$

Ajoutons toutes ces égalités membre à membre. Nous aurons, en simplifiant,

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = \frac{t}{1} f'(x+h-t) + \frac{t^2}{1.2} f''(x+h-t) + \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x+h-t) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(x+h-t)\,dt.$$

En faisant $t = h$ dans cette égalité résultante et en tenant compte de l'identité (1), il viendra évidemment

$$(2)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{h}{1} f'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \dfrac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x) + \dfrac{1}{1.2.3\ldots n} \displaystyle\int_0^h f^{n+1}(x+h-t)\,t^n\,dt. \end{cases}$$

Pour que ce développement coïncide exactement avec la série de Taylor (888) il faut et il suffit que les conditions relatives à la continuité soient remplies, et que le reste R ou le dernier terme du second membre de la formule (2) tende vers zéro autant qu'on voudra à mesure que n augmente.

Si l'on désigne par M la plus grande valeur et par m la plus petite valeur que prend la dérivée continue $f^{n+1}(x+h-t)$,

quand t varie de o à h, on a nécessairement

$$R < \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^h M t^n\,dt < \frac{M h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

et

$$R > \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^h m t^n\,dt > \frac{m h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

La véritable valeur de R correspondra donc à une valeur de $f^{n+1}(x+h-t)$ telle, que t soit compris entre o et h et égal à $h-\theta h$, en désignant par θ une certaine fraction positive, et l'on trouvera ainsi, comme précédemment (890),

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h);$$

ce qui achève la démonstration.

Intégration et dérivation des séries.

1011. Séries uniformément convergentes. — Si une série

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les termes sont fonctions d'une variable x, est convergente pour toute valeur x appartenant à certains intervalles, on dit de préférence constituant un certain domaine, elle représente dans ce domaine une fonction de x, $f(x)$.

On dit que la convergence de la série est *uniforme*, si l'on peut, quelle que soit la quantité positive ε, déterminer en entier ν, indépendant de, tel que pour $n > \nu$ on ait

$$\text{valeur absolue de } (s - s_n) < \varepsilon.$$

Les séries uniformément convergentes peuvent, à beaucoup d'égards, être assimilées aux sommes formées d'un nombre limité de termes, comme le montreront les propositions suivantes:

1012. I. *Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions continues de x, est elle-même une fonction continue.*

Soit, en effet,

$$s = s_n + \mathrm{R}.$$

Changeons x en $n + \Delta x$; soient Δs, Δs_n, $\Delta \mathrm{R}$ les accroissements correspondants de s, s_n, R′, on aura

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta \mathrm{R} = \Delta s_n + \mathrm{R} + \Delta \mathrm{R} - \mathrm{R} = \Delta s_n + (\mathrm{R} + \Delta \mathrm{R}) - \mathrm{R};$$

d'où (111)

$$|\Delta s| < |\Delta s_n| + |\mathrm{R} + \Delta \mathrm{R}| + |\mathrm{R}.$$

Puisque la continuité est uniforme, on peut prendre n assez grand pour que $|\mathrm{R} + \Delta \mathrm{R}|$ et $|\mathrm{R}|$ soient moindres qu'une quantité positive quelconque $\frac{\varepsilon}{3}$.

Le nombre n ayant été ainsi choisi, s_n, qui est la somme d'un nombre fini de fonctions continues, sera continue. On pourra donc assigner une quantité d telle que si $|\Delta x|$ est moindre que d, $|\Delta s_n|$ soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. On aura alors

$$|\Delta s| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de s.

1013. II. *Une série uniformément convergente*

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont intégrables dans un intervalle a, b, est elle-même intégrale dans ce domaine et a pour intégrale la série

$$\int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

En effet, décomposons l'intervalle a, b, en éléments infiniment petits dx_1, dx_2, ..., dx_k, ... Soit Δs_k la variation de s dans l'élément dx_k; il faut montrer que $\Sigma\, \Delta s_k\, dx_k$ tend vers zéro en même temps que dx_1, dx_2, ...

Posons

$$s = s_n + \mathrm{R}.$$

et soient $\Delta' s_k$, dx_k la variation de s_n et de R dans l'élément ds_k. On aura évidemment

$$\Delta s_k \geq \Delta' s_k + dx_k,$$

d'où

$$\Sigma\, \Delta s_k\, dx_k \geq \Sigma\, \Delta' s_k\, dx_k + \Sigma\, \delta x_k\, dx_k.$$

On peut, par hypothèse, prendre n assez grand pour que R soit constamment moindre en valeur absolue qu'une quantité positive quelconque ε. Sa variation δx_k sera dès lors moindre que 2ε, et l'on aura

$$\Sigma\, \delta x_k\, dx_k < 2\varepsilon\, \Sigma\, dx_k < 2\varepsilon(b-a).$$

Le nombre n étant ainsi choisi, s_n étant la somme d'un nombre *fini* de fonctions intégrables, sera intégrable: on pourra donc assigner une quantité δ telle que si $dx_1, \ldots, dx_k, \ldots$ sont tous moindres que δ, $\Sigma\, \Delta' s_k\, dx_k$ soit moindre que ε. On aura alors

$$\Sigma\, \Delta s_k\, dx_k < \varepsilon(2\mathrm{E}+1),$$

quantité qui tend vers zéro avec ε, comme il est nécessaire, on l'a dit plus haut.

Donc s est intégrable et a pour intégrale

$$\int_a^b s\, dx = \int_a^b s_n\, dx + \int_a^b \mathrm{R}\, dx$$
$$= \int_a^b u_1\, dx + \ldots + \int_a^b u_n\, dx + \int_a^b \mathrm{R}\, dx.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que, si n tend vers l'infinité, $\int_a^b \mathrm{R}\, dx$ tend vers zéro. Cela résulte de ce qu'on peut déterminer un entier ν tel que, si $n > \nu$, $|\mathrm{R}|$ soit constamment moindre qu'un nombre positif quelconque ε, et que, dans ces cas,

$$\left| \int_a^b \mathrm{R}\, dx \right| < \varepsilon(b-a),$$

quantité qui tend vers zéro avec ε.

1014. Voici un exemple de série s où la convergence n'est pas uniforme; c'est celle qui a pour terme général

$$u_n = n(1-x^2)^{n-1}.$$

Pour $x = 0$, la série se réduit à zéro. Pour les autres valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, s est une progression géométrique convergente (*Alg. élém.* et 385) et a pour valeur $\frac{1}{x}$,

quantité qui tend vers l'infinité si x tend vers zéro. La série s est donc discontinue pour $x=0$, bien qu'elle soit convergente et que ses termes soient des fonctions continues. Ce résultat s'explique en remarquant que la convergence n'est pas uniforme. Soit, en effet, s_n la somme des n premiers termes de la série. On aura

$$s-s_n=\mathrm{R}_n=\frac{(1-x^2)_n}{n},$$

et, quel que soit n, on pourra toujours trouver une valeur de x assez petite pour que R_n soit plus grand que toute quantité donnée ε.

1015. III. *Si la série*

$$s(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

est convergente, et la série

$$\sigma(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+\ldots+f'_n(x)+\ldots$$

uniformément convergente dans un intervalle E; *si de plus, les fonctions* $f'_1(x)$, $\ldots$, $f'_n(x)$, $\ldots$ *sont continues dans l'intérieur* E; $s(x)$ *admettra dans l'intérieur de* E *une dérivée, égale à* $\sigma(x)$.

Soit, en effet, x une valeur de la valeur de la variable appartenant à l'intervalle E et a une valeur de cette variable assez voisin de x pour que tous les points de l'intervalle dx soient encore intérieurs à E; $\sigma(x)$ admet une intégrale de a à x et l'on a, en partageant E en éléments dt,

$$\begin{aligned}\int_a^x \sigma(t)\,dt&=\int_a^x f'_1(t)\,dt+\int_a^x f'_2(t)\,dt+\ldots\\&\qquad+\int_a^x f'_n(t)\,dt+\ldots\\&=f_1(x)-f_1(a)+\ldots+f_n(x)-f_n(a)+\ldots\\&=s(x)-s(a).\end{aligned}$$

Le premier nombre admet une dérivée égale à $\sigma(x)$; donc il en est de même du second; $s(a)$ étant une constante, $s(x)$ aura une dérivée, égale à $\sigma(x)$

A ce propos, considérons la série

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

où

$$u_1 = xe^{-x^2}, \quad \ldots, \quad u_n = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}$$

La somme s_n des n premiers termes est égale à nxe^{-nx^2} et tend vers zéro, quel que soit x, pour n infini. La série a donc pour valeur zéro, quel que soit x. On a par conséquent

$$\int_0^b s\,dx = 0.$$

Mais, d'autre part,

$$\int_0^b s_n\,dx = \int_0^b nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^b de^{-nx^2} = -\frac{1}{2}(e^{-nx^2})_b^0$$

et pour $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty}\int_0^b s_n\,dx = \frac{1}{2};$$

le théorème II est donc en défaut ici.

Cela tient à ce que la convergence n'est point uniforme. En effet, on a

$$s - s_n = R_n = -nxe^{-nx^2},$$

et si l'on pose $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, il viendra

$$|R_n| = \frac{\sqrt{n}}{e} > \frac{1}{2}.$$

Il est impossible de choisir n de telle sorte que, pour toute valeur de x, $|R_n|$ soit plus petit que ε, dès que ε sera plus petit que $\frac{1}{e}$.

1016. Il résulte du théorème précédent (1013) que, si la formule de Maclaurin (895) donne pour $f(x)$ une série uniformément convergente telle que

$$(1)\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots,$$

on pourra, en multipliant de part et d'autre par dx et en intégrant, en déduire l'intégrale indéfinie

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\int f(x)\,dx = C + \frac{x}{1}f(0) + \frac{x^2}{1.2}f'(0)\\ + \frac{x^3}{1.2.3}f''(0) + \frac{x^4}{1.2.3.4}f'''(0) + \dots.\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut que l'intégrale soit nulle pour $x = 0$, il en résultera $C = 0$, et l'on aura (978)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{1}f(0) + \frac{x^2}{1.2}f'(0)\\ + \frac{x^3}{1.2.3}f''(0) + \frac{x^4}{1.2.3.4}f'''(0) + \dots.\end{aligned}\right.$$

1017. Nous terminerons ces notions par quelques exemples.

1° La division donne

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \pm x^n \mp \frac{x^{n+1}}{1+x},$$

et la série du second membre est uniformément convergente tant que x est moindre que 1 en valeur absolue. En multipliant par dx et en intégrant, il vient

$$\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} \mp \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x}.$$

Tant que la valeur de x reste comprise entre -1 et $+1$, on a donc (907)

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

2° La division donne également

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2},$$

et la série du second membre est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. En multipliant par dx, en intégrant, et en prenant pour arc tang x

le plus petit des arcs positifs qui ont x pour tangente, on a donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n+1} \mp \int \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2}.$$

Tant que la valeur de x reste comprise entre -1 et $+1$, on peut écrire, par suite (913),

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots.$$

3° La formule du binôme (902) donne, en supposant x compris entre -1 et $+1$, la série uniformément convergente

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots.$$

En multipliant par dx et en intégrant les deux membres de cette relation, il vient

$$\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots.$$

Ce développement est applicable tant que x reste compris entre -1 et $+1$ et, même, pour $x = \pm 1$, parce que, bien que la première série devienne alors divergente (903), la seconde série demeure convergente (¹). On aura ainsi, en faisant $x = 1$ dans le développement trouvé et en prenant pour $\operatorname{arc\,sin} x$ le plus petit arc positif qui réponde à cette condition,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \dots.$$

(¹) *Voir* les *Questions proposées* sur les séries (123).

CHAPITRE II.

COMPLÉMENTS CONCERNANT LES INTÉGRALES INDÉFINIES.

Intégration des fractions rationnelles.

1018 *Nous supposons connue la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.*

Soit à intégrer l'expression

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

où $f(x)$, $F(x)$ sont des polynômes de degrés respectifs m, n.

Soient a, b, ... les racines de l'équation $F(x) = 0$; soient α, β, ... les degrés de multiplicité de ces racines. On pourra mettre la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = {} & M_0 x^{m-n} + M_1 x^{m-n-1} + \ldots + M_{m-n-1} x + M_{m-n} \\ & + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

le polynôme $M_0 x^{m-n} + \ldots + M_{m-n}$ se réduisant à zéro, si $m < n$.

Chacun des termes de cette dernière expression est immédiatement intégrale, et l'on a

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = {} & \frac{M_0 x^{m-n+1}}{m-n+1} + \frac{M_1 x^{m-n}}{m-n} + \ldots + M_{m-n} x + C \\ & + A_1 \log(x-a) - \frac{A_2}{x-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} \\ & + B_1 \log(x-b) - \frac{B_2}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(1-\beta)(x-b)^{\beta-1}}.\end{aligned}$$

1019. Si les racines a, b, ... de $F(x)$ ne sont pas toutes réelles, l'intégrale sera compliquée d'imaginaires, qu'il est aisé de faire disparaître, si les coefficients de $f(x)$, $F(x)$ sont réels.

Soit, en effet, $a = \mu + \nu i$ une racine imaginaire, de multiplicité α, de $F(x)$, $F(x)$ admet aussi la racine imaginaire conjuguée $b = \mu - \nu i$, avec le même degré de multiplicité $\alpha : \alpha = \beta$.

Les coefficients A_1, A_2, ... seront des quantités complexes de la forme

$$p_1 + q_1 i, \quad p_2 + q_2 i, \ldots$$

et les coefficients B_1, B_2, ... seront les quantités conjuguées

$$p_1 - q_1 i, \quad p_2 - q_2 i, \quad \ldots.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} &= \frac{p_1 + q_1 i}{x - \mu - \nu i} + \frac{p_1 - q_1 i}{x - \mu + \nu i} \\ &= \frac{(p_1 + q_1 i)(x - \mu + \nu i) + (p_1 - q_1 i)(x - \mu - \nu i)}{(x - \mu - \nu i)(x - \mu + \nu i)} \\ &= \frac{2p_1(x-\mu) - q_1 \nu}{(x-\mu)^2 + \nu^2},\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b}\right) dx &= \int \frac{2p_1(x-\mu) 2q_1\nu}{(x-\mu)^2 + \nu^2}\, dx \\ &= p_1 \int \frac{2(x-\mu)}{(x-\mu)^2 + \nu^2}\, dx \\ &\quad - 2q_1 \int \frac{\nu}{[(x-\mu)^2 + \nu^2]}\, dx;\end{aligned}$$

1° posons

$$(x-\mu)^2 + \nu^2 = u,$$

nous avons, en prenant les différentielles des deux membres,

$$2(x-\mu)\, dx = du;$$

on peut donc écrire

$$\int \frac{2(x-\mu)}{(x-\mu)^2 + \nu^2}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log u = \log[(x-\mu)^2 + \nu^2];$$

2° posons

$$x - \mu = \nu\varphi;$$

on aura

$$dx = \nu\, d\varphi,$$

puis

$$\int \frac{\nu}{[(x-\mu)^2+\nu^2]}\,dx = \int \frac{\nu^2\,d\varphi}{\nu^2\varphi^2+\nu^2} = \int \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} = \operatorname{arc\,tang}\varphi,$$
$$= \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\mu}{\nu};$$

il en résulte

$$\int\left(\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}\right)dx$$
$$= p_1 \log[(x-\mu)^2+\nu^2] - 2q_1 \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\mu}{\nu} + C.$$

De même, en ajoutant ensemble les fractions

$$\frac{A_2}{(x-a)^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{p_2+q_2 i}{(x-\mu-\nu i)^2},$$

et

$$\frac{B_2}{(x-a)^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{p_2-q_2 i}{(x-\mu+\nu i)^2},$$

on obtiendra une expression *réelle*

$$\frac{f(x)}{[(x-\mu^2)^2+\nu^2]^2}.$$

Plus généralement, l'addition de

$$\frac{A_h}{(x-a)^h}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{p_h+q_h i}{(x-\mu-\nu i)^h}$$

avec

$$\frac{B_h}{(x-b)^h}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{p_h-q_h i}{(x-\mu+\nu i)^h}$$

donnera une expression réelle

$$\frac{f(x)}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^h},$$

et nous allons montrer comment on calcule les intégrales

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^h}.$$

1020. Posons, à cet effet,

$$x = \mu + \nu t,$$

d'où

$$dx = \nu\, dt;$$

on en déduit

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^h} = \int \frac{f(\mu+\nu t)\nu\,dt}{[\nu^2 t^2+\nu^2]^h} = \int \frac{\nu^{1-2h} f(\mu+\nu t)\,dt}{(1+t^2)^h}.$$

Le numérateur peut être écrit

$$\varphi(t^2) + \varphi_1(t^2)\,t,$$

en séparant les termes de degré pair et les termes de degré impair.

Nous avons donc à calculer

$$\int \frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^h}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\varphi(t^2)\,t\,dt}{(1+t^2)^h};$$

1° *La deuxième intégrale* est très facile à calculer, en posant à nouveau

$$1 + t^2 = u,$$

d'où

$$2t\,du = du,$$

et

$$\int \frac{\varphi(t^2)\,t\,dt}{(1+t^2)^h} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi(u-1)\,du}{u^h};$$

en effet, si $\varphi(u-1)$, qui est un polynôme de degré $h-1$, est de la forme

$$\varphi(u-1) = \alpha_1 u^{h-1} + \alpha_2 u^{h-2} + \ldots + \alpha u_{h-1} u + \alpha_h,$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\varphi(u-1)\,du}{u^h} &= \frac{1}{2}\int \frac{\alpha_1\,du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{\alpha_2\,du}{u^2} + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \frac{\alpha_{h-1}\,du}{u^{h-2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\alpha_h\,du}{u^{h-1}} \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1 \log u - \frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{u} - \ldots \\ &\quad - \frac{1}{2(h-3)}\frac{\alpha_{h-1}}{u^{h-3}} - \frac{1}{2(h-2)}\frac{\alpha^h}{u^{h-2}}\end{aligned}$$

2° On calcule *la première intégrale* par réductions successives.

Posant

$$1 + t^2 = k,$$

il viendra

$$\frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^h} = \frac{\varphi(h-1)}{k^h} = \frac{\beta_1}{k^h} + \frac{\beta_2}{k^{h-1}} + \ldots + \pi(t),$$

$\pi(t)$ étant un polynôme qui s'intègre immédiatement.

Il ne reste donc à calculer que les intégrales de

$$\frac{\beta_1}{k^h}, \quad \frac{\beta^2}{k^{h-1}}, \quad \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k^h}, \quad \frac{1}{k^{h-1}}, \quad \ldots$$

c'est-à-dire de

$$\frac{1}{(1+t^2)^h}.$$

C'est dans le calcul des intégrales

$$I_h = \int \frac{dt}{(1+t^2)^h}$$

qu'intervient la méthode de réduction.

La dérivée de $1 + t^2$ étant $2t$, déterminons un polynôme en t de degré zéro, c'est-à-dire une constante c, et un polynôme en t du premier degré, $d + et$, tel que $1 + t^2$ et sa dérivée $2t$ soient liés par une relation de la forme

$$c(1+t^2) + (d+et)2t = 1,$$

ou bien

$$c + 2dt + (c+2e)t^2 = 1;$$

il suffit de prendre

$$c = 1, \qquad d = 0, \qquad e = -\frac{c}{2} = -\frac{1}{2},$$

et l'on a

$$1 + t^2 - \frac{t}{2} \cdot 2t = 1;$$

on peut donc écrire

$$\mathrm{I}_h = \int \frac{1 + t^2 - \frac{t}{2}\,2t}{(1+t^2)^h}\,dt$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{h-1}} - \int \frac{\frac{t}{2}\cdot 2t}{(1+t^2)^h}\,dt$$

$$= \mathrm{I}_{h-1} - \frac{1}{2(h-1)} \int t\,\frac{2(h-1)t}{(1+t^2)^h}\,dt.$$

Posons

$$\frac{1}{(1+t^2)^{h-1}} = w;$$

on a, en prenant les différentielles des deux membres,

$$-\frac{2(h-1)t\,dt}{(1+t^2)^h} = dw,$$

de telle sorte que, en multipliant les deux membres par $-t$, et en intégrant,

$$\int t\,\frac{2(h-1)t}{(1+t^2)^h}\,dt = -\int t\,dw;$$

appliquons l'intégration par parties; il vient

$$\int t\,dw = tw - \int w\,dt = \frac{t}{(1+t^2)^{h-1}} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^{h-1}}$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^{h-1}} - \mathrm{I}_{h-1},$$

puis

$$\int t\,\frac{2(h-1)\,dt}{(1+t^2)^h} = -\frac{t}{(1+t^2)^{h-1}} + \mathrm{I}_{h-1},$$

et, en fin de compte,

$$\mathrm{I}_h = \mathrm{I}_{h-1} + \frac{1}{2(h-1)}\left(\frac{t}{(1+t^2)^{h-1}} - \mathrm{I}_{h-1}\right),$$

ou, après réduction,

$$\mathrm{I}_h = \frac{t}{2(h-1)(1+t^2)^{h-1}} + \frac{2h-3}{2h-2}\,\mathrm{I}_{h-1}.$$

Par cette formule, I_h sera ramené à I_1, et l'on aura ici

$$I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang } t.$$

Par exemple,

$$I_3 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{2.2(1+t^2)^2} + \frac{3}{4} I_2,$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t)^2} + \frac{1}{2} I_1$$

et

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8} \text{arc tang } t.$$

Intégration des différentielles algébriques les plus simples.

1021. Considérons l'intégrale

$$I = \int f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

où f désigne une fraction rationnelle de x et de y, cette dernière quantité étant liée à x par une équation algébrique

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

On dit que I est une intégrale abélienne.

Si l'équation (2) représente une courbe *unicursale*, c'est-à-dire si x et y peuvent être représentées par deux relations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

équivalentes à la relation (2), où φ, ψ sont des fonctions rationnelles de t, c'est-à-dire des polynômes et des fractions rationnelles, on aura

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$

et (1)

$$I = \int f[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt;$$

I sera donc l'intégrale d'une fonction rationnelle, et nous saurons la calculer (**1018**, **1019**, **1020**).

Exemples. — **I.** Supposons que y soit défini par l'équation

$$\begin{aligned} &A y^m + B x y^{m-1} + \ldots + H x^m \\ &+ a y^{m-1} + b x y^{m-2} + \ldots + h x^{m-1} = 0; \end{aligned}$$

posons $y = tx$. L'équation, dérivée par x^{m-1}, donnera

$$x = -\frac{a t^{m-1} + b t^{m-2} + \ldots + h}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + H},$$

$$y = -\frac{a t^m + b t^{m-1} + \ldots + ht}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + H}$$

et l'on pourra calculer toutes les intégrales

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où f est une fonction rationnelle.

II. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A x^2 + 2Bx + C}};$$

considérons la conique (courbe unicursale)

$$y^2 = A x^2 + 2Bx + C;$$

en introduisant y, l'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{y}.$$

Coupons la conique par une droite

$$y + x\sqrt{A} = t,$$

parallèle à l'une des asymptotes; il vient

$$(t - x\sqrt{A})^2 = A x^2 + 2Bx + C,$$

et, en différentiant,

$$\begin{aligned} (t - x\sqrt{A})\, dt &= (t\sqrt{A} + B)\, dx, \\ y\, dt &= (t\sqrt{A} + B)\, dx, \\ \frac{dx}{y} &= \frac{dt}{t\sqrt{A} + B}, \end{aligned}$$

puis

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[t\sqrt{A} + B \right] + \text{const.} \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[y\sqrt{A} + Ax + B \right] + \text{const.}, \\ &\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[\sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + Ax + B \right] + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

Remarque. — Soit d'une manière générale, $x = x_0$, $y = y_0$, un point de la conique

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C;$$

x_0, y_0, vérifient alors l'équation

$$(2)\qquad y_0^2 = Ax_0^2 + 2Bx_0 + C.$$

Remplaçons dans l'équation de la conique x par

$$x_0 + (x - x_0),$$

y par $y_0 + (y - y_0)$; cette équation devient

$$[y_0 + (y - y_0)]^2 = A[x_0 + (x - x_0)]^2 + 2B[x_0 + (x - x_0)] + C,$$

ou

$$\begin{aligned} &y_0^2 + 2(y - y_0)y_0 + (y - y_0)^2 \\ &\quad = Ax_0^2 + 2A(x - x_0)x_0 \\ &\qquad + (x - x_0)^2 + 2Bx_0 + 2B(x - x_0) + C, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} 2(y - y_0)y_0 + (y - y_0)^2 = {} & 2A(x - x_0)x_0 \\ & + A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0); \end{aligned}$$

posons

$$(3)\qquad y - y_0 = t(x - x_0);$$

substituons, supprimons le facteur commun $x - x_0$, il vient

$$2ty_0 + t^2(x - x_0) = 2Ax_0 + A(x - x_0) + 2B;$$

d'où l'on tire

$$x - x_0 = \frac{2(Ax_0 + B - ty_0)}{t^2 - A},$$

et l'on a ensuite (2)

$$y - y_0 = \frac{2t(Ax_0 + B - ty_0)}{t^2 - A};$$

Nous avons ainsi exprimé $x - x_0$, $y - y_0$, ou, ce qui est la même chose, x et y en fonction de t.

Mais il est plus simple de prendre x_0, y_0 à l'infini sur une direction asymptotique, comme nous l'avons fait au début.

Revenons à l'intégrale (1). Si A est négatif, le second membre contient des imaginaires. On peut faire disparaître ceux-ci si $B^2 - Ac > 0$. On a en effet

$$Ax^2 + 2Bx + C = \frac{B^2 - AC - (Ax + B)^2}{-A};$$

posons

$$Ax + B = t\sqrt{B^2 - AC},$$

d'où

$$dx = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\,dt.$$

L'intégrale devient

$$(4)\qquad \int \frac{\sqrt{B^2 - AC}\,dt}{A\sqrt{\frac{(B^2 - Ac)(1 - t^2)}{-A}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} + \text{const.}$$

(1) et (4) sont donc les deux formes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

III. Voici encore une intégrale qui se présente souvent :

$$(1)\qquad \int \frac{dx}{(x - x_0)\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Posons

$$y_0 = \sqrt{A x_0^2 + 2Bx_0 + C};$$

le point x_0, y_0 appartenant à la conique

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C,$$

on rendra rationnelle la fonction à intégrer en posant

$$y - y_0 = t(x - x_0), \tag{2}$$

d'où

$$t^2(x - x_0) + 2y_0 t = A(x + x_0) + 2B; \tag{3}$$

prenons la différentielle des deux membres. On a

$$2t(x - x_0)\,dt + t^2\,dx + 2y_0\,dt = A\,dx,$$

puis

$$2[t(x - x_0) + y_0]\,dt = (A - t^2)\,dx,$$

$$\frac{2\,dt}{A - t^2} = \frac{dx}{t(x - x_0) + y_0}$$

où (2)

$$= \frac{dx}{y}$$

et

$$\frac{2\,dt}{(A - t^2)(x - x_0)} = \frac{dx}{y(x - y_0)};$$

ayant mis l'équation (3) sous la forme

$$(t^2 - A)(x - x_0) = 2Ax_0 + 2B - 2y_0 t,$$

on voit que l'intégrale (1) est égale à

$$\int \frac{-dt}{Ax_0 + B - ty_0} = \frac{1}{y_0}\log(y_0 t - Ax_0 - B) + \text{const.}$$

IV. L'intégrale

$$\int f(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle (combinaison de polynômes

et de fractions rationnelles) se ramène aux précédentes, car si l'on pose

$$\sqrt{ax+b}=t,$$

d'où

$$x=\frac{t^2-b}{a}, \qquad dx=\frac{2t\,dt}{a},$$

l'intégrale deviendra

$$\int f\left[\frac{t^2-b}{a},\ t,\ \sqrt{\frac{c(t^2-b)}{a}+d}\right]\frac{2t\,dt}{a}.$$

V. Soit encore l'intégrale

$$\int f(x,y)\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, et où x, y sont liés par une équation du second degré

$$F(x,y)=0.$$

Nous pourrions partir d'un point quelconque x_0, y_0, de la conique, comme nous l'avons fait (II, *Remarque*); mais, sauf cas particuliers (III), il est plus simple de faire intervenir (II) une direction asymptotique de la conique,

1° Si p est entier;
2° Si q est entier;
3° Si $p+q$ est entier;

car, dans ces diverses hypothèses, $t^q(1-t)^p$ est le produit d'une fonction rationnelle de t par une puissance fractionnaire de l'une des trois quantités t, $1-t$, $\frac{1-t}{t}$.

Soient, par exemple, q entier et $p=\frac{2}{3}$; la différentielle à intégrer est

$$t^q(1-t)^{\frac{2}{3}}dt,$$

posons

$$1-t=u^3;$$

on a

$$t^q(1-t)^{\frac{2}{3}}dt=-3(1-u^3)^q u^3\,du.$$

Si p entier et $q = \frac{2}{3}$, on pose

$$t = u^3;$$

Si $p + q$ entier et

$$p = \frac{2}{3},\ q = 11 - \frac{2}{3},$$

la différentielle prend la forme

$$t^{11-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{2}{3}}dt = t^{11}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{2}{3}}dt$$

et l'on pose

$$\frac{1-t}{t} = u^3.$$

En dehors des trois cas signalés, l'intégrale de la différentielle binôme est une transcendante que nous n'avons pas étudiée.

VI. *Différentielle binôme.* — On donne ce nom à l'expression

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

où m, n, p sont des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, où a et b sont des quantités constantes différentes de zéro.

Posons

$$bx^n = -at,$$

d'où

$$x = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

La différentielle devient ainsi, en posant encore

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}(a - at)^p \frac{1}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^n t^{\frac{1}{n}-1}dt,$$

ou

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} a^n(1-t)^p \frac{1}{n} t^q dt,$$

c'est-à-dire à un facteur constant près

$$(1-t)^p t^q\, dt.$$

Cette différentielle peut être rendue rationnelle.

VII. D'une manière plus générale, soit l'intégrale

$$\int f\left[\left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^a, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^b, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^c, \ldots, x\right] dx,$$

où m, n, m', n' sont des constantes quelconques, a, b, c, ... des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, et f une fonction rationnelle. Soit μ le plus petit multiple commun des nombres a, b, c, ...; on pose

$$\frac{mx+n}{m'x+n'} = t^\mu,$$

d'où

$$x = -\frac{n't^\mu - n}{m't^\mu - m}, \quad dx = \frac{mn' - m'n}{(m't^\mu - m)^2}\,\mu t^{\mu-1}\,dt,$$

et l'intégrale prend la forme rationnelle

$$\int f\left(t^{\mu a}, t^{\mu b}, t^{\mu c}, \ldots, -\frac{n't^\mu - n}{m't^\mu - m}\right)\frac{mn' - m'n}{(m't^\mu - m)^2}\,\mu t^{\mu-1}\,dt,$$

où μa, μb, μc, ... sont des entiers.

Soit à cet effet un point (x_0, y_0) pris à l'infini sur la courbe et

$$0 = F(x, y) = (y + \lambda x)(y + \lambda_1 x) + \alpha y + \beta x + \gamma$$

l'équation de la conique; la sécante

$$y + \lambda x = t \tag{1}$$

sera, quel que soit le paramètre t, parallèle à une asymptote. Substituant dans $F(x, y) = 0$, il vient

$$t(y + \lambda + x) + \alpha y + \beta x + \gamma = 0; \tag{2}$$

les équations (1), (2) donneront x et y en fonction de t.

Intégration des fonctions transcendantes.

1022. On calcule les intégrales

$$\mathrm{I} = \int f(e^{ax})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, en posant $e^{ax} = t$, d'où

$$x = \frac{1}{a}\log t, \qquad dx = \frac{dt}{d};$$

on a ainsi

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt,$$

et l'on est ramené à l'intégrale d'une fonction rationnelle.

1023. Ce procédé convient au calcul des intégrales

$$\mathrm{I} = \int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

f étant une fonction rationnelle, mais il introduit des imaginaires. Si ceux-ci ne disparaissent pas d'eux-mêmes, on pose

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = t,$$

d'où

$$x = 2\operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x \qquad \cos\frac{1}{2}x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et l'on n'a plus à intégrer qu'une fonction rationnelle de la variable t.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sin x};$$

posant

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = t,$$

cette intégrale devient

$$\int \frac{dt}{t} = \log t + c = \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}x + c.$$

A cette intégrale se ramène celle que voici :

$$\int \frac{d\xi}{a\sin\xi + b\cos\xi};$$

posons en effet

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi;$$

l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{d\xi}{\cos\varphi\sin\xi + \sin\varphi\cos\xi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{d\xi}{\sin(\xi+\varphi)},$$

ou, en posant $\xi + \varphi = x$,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\xi+\varphi) + c.$$

1024. Soit

$$\mathrm{I}_m = \int x^m e^{nx}\,dx;$$

on a, en intégrant par parties,

$$\mathrm{I}_m = x^m\frac{e^{nx}}{n} = \frac{m}{n}\int x^{m-1}e^{nx}\,dx = x^m\frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\mathrm{I}_{m-1},$$

ce qui est une formule de réduction. Son emploi répété conduit à la dernière intégrale

$$\mathrm{I}_0 = \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n}.$$

L'intégration faite, on remplacera les exponentielles imaginaires par leurs expressions en sinus et cosinus (913) : cela fera disparaître les imaginaires de l'intégrale.

On rencontre les intégrales $\mathbf{I}_m$ quand on veut intégrer une expression de la forme

$$\int f(x, e^{ax}, b^{bx}, \ldots, \sin\alpha x, \cos\alpha x, \sin\beta x, \cos\beta x, \ldots)\,dx,$$

f désignant un polynôme, car on effectue une telle intégration en remplaçant les sinus et les cosinus par leurs valeurs en exponentielles (913).

1025. On ramène les intégrales

$$\int f(x, \log x)\,dx, \qquad \int f(x, \arcsin x)\,dx,$$

où f est un polynôme, à celles qu'on vient d'étudier, en prenant respectivement $\log x$, $\arcsin x$ comme variables.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants, dépourvues de second membre.

1025. Les équations *linéaires* sont de la forme

$$(1)\qquad a_1\frac{d^n y}{dx^n}+a_2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_3\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+a_{n-1}\frac{d^2y}{dx^2}+a_n\frac{dy}{dx}+a_{n+1}y=\mathrm{F}(x);$$

si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ sont des quantités *indépendantes* de x, c'est-à-dire *constantes*, on dit que l'équation est *à coefficients constants*.

Considérons d'abord l'équation

$$(2)\qquad a_1\frac{d^2y}{dx^2}+a_2\frac{dy}{dx}+a_3y=0;$$

posons

$$y=e^{sx};$$

on aura

$$\frac{dy}{dx}=se^{sx},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=s^2e^{sx},$$

et, en substituant dans l'équation (2), il viendra, après avoir supprimé le facteur commun e^{sx},

$$(3)\qquad a_1s^2+a_2s+a_3=0;$$

la fonction e^{sx} n'est donc solution de l'équation différentielle (2) que si s est l'une des deux racines s_1, s_2 de l'équation (3). Nous obtenons ainsi deux solutions

$$y_1=e^{s_1x},\qquad y_2=e^{s_2x}$$

de l'équation (2).

Soit

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \tag{4}$$

où C_1, C_2 sont des constantes; on a

$$\frac{dy}{dx} = C_1 s_1 e^{s_1 x} + C_2 s_2 e^{s_2 x}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 s_1^2 e^{s_1 x} + C_2 s_2^2 e^{s_2 x}, \tag{6}$$

et si l'on remplace y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ par leurs valeurs (4), (5), (6) dans l'équation proposée (2), il vient

$$C_1(a_1 s_1^2 + a_2 s_1 + a_3) e^{s_1 x} + C_2(a_1 s_2^2 + a_2 s_2 + a_3) e^{s_2 x} = 0;$$

les coefficients de $C_1 e^{s_1 x}$, $C_2 e^{s_2 x}$ étant identiquement nuls, puisque s_1, s_2 sont des racines de l'équation (3), la fonction

$$C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$$

est solution de l'équation différentielle linéaire (2), quelles que soient les constantes arbitraires C_1, C_2 : *comme la solution générale de l'équation différentielle du second ordre* (2) *doit contenir deux constantes arbitraires* (969), *la fonction* $C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$ *est la solution générale de l'équation* (2).

L'équation (3) a reçu le nom d'*équation caractéristique* de l'équation différentielle (2).

1026. Si les racines s_1, s_2 de l'équation caractérisque sont imaginaires et de la forme

$$s_1 = \alpha + \beta i, \quad s_2 = \alpha - \beta i,$$

on écrira la solution générale (4) comme il suit :

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$$

ou bien (913)

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}(C_1 + C_2)\cos\beta x + i e^{\alpha x}(C_1 - C_2)\sin\beta x. \end{aligned}$$

C_1 et C_2 étant *arbitraires*, y sera réel si C_1, C_2 sont de la

forme

$$C_1 = \frac{c_1 - c_2 i}{2}, \qquad C_2 = \frac{c_1 + c_2 i}{2}$$

et y prendra la forme

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x} \times c_1 \times \cos\beta x - i e^{\alpha x} \times c_2 i \times \sin\beta x \\ &= c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x, \end{aligned}$$

c'est la solution générale, sous forme réelle, de l'équation (2).

1027. *Dans le cas où les deux racines de l'équation caractéristique* (3) *sont égales, la fonction*

$$y = (c_1 x + c_2) e^{sx}$$

est la solution générale de l'équation (2); ici, en effet,

$$\frac{dy}{dx} = (C_1 x + C_2) s e^{sx} + C_1 e^{sx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (C_1 x + C_2) s^2 e^{sx} + 2 C_1 s e^{sx};$$

portons ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ dans l'équation (2); il vient, après suppression du facteur e^{sx},

$$\begin{aligned} &a_1 [(C_1 x + C_2) s^2 + 2 C_1 s] \\ &\quad + a_2 [(C_1 x + C_2) s + C_1] + a_3 (C_1 x + C_2) = 0, \end{aligned}$$

le coefficient de $C_1 x + C_2$ est nul (3); il reste donc à vérifier que

$$2 a_1 C_1 s + a_2 C_1$$

ou

$$2 a_1 s + a_2$$

est identiquement nul; il en est bien ainsi (*Alg. élém.*, 238).

1028. Semblablement, et de façon tout à fait générale, considérons l'équation, toujours dépourvue de second membre,

$$(1) \qquad a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \frac{dy}{dx} + a_{n+1} y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \ldots + a_n s + a_{n+1} = 0.$$

Nous verrons plus tard que cette dernière équation peut toujours être mise sous la forme

$$(s-s_1)^{p_1}(s-s_2)^{p_2}\dots(s-s_h)^{p_h}$$

avec cette condition

$$p_1+p_2+\dots+p_h=n.$$

Cela posé,

$$y=C_1e^{s_1x}+C_2e^{s_2x}+\dots+C_he^{s_hx},$$

où C_1, C_2, ..., C_h *sont des polynômes en* x *de degrés respectifs* p_1-1, p_2-1, p_h-1, *est la solution ou intégrale arbitraire générale de l'équation* (1): si, par exemple, $p_1=1$, C_1 est simplement une constante arbitraire; si $p_1=2$, C_1 est de la forme

$$C_1=C_1'x+C_1'',$$

où C_1', C_1'' sont des constantes arbitraires.

Si l'équation caractéristique a des racines imaginaires, ces racines se présentent par *couples* de la forme

$$s_1=\alpha+\beta i, \qquad s_2=\alpha-\beta i \quad (\text{avec } p_1=p_2),$$

et l'on a, dans l'intégrale générale, les deux termes

$$C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}$$

qu'on écrira

$$e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)]$$
$$=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

c_1 et c_2 des polynômes de degré p_1-1, arbitraires comme C_1, C_2.

1029. Applications. — I. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-3y=0,$$

l'équation caractéristique

$$s^3-3s^2+s-3=0$$

a pour racines

$$s_1=i, \qquad s_2=-i, \qquad s_3=3;$$

l'intégrale générale est donc

$$C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 e^{3x},$$

et nous l'écrirons

$$C_1(\cos x + i \sin x) + C_2(\cos x - i \sin x) + C_3 e^{3x}$$
$$= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x + C_3 e^{3x}$$

ou bien

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^{3x},$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes arbitraires.

Il va de soi que $\cos x$, $\sin x$, e^{3x} sont des intégrales particulières.

II. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

L'équation caractéristique

$$s^3 - 3s^2 - 2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(s+1)^2(s-2) = 0,$$

a la racine double 1, et la racine simple 2.

L'intégrale générale de l'équation proposée est

$$(C_1 x + C_2)e^x + C_3 e^{2x}.$$

Équations différentielles linéaires avec second membre
Cas général.

1030. Soit l'équation différentielle

$$a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = f(x). \qquad (1)$$

L'équation *sans second membre*

$$a_1 \frac{d^2y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 0 \tag{2}$$

a pour intégrale générale

$$C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} \tag{3}$$

où C_1, C_2 sont des *constantes* arbitraires, et s_1, s_2 les racines de l'équation caractéristique

$$a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$$

Considérons la fonction

$$y = C_1(x) e^{s_1 x} + C_2(x) e^{s_2 x}; \tag{4}$$

on a

$$\frac{dy}{dx} C_1'(x) e^{s_1 x} + C_2'(x) e^{s_2 x} + C_1(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x};$$

posons

$$C_1'(x) e^{s_1 x} + C_2'(x) e^{s_2 x} = 0; \tag{5}$$

il en résulte

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x}, \tag{6}$$

puis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1'(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2' x s_2 e^{s_2 x} + C_1(x) s_1^2 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x}. \tag{7}$$

Portons les valeurs (4), (6), (7) de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation proposée (1); il vient

$$a_1[C_1'(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2' x s_2 e^{s_2 x}] + a_1[C_1(x) s_1^2 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x}]$$
$$+ a_2[C_1(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x}] + a_3[C_1(x) e^{s_1 x} + C_2(x) e^{s_2 x}] = f(x).$$

Cette équation se réduit à

$$a_1[C_1'(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2'(x) s_2 e^{s_2 x}] = f(x); \tag{8}$$

car

$$a_1[C_1(x) s_1^2 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2^2 e^{s_2 x}]$$
$$+ a_2[C_1(x) s_1 e^{s_1 x} + C_2(x) s_2 e^{s_2 x}] + a_3[C_1(x) e^{s_1 x} + C_2(x) e^{s_2 x}]$$
$$= C_1(x)[a_1 s_1^2 + a_2 s_1 + a_3] e^{s_1 x} + C_2(x)[a_1 s_2^2 + a_2 s_2 + a_3] e^{s_1 x},$$

et les termes entre [ ] sont nuls puisque s_1, s_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Résolvons les équations (5), (6) par rapport à $C'_1(x)$; on trouvera pour $C'_1(x)$, $C'_2(x)$ des expressions de la forme

$$C'_1(x) = \frac{dC_1(x)}{dx} = f_1(x), \qquad C'_2(x) = \frac{dC_2(x)}{dx} = f_2(x),$$

d'où

$$C_1(x) = \int f_1(x)\,dx, \qquad C_2(x) = \int f_2(x)\,dx.$$

On démontre que la fonction (4)

$$y = C_1(x)e^{s_1 x} + C_2(x)e^{s_2 x}$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). *On dit que l'intégration de cette équation est ramenée aux quadratures*

$$\int f_1(x)\,dx, \quad \int f_2(x)\,dx.$$

1031. D'une manière générale, soit l'équation différentielle

$$(1) \qquad a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_3 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n+1} y = f(x),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont des constantes (*ou même des fonctions de* x); son intégrale générale se déduit par quadratures de l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_3 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n+1} y = 0$$

Soit, en effet,

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x),$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des *constantes* arbitraires, l'intégrale générale de l'équation sans second membre, intégrale que nous savons former dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont des constantes, posons, *en remplaçant les constantes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *par des fonctions de* x,

$$(2) \qquad y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x);$$

posons encore

$$(3)\quad \begin{cases} C'_1(x)\varphi_1(x) + C'_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + C'_n(x)\varphi_n(x) = 0, \\ C'_1(x)\varphi'_1(x) + C'_2(x)\varphi'_2(x) + \ldots + C'_n(x)\varphi'_n(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C'_1(x)\varphi_1^{n-2}(x) + C'_2(x)\varphi_2^{n-2}(x) + \ldots + C'_n(x)\varphi_n^{n-2}(x) = 0; \end{cases}$$

calculons maintenant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ en partant de la relation (2) et en tenant compte des relations (3); il vient

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = C_1(x)\varphi'_1(x) + C'_2(x)\varphi'_2(x) + \ldots + C_n(x)\varphi'_n(x), \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1(x)\varphi''_1(x) + C''_2(x)\varphi''_2(x) + \ldots + C_n(x)\varphi''_n(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1(x)\varphi_1^{n-1}(x) + C_2(x)\varphi_2^{n-1}(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n^{n-1}(x), \\ \frac{d^ny}{dx^n} = C'_1(x)\varphi_1^{n-1}(x) + C'_2(x)\varphi_2^{n-1}(x) + \ldots + C'_n(x)\varphi_n^{n-1}(x) \\ \qquad + C_1(x)\varphi_1^n(x) + C_2(x)\varphi_2^n(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n^n(x); \end{cases}$$

remplaçons enfin y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ par leurs valeurs (2) et (4) dans l'équation proposée (1).: les termes $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ disparaîtront, il restera simplement une relation entre $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, $\ldots$, $C'_n(x)$, qu'on joindra aux $n-1$ relations (3), et cela constituera un système de n équations dont $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, $\ldots$, $C'_n(x)$ seront les inconnues; ayant résolu ce système par rapport à $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, $\ldots$, $C'_n(x)$, on trouvera

$$C'_1(x) = \frac{dC_1(x)}{dx} = f_1(x), \qquad C'_2(x) = \frac{dC_2(x)}{dx} = f_2(x), \qquad \ldots,$$
$$C'_n(x) = \frac{dC_n(x)}{dx} = f_n(x),$$

on en déduira

$$C_1(x) = \int f_1(x)\,dx, \qquad C_2(x) = \int f_2(x)\,dx, \qquad \ldots,$$
$$C_n(x) = \int f_n(x)\,dx$$

et (2) *la fonction*

$$y = \varphi_1(x)\int f_1(x)\,dx + \varphi_2(x)\int f_2(x)\,dx + \ldots + \varphi_n(x)\int f_n(x)\,dx$$

sera l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire à second membre (1).

Équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est un polynôme en x, $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, ..., $\sin\gamma x$, $\cos\gamma x$, ...

1032. En remplaçant $\sin\gamma x$, $\cos\gamma x$ par leurs expressions (913),

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

le second membre de l'équation différentielle prend la forme

$$\begin{aligned}&(b_1 x^\lambda + b_2 x^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda x + b_{\lambda+1}) e^{s_1 x}\\ &+ (c_1 x^\mu + c_2 x^{\mu-1} + \ldots + c_\mu x + c_{\mu+1}) e^{s_2 x} + \ldots\end{aligned}$$

et l'équation différentielle est elle-même de la forme

$$\begin{aligned}(1)\quad & a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \frac{dy}{dx} + a_{n+1} y\\ &= (b_1 x^\lambda + b_2 x^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda x + b_{\lambda+1}) e^{s_1 x}\\ &\quad + (c_1 x^\mu + c_2 x^{\mu-1} + \ldots + c_\mu x + c_{\mu+1}) e^{s_2 x} + \ldots,\end{aligned}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_{\lambda+1}, c_1, c_2, \ldots, c_{\mu+1}, \ldots$ sont des quantités constantes.

Il suffit évidemment d'intégrer les équations différentielles particulières

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \frac{dy}{dx} + a_{n+1} y\\ &\quad = (b_1 x^\lambda + b_2 x^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda x + b_{\lambda+1}) e^{s_1 x},\\ &a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \frac{dy}{dx} + a_{n+1} y\\ &\quad = (c_1 x^\lambda + c_2 x^{\lambda-1} + \ldots + c_\lambda x + c_{\lambda+1}) e^{s_2 x},\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}\right.$$

si $y = F_1(x)$, $y = F_2(x)$, ... sont les intégrales générales de ces dernières équations, l'équation proposée (1) aura pour intégrale générale

$$y = F_1(x) + F_2(x) + \ldots.$$

Considérons donc l'une quelconque des équations particulières à étudier, l'équation (2) par exemple, et débutons par

l'étude d'un cas particulier, celui de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = \cos nx. \tag{3}$$

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0;$$

son équation caractéristique

$$s^2 + m^2 = 0$$

admet les deux racines simples $\pm mi$; elle a donc pour intégrale générale

$$C_1 e^{mi} + C_2 e^{-mi}$$

ou

$$C_1(\cos mx + i\sin mx) + C_2(\cos mx - i\sin mx),$$

ou encore

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx, \tag{4}$$

c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

Revenons à l'équation *avec second membre* (3). Il est facile de constater qu'elle admet une solution *particulière* de la forme

$$y = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx; \tag{5}$$

en effet, dans cette hypothèse,

$$\frac{dy}{dx} = -A_1 n \sin nx + A_2 n \cos nx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A_1 n^2 \cos nx - A_2 n^2 \sin nx,$$

et si l'on porte ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation (3), il vient

$$-A_1 n^2 \cos nx - A_2 n^2 \sin nx + A_1 m^2 \cos nx + A_2 m^2 \sin nx = \cos nx,$$

équation qui sera vérifiée si l'on détermine A_1, A_2 par les

conditions

$$-A_1 n^2 + A_1 m^2 = 1, \qquad -A_2 n^2 + A_2 m^2 = 0,$$

c'est-à-dire si

$$A_1 = \frac{1}{m^2 - n^2}, \qquad A_2 = 0.$$

Ainsi, l'équation (3) admet la solution *particulière*

$$y = \frac{\cos nx}{m^2 - n^2}. \tag{6}$$

Cela posé, *la solution générale de l'équation différentielle s'obtiendra en ajoutant l'une à l'autre la solution générale* (4) *de l'équation sans second membre à la solution particulière* (6) *de l'équation pourvue du second membre; cette solution sera*

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + \frac{\cos nx}{m^2 - n^2}.$$

Dans le cas où $m^2 = n^2$, l'équation (3) n'admet plus la solution particulière (6), mais celle-ci :

$$\frac{x \sin mx}{2m}, \tag{7}$$

et l'équation (3), qui est ici

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = \cos mx$$

a pour intégrale générale

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + \frac{x \sin mx}{2m}.$$

La solution particulière (7) est ici de la forme

$$x(A_1 \cos mx + A_2 \sin mx). \tag{8}$$

D'une manière générale, on intègre l'équation (2),

$$a_1 \frac{d^n y}{dx^n} + a_2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \frac{dy}{dx} + a_{n+1} y = (b_1 x^\lambda + b_2 x^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda x + b_{\lambda+1}) e^{s_1 x} : \tag{1}$$

1° En cherchant l'intégrale générale de l'équation sans second membre;

2° En ajoutant à cette intégrale générale une intégrale particulière de l'équation à second membre (1).

1033. Deux cas sont à distinguer pour la recherche de l'intégrale particulière :

PREMIER CAS. — *s_1 diffère des racines de l'équation caractéristique. Ici, l'équation* (1) *admet une intégrale particulière de la forme*

$$(\alpha_1 x^\lambda + \alpha_2 x^{\lambda-1} + \ldots + \alpha_\lambda x + \alpha_{\lambda+1}) e^{s_1 x}.$$

On calcule $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \alpha_{\lambda+1}$ en remplaçant y par cette fonction dans l'équation (1).

APPLICATION. — Revenons à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = \cos nx \qquad (m^2 \neq n^2); \tag{2}$$

écrivons-la (913),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}. \tag{3}$$

Considérons d'abord l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = \frac{e^{inx}}{2}; \tag{4}$$

elle admet une intégrale particulière de la forme ($\lambda = 0$),

$$y = \alpha_{\lambda+1} e^{inx}; \tag{5}$$

en effet, ici,

$$\frac{dy}{dx} = in\alpha_{\lambda+1} e^{inx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -n^2 \alpha_{\lambda+1} e^{inx}$$

et, en portant dans l'équation (4), il vient, en supprimant le facteur e^{inx},

$$-n^2 \alpha_{\lambda+1} + m^2 \alpha_{\lambda+1} = \frac{1}{2};$$

d'où

$$\alpha_{\lambda+1} = \frac{1}{2(m^2 - n^2)}$$

et l'intégrale (5) est

$$y = \frac{e^{inx}}{2(m^2 - n^2)}.$$

On voit de même que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = \frac{-e^{-inx}}{2}$$

admet l'intégrale particulière

$$y = -\frac{e^{-inx}}{2(m^2 - n^2)};$$

l'équation (3), ou, ce qui est la même chose, l'équation (2), admet donc l'intégrale particulière

$$y = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2(m^2 - n^2)}$$

ou (913)

$$y = \frac{\cos nx}{m^2 - n^2},$$

comme nous l'avions déjà dit.

Deuxième cas. — *s_1 est égal à l'une des racines de l'équation caractéristique; ici, la solution particulière est de la forme*

$$x^\rho (a_1 x^\lambda + \alpha_2 x^{\lambda-1} + \ldots + \alpha_\lambda x + \alpha_{\lambda+1}) e^{s_1 x}.$$

Application. — Revenons à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = \cos mx = \frac{e^{mix} - e^{-mix}}{2}, \tag{6}$$

et cherchons en premier lieu une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2 y = \frac{e^{mix}}{2}, \tag{7}$$

en posant ($\lambda = 0$)

$$y = \alpha_{\lambda+1} x^\rho e^{mix}; \tag{8}$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_{\lambda+1}\rho x^{\rho-1}e^{mix} + \alpha_{\lambda+1} mi x^{\rho} e^{mix},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha_{\lambda+1}\rho(\rho-1)x^{\rho-2}e^{mix} + 2mi\alpha_{\lambda+1}\rho x^{\rho-1}e^{mix} - m^2\alpha_{\lambda+1}x^{\rho}e^{mix};$$

portons dans l'équation (7), en supprimant le facteur e^{mix}; il vient

$$\rho(\rho-1)\alpha_{\lambda+1}x^{\rho-2} + 2mi\rho\alpha_{\lambda+1}x^{\rho-1} - m^2\alpha_{\lambda+1}x^{\rho} + m^2\alpha_{\lambda+1}x^{\rho} = \frac{1}{2},$$

relation qui sera identiquement vérifiée si

$$\rho = 1, \qquad \alpha_{\lambda+1} = \frac{1}{4mi};$$

ce qui montre (8) que la fonction

$$y = \frac{xe^{mix}}{4mi}$$

est une solution particulière de l'équation (8).

De même, la fonction

$$y = -\frac{xe^{-mix}}{4mi}$$

est une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = -\frac{e^{-mix}}{2}.$$

Il en résulte que

$$y = \frac{xe^{mix} - xe^{-mix}}{4mi} = \frac{x\sin mx}{2m}$$

sera une solution particulière de l'équation (6), ainsi que nous l'avions vu.

1034. Il arrive fréquemment que le second membre de l'équation différentielle se réduit à un polynôme

$$b_1x^{\lambda} + b_2x^{\lambda-1} + \ldots + b_{\lambda}x + b_{\lambda+1};$$

ici, l'intégrale particulière est de la forme ($s_1 = 0$)

$$\alpha_1 x^\lambda + \alpha_2 x^{\lambda-1} + \ldots + \alpha_\lambda x + \alpha_{\lambda+1},$$

et il est particulièrement aisé de la former.

APPLICATION. — Soit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2; \tag{1}$$

posons, pour chercher une solution particulière ($\lambda = 2$),

$$y = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3;$$

nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha_1 x + \alpha_2, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha_1$$

et, portant dans l'équation (1), il vient

$$2\alpha_1 - 4(2\alpha_1 x + \alpha_2) + 4(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) = x^2$$

ou

$$2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_3 + (4\alpha_2 - 8\alpha_1)x + 4\alpha_1 x^2 = x^2,$$

ce qui suppose

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 - 2\alpha_1 &= 0, \\ 4\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_3 = \frac{3}{8}$$

et conduit à la solution particulière suivante :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

de l'équation (1).

Le lecteur pourra trouver lui-même la solution générale

$$(C_1 + C_2 x)e^{2x},$$

de l'équation (1) privée de son second membre, c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0;$$

il en résulte que l'équation (1) a pour intégrale générale la fonction

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES.

1035. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = y';$$

on aura

$$\frac{dy'}{dx} = f(x, y, y')$$

Nous pouvons ramener l'intégration aux quadratures toutes les fois que la fonction f ne dépend que d'une seule des trois quantités x, y, y'. En effet :

1° Si f ne dépend que de x,

$$\frac{dy'}{dx} = f(x), \qquad y' = \int_0^x f(x)\,dx + c,$$

$$y = \int_0^x y'\,dx + c' = \int_0^x dx \left[\int_0^x f(x)\,dx\right] + cx + c'.$$

2° Si f ne dépend que de y,

$$\frac{dy'}{dx} = f(y'), \qquad dx = \frac{dy'}{f(y')}, \qquad dy' = y'\,dx = \frac{y'\,dy'}{f(y')},$$

d'où

$$x=\int_0^{y'}\frac{dy'}{f(y')}+c,\qquad y=\int_0^{y'}\frac{y'\,dy'}{f(y')}+c';$$

x et y sont donc exprimés en fonction de la nouvelle variable y'.

3° **Si f ne dépend que de y, on a**

$$y'\,dy'=f(y)\,dy;$$

le premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2}y'^2$; donc

$$y'^2=\int_0^{y}2f(y)\,dy+c,\qquad y'=\sqrt{\int_0^{y}2f(y)\,dy+c};$$

ensuite,

$$y'=\frac{dy}{dx},\qquad dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{\sqrt{\int_0^{y}2f(y)\,dy+c}},$$

$$x=\int\frac{dy}{y'}=\int_0^{y}\frac{dy}{\sqrt{\int_0^{y}2f(y)\,dy+c}}+c'.$$

Application I. — **L'équation différentielle**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{ny}$$

rentre dans le type précédent (3°); nous allons intégrer l'équation plus générale

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{ny}(1+y'^2),$$

qui définit les courbes planes dont le rayon de courbure en chaque point est proportionnel à la portion N de normale interceptée par l'axe des x.

En effet, le rayon de courbure R est donné par la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et si l'on désigne par α l'angle de la tangente avec l'axe des x, on a

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

donc

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ny\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{ny}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],$$

équation qui équivaut aux deux suivantes :

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{ny}(1 + y'^2), \qquad \frac{dy}{dx} = y'.$$

Éliminons dx, il vient

$$\frac{y'\,dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{ny};$$

le premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2}l(1 + y'^2)$, le second membre est la différentielle de $\frac{1}{n}ly$; donc

$$\frac{1}{2}l(1 + y'^2) = \frac{1}{n}ly + C;$$

nous écrirons, pour la commodité des calculs,

$$C = -\frac{1}{n}lc,$$

et il viendra

$$\frac{1}{2}\,l(1+y'^2)=\frac{1}{n}\,(ly-lc),$$

$$1+y'^2=\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

$$y'=\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{n}}-1}.$$

puis

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}-1},\qquad dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}-1}},$$

$$x=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}-1}}-c'.$$

Si $n=-1$,

$$x=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=-\sqrt{c^2-y^2}+c',$$

$$(x-c')^2+y^2=c^2;$$

la courbe est un *cercle* ayant son centre sur l'axe des y.

Si $n=1$,

$$x=\int\frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=c\,l\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}+c',$$

$$y+\sqrt{y^2-c^2}=ce^{\frac{x-c'}{c}};\tag{1}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(y+\sqrt{y^2-c^2})(y-\sqrt{y^2-c^2})}{y-\sqrt{y^2-c^2}}=ce^{\frac{x-c'}{c}},$$

$$\frac{y^2-(y^2-c^2)}{y-\sqrt{y^2-c^2}}=ce^{\frac{x-c'}{c}},$$

$$\frac{c^2}{y-\sqrt{y^2-c^2}}=ce^{\frac{x-c'}{c}},$$

$$y-\sqrt{y^2-c^2}=c\,\frac{1}{e^{\frac{x-c'}{c}}}=ce^{-\frac{x-c'}{c}};\tag{2}$$

il en résulte, par addition de (1) et (2),

$$y = c\,\frac{e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}}{2},$$

équation d'une *chaînette*.

Si $n = -2$,

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy;$$

posons

$$y = \frac{c}{2}(1-\cos\varphi), \qquad \text{d'où} \qquad dy = \frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi;$$

il viendra

$$x = \int \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}\,\frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi = \int \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,\frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$= \frac{c}{2}\int 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{c}{2}\int (1-\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{c}{2}(\varphi - \sin\varphi) + c',$$

équation d'une *cycloïde*.

Si $n = 2$,

$$x = \int \sqrt{\frac{c}{y-c}}\,dy = 2\sqrt{c(y-c)} + c',$$

$$(x-c')^2 = 4c(y-c),$$

équation d'une *parabole*.

Application II. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe de masse M par une force $\frac{k\mathrm{M}}{r^2}$, k désignant une constante (loi de Newton).

On démontre en mécanique que x, y étant les coordonnées du point attiré,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k\mathrm{M}}{r^2}\,\frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k\mathrm{M}}{r^2}\,\frac{y}{r}.$$

On a

$$0 = y\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\,\frac{dx}{dt} - x\,\frac{dy}{dt}\right),$$

donc

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c; \tag{3}$$

ensuite,

$$0 = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{kM}{r^2}\frac{x\,dx + y\,dy}{r\,dt};$$

or

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad x\,dx + y\,dy = r\,dr,$$

donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dfrac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + \displaystyle\int \frac{kM}{r^2}\,dr = 0, \\ \frac{1}{2}\dfrac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \dfrac{kM}{r} + c' = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Remplaçons x, y par les coordonnées polaires

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega,$$

d'où

$$dx = \cos\omega\,dr - r\sin\omega\,d\omega,$$
$$dy = \sin\omega\,dr + r\cos\omega\,d\omega,$$
$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2,$$

il vient (4)

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2 + r^2\,d\omega^2}{dt^2} - \frac{kM}{r} + c' = 0 \tag{5}$$

et (3)

$$r\sin\omega\left(\cos\omega\frac{dr}{dt} - r\sin\omega\frac{d\omega}{dt}\right)$$
$$- r\cos\omega\left(\sin\omega\frac{dr}{dt} + r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\right) = c,$$

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = 1 - c. \tag{6}$$

Portons cette valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ dans (5); nous aurons

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{c^2}{r^2} - 2\frac{kM}{r} + 2c' = 0,$$

$$(7)\quad \begin{cases} dt^2 = \dfrac{dr}{-\dfrac{c^2}{r^2} + 2\dfrac{kM}{r} - 2c'} = \dfrac{r^2\,dr^2}{-2c'r^2 + 2kMr - c^2}, \\ dt = \dfrac{r\,dr}{\sqrt{-2c'r^2 + 2kMr - c^2}}, \end{cases}$$

et (6)

$$(8)\qquad d\omega = \frac{-c\,dt}{r^2} = -\frac{c\,dr}{r\sqrt{-2c'r^2 + 2kMr - c^2}}.$$

On a donc

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-2c'r^2 + 2kMr - c^2}},$$

$$\omega = -\int \frac{c\,dr}{\sqrt{-2c'r^2 + 2kMr - c^2}},$$

intégrales que nous savons calculer (1021); ici, il est d'usage de poser

$$r = \frac{1}{u}, \qquad dr = -\frac{du}{u^2}$$

et l'on a

$$\omega = \int \frac{c\,du}{\sqrt{-2c' + 2kMu - c^2u^2}}$$

$$= \int \frac{c^2\,du}{\sqrt{k^2M^2 - 2c'c^2 - (c^2u - kM)^2}}$$

$$= -\arccos\frac{c^2u - kM}{\sqrt{k^2M^2 - 2c'c^2}} + c',$$

d'où

$$c^2u = kM + \sqrt{k^2M^2 - 2c'e^2}\cos(\omega - c'),$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{c^2}{kM + \sqrt{k^2M^2 - 2c'c^2}\cos(\omega - c')}.$$

Si l'on pose

$$\frac{c^2}{kM} = p, \qquad \sqrt{1 - \frac{2c'c^2}{k^2M^2}} = e,$$

on a enfin

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\omega - c'')}. \tag{9}$$

Pour calculer t, on se reportera à la relation (6), qui donne (9)

$$dt = \frac{1}{c} r^2\, d\omega = \frac{p^2\, d\omega}{c[1 + e\cos(\omega - c'')]^2},$$

et t est obtenu par la quadrature

$$t = \frac{p^2}{c} \int \frac{d\omega}{[1 + e\cos(\omega - c'')]^2}.$$

1036. Équations dont on peut séparer les variables :

$$dy - f(x)\,\varphi(y)\,dx = 0. \tag{I}$$

On a

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx;$$

l'intégrale est

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} + c = \int f(x)\,dx.$$

$$dy - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0, \tag{II}$$

appelées *équations homogènes*.

Posons

$$y = ux, \qquad \text{d'où} \qquad dy = u\,dx + x\,du;$$

l'équation deviendra

$$u\,dx + x\,du - \varphi(u)\,dx = 0;$$

divisons par

$$y - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) x = x[u - \varphi(u)];$$

il vient

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - \varphi(u)} = 0,$$

donc

$$\int \frac{dx}{x} + c + \int \frac{du}{u - \varphi(u)} = 0.$$

(III) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

1° Si $ab' - a'b$ n'est pas nul, posons

$$ax + by + c = \xi, \qquad a'x + b'y + c' = \eta;$$

on en tire

$$a\,dx + b\,dy = d\xi, \qquad a'\,dx + b'\,dy = d\eta,$$

et dx, dy sont de la forme

$$dx = \mathrm{A}\,d\xi + \mathrm{B}\,d\eta, \qquad dy = \mathrm{A}'\,d\xi + \mathrm{B}'\,d\eta,$$

où $\mathrm{A}_1\mathrm{B}$, $\mathrm{A}'_1\mathrm{B}'$ sont aisés à calculer.

L'équation transformée

$$\frac{\mathrm{A}'\,d\xi + \mathrm{B}'\,d\eta}{\mathrm{A}\,d\xi + \mathrm{B}\,d\eta} = f\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

sera homogène (II).

2° Si $ab' - a'b' = 0$, $a'x + b'y + c'$ est de la forme

$$a'x + b'y + c' = m(ax + by + c) + n$$

et l'on a

$$\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} = \frac{ax + by + c}{m(ax + by + c) + n} = \frac{1}{m + n : (ax + by + c)};$$

$f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ est donc une fonction de $ax + by + c$ et l'on peut écrire

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(ax + by + c).$$

On intégrera cette équation en posant

$$\xi = ax + by + c,$$
$$d\xi = a\,dx + b\,dy,$$

d'où

$$dx = \frac{1}{a}(d\xi - b\,dy),$$

et en remplaçant x par ξ, dx par $d\xi$, ce qui donne

$$\frac{a\,dy}{d\xi - b\,dy} = \varphi(\xi) \qquad \text{ou} \qquad dy = \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{a + b\varphi(\xi)};$$

par conséquent,

$$y + c = \int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{a + b\varphi(\xi)}.$$

Dans les équations (I), (II), (III), nous avons *séparé les variables*, procédé élémentaire d'intégration qu'on applique toutes les fois qu'il est possible.

1037. Équations *linéaires :*

(10) $$\frac{dy}{dx} + \mathrm{X}(x)y + \mathrm{X}_1(x) = 0.$$

1° $$\mathrm{X}_1(x) = 0;$$

alors

(11) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \mathrm{X}(x)y = 0, \\ \dfrac{dy}{y} + \mathrm{X}\,dx = 0, \end{cases}$$

(12) $$\begin{cases} ly + \displaystyle\int \mathrm{X}\,dx - l\mathrm{C} = 0, \\ y = \mathrm{C}e^{-\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx}. \end{cases}$$

2° $$\mathrm{X}_1(x) \neq 0.$$

Nous allons chercher à vérifier l'équation par une fonction de la forme précédente (12), où C n'est plus une constante,

mais une fonction de x :

$$y = \mathrm{C}(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\, dx}.$$

Posons à cet effet

$$y = \mathrm{Y}z; \tag{13}$$

l'équation proposée (10) devient

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} z + \mathrm{Y}\frac{dz}{dx} + \mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}z + \mathrm{X}_1(x) = 0,$$

$$\left[\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}\right] z + \mathrm{Y}\frac{dz}{dx} + \mathrm{X}_1(x) = 0.$$

Si Y est une intégrale quelconque de (11), on a

$$\mathrm{Y}\frac{dz}{dx} + \mathrm{X}_1(x) = 0,$$

$$dz = -\frac{\mathrm{X}_1(x)}{\mathrm{Y}}\, dx,$$

$$z = -\int \frac{\mathrm{X}_1(x)}{\mathrm{Y}}\, dx + c,$$

et finalement (13)

$$y = \mathrm{Y}\left[c - \int \frac{\mathrm{X}_1(x)}{\mathrm{Y}}\, dx\right]$$

ou, puisque Y est une intégrale quelconque de (12), qu'on pourra prendre égale à $e^{-\int \mathrm{X}\, dx}$,

$$y = e^{-\int \mathrm{X}\, dx}\left[c - \int \frac{\mathrm{X}_1(x)}{\mathrm{Y}}\, dx\right],$$

où les limites inférieures des deux intégrales peuvent être choisies à volonté.

1038. *Équation de Bernoulli* :

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) y^m.$$

On a

$$\frac{1}{1-m}\frac{dy^{1-m}}{dx} = \mathrm{P}(x)\,y^{1-m} + \mathrm{Q}(x);$$

posons

$$y^{1-m} = u;$$

il vient

$$\frac{1}{1-m}\frac{du}{dx} = \mathrm{P}(x)u + \mathrm{Q}(x),$$

équation linéaire (1037).

1039. *Équation de Clairaut.* — On appelle ainsi une équation de la forme

$$y = xy' + f(y').$$

Différentions les deux membres et posons $y' = p$; nous arrivons à l'équation

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Cette équation est vérifiée si l'on pose

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = \mathrm{C}.$$

L'intégrale générale de l'équation de Clairaut est donc

$$y = \mathrm{C}x + f(\mathrm{C}).$$

LIVRE DOUZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

PREMIERS PRINCIPES.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Définitions.

Toute équation à une seule inconnue ou à une seule variable qui peut, après la disparition des dénominateurs, celle des radicaux et la transposition des termes, être ramenée à la forme

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

est appelée *algébrique*.

Ainsi, toute équation algébrique est de la forme $\varphi(z) = 0$ $\varphi(z)$ étant un polynôme en z.

z est la *variable* ou l'*inconnue*; m est un nombre entier, *degré de l'équation*; A_0, A_1, A_2, ..., A_m, *coefficients de l'équation*, représentent des quantités réelles ou des quantités imaginaires de la forme $a + bi$, supposées connues.

Quand ces coefficients sont des *nombres donnés*, et non des symboles littéraux, l'équation devient *numérique*.

Il y a lieu de distinguer, au point de vue de leur résolution, entre les équations algébriques proprement dites et les équations numériques.

1041. La résolution d'une équation *générale* de degré m consiste à trouver les expressions qui, *composées algébriquement avec les coefficients de cette équation*, et substituées à l'inconnue, rendent identiques les deux membres de ladite équation : ces expressions sont les *valeurs générales des racines* de l'équation de degré m. On les connaît pour les deux premiers degrés. Il nous restera à les trouver pour le troisième et pour le quatrième degré.

Au delà du quatrième degré, la résolution algébrique des équations générales est impossible.

Quant aux équations *numériques*, leur résolution consiste à trouver directement, par des procédés appropriés, les *nombres-racines*, c'est-à-dire les nombres qui, substitués à l'inconnue, annulent le premier membre de l'équation proposée, lorsque son second membre est égal à zéro. Quel que soit le degré de cette équation, la marche à suivre, d'après la méthode adoptée, reste toujours la même, sauf la longueur plus grande des calculs à mesure que le degré devient plus élevé.

1042. Après ces définitions, nous allons insister sur les propriétés des polynômes pour les appliquer ensuite à l'étude des équations algébriques. Les propriétés de ces équations, à leur tour, nous en feront connaître de nouvelles pour les polynômes.

Propriétés générales des polynômes.

1043. I. *Soit* $\varphi(z)$ *un polynôme en* z. *Si ce polynôme s'annule pour* $z = 0$ (*c'est-à-dire s'il n'a pas de terme constant*), *il existe une quantité positive* λ, *telle que, pour toutes les valeurs de la variable* z *dont le module est compris entre* 0 *et* λ, *le module de* $\varphi(z)$ *soit inférieur à un nombre donné quelconque* N.

On a, par hypothèse,

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z.$$

Soient ρ le module de la valeur attribuée à z et a le plus grand module parmi ceux des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$.

Le module d'une somme ne pouvant surpasser la somme des modules des parties (111) et le module d'un produit étant le produit des modules des facteurs (92), nous aurons alors

$$\operatorname{mod}\varphi(z) < a(\rho^m + \rho^{m-1} + \rho^{m-2} + \ldots + \rho)$$

ou

$$\operatorname{mod}\varphi(z) < a\,\frac{\rho^{m+1} - 1}{\rho - 1} - a,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod}\varphi(z) < a\,\frac{\rho^{m+1} - \rho}{\rho - 1}.$$

On ne modifie pas cette inégalité en changeant les signes des deux termes de la fraction du second membre; et l'on voit que, si ρ est moindre que l'unité, on peut poser *a fortiori*

$$\operatorname{mod}\varphi(z) < \frac{a\rho}{1 - \rho}.$$

Le module de $\varphi(z)$ sera donc alors inférieur au nombre donné N, si l'on a

$$\frac{a\rho}{1 - \rho} < \mathrm{N} \qquad \text{ou} \qquad \rho < \frac{\mathrm{N}}{a + \mathrm{N}},$$

et l'énoncé sera justifié en prenant

$$\lambda = \frac{\mathrm{N}}{a + \mathrm{N}}.$$

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de ce premier théorème.

1044. II. *Soit*

$$\varphi(z) = \mathrm{A}_{m-n} z^n + \mathrm{A}_{m-n-1} z^n + \ldots + \mathrm{A}_1 z^{m-1} + \mathrm{A}_0 z^m$$

un polynôme en z, ordonné suivant les puissances croissantes de la variable. Si l'on pose

$$\varphi(z) = \mathrm{A}_{m-n} z^n (1 + \mathrm{K}),$$

il existe une quantité positive λ, *telle que, pour toutes les*

valeurs de z dont le module est compris entre 0 *et* λ, *le module de* K *soit inférieur à un nombre donné quelconque* N.

En effet, la fonction K a pour valeur, en renversant l'ordre des termes,

$$K = \frac{A_0}{A_{m-n}} z^{m-n} + \frac{A_1}{A_{m-n}} z^{m-n-1} + \ldots + \frac{A_{m-n-1}}{A_{m-n}} z,$$

et on peut lui appliquer immédiatement le théorème précédent (4).

Il est clair que la proposition subsiste lorsqu'on a $n = 0$.

1045. Si le polynôme $\varphi(z)$ et la variable z deviennent *réels*, la proposition précédente demeure applicable; et l'on voit que le module de K, c'est-à-dire la valeur absolue de cette quantité (91), pouvant être rendu moindre que 1 par toutes les valeurs de la variable dont le module ou la valeur absolue est inférieure à une certaine limite facile à déterminer (1043), c'est le premier terme $A_{m-n} z^n$ de la fonction $\varphi(z)$ ordonnée suivant les puissances *croissantes* de la variable qui, à partir de cette limite, donne constamment son signe à la fonction.

1046. III. *Soit*

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$$

un polynôme en z, *ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable. Si l'on pose*

$$\varphi(z) = A_0 z^m (1 + K),$$

il existe une quantité positive λ *telle que, pour toutes les valeurs de* z *dont le module est supérieur à* λ, *le module de* K *soit inférieur à un nombre donné quelconque* N.

En effet, la fonction K a pour valeur, en renversant l'ordre des termes,

$$K = \frac{A_m}{A_0} \frac{1}{z^m} + \frac{A_{m-1}}{A_0} \frac{1}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{A_2}{A_0} \frac{1}{z^2} + \frac{A_1}{A_0} \frac{1}{z}.$$

On peut prendre pour variable $\left(\frac{1}{z}\right)$ et appliquer la proposition ci-dessus (1044), de sorte que le module de K sera inférieur à N pour toutes les valeurs de $\left(\frac{1}{z}\right)$ dont le module sera inférieur à un certain nombre positif $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ facile à déterminer, (1043). Par suite, le module de K sera inférieur à N pour toutes les valeurs de z dont le module sera supérieur à λ.

1047. Si le polynôme $\varphi(z)$ et la variable z deviennent *réels*, la proposition précédente demeure applicable; et l'on voit que le module de K ou la valeur absolue de cette quantité pouvant être rendue moindre que 1 pour toutes les valeurs de la variable dont le module ou la valeur absolue est supérieure à une certaine limite, c'est le premier terme $A_0 z^m$ de la fonction $\varphi(z)$ ordonnée suivant les puissances *décroissantes* de la variable, qui, à partir de cette limite, donne constamment son signe à la fonction.

1048. IV. *Soit $\varphi(z)$ un polynôme en z. Lorsque la module de la variable devient infini, il en est de même de celui de la fonction.*

Si l'on a

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

on peut poser, comme ci-dessus (1046),

$$\frac{\varphi(z)}{A_0 z^m} = 1 + K.$$

D'après ce qui précède (1044, 1046), pour une valeur assez grande du module de z, le module de K peut devenir aussi petit qu'on voudra.

Désignons par M, ρ, a_0 et k les modules de $\varphi(z)$, z, A_0 et K. Le module du premier membre de l'égalité précédente sera

$$\frac{M}{a_0 \rho^m}.$$

Quant au module du second membre, il sera compris (111) entre $1+k$ et $1-k$. Mais, ρ tendant vers l'infini, k tendra vers zéro, de sorte que l'on aura

$$\lim \frac{M}{a_0 \rho^m} = 1;$$

ce qui justifie l'énoncé.

1049. Si le polynome et la variable deviennent *réels*, le théorème subsiste; et l'on voit que les valeurs *absolues* de la variable et du polynome tendent en même temps vers l'infini, le premier terme $A_0 z^m$ du polynome lui imposant toujours son signe, à partir d'une certaine valeur de la variable (1047).

Il en résulte qu'un polynome réel *de degré pair*, ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable, a le même signe que le coefficient de son premier terme pour des valeurs *absolues* suffisamment grandes de la variable réelle, puisque toute puissance *paire* d'un nombre réel est positive.

Un polynome réel *de degré impair*, ordonné de la même manière, a le même signe que le coefficient de son premier terme ou un signe contraire, suivant qu'on substitue à la variable réelle une valeur positive ou négative suffisamment grande en valeur absolue, puisque toute puissance *impaire* d'un nombre réel a le même signe que ce nombre.

1050. V. *Tout polynome $\varphi(z)$ de la variable z est une fonction continue.*

Une fonction $\varphi(z)$ est continue lorsque le module de la variation ou de la différence

$$\varphi(z+\Delta z) - \varphi(z) \tag{1}$$

devient, dans le même espace, infiniment petit en même temps que le module de $\Delta(z)$.

Or, si $\varphi(z)$ est une fonction entière, on peut, quel que soit z, développer $\varphi(z+\Delta z)$ suivant les puissances croissantes de l'accroissement Δz (*Alg.*, I^re^ Partie). Il est clair alors que la différence (1) s'annule pour $\Delta z = 0$. De plus, si l'on représente son premier terme par $A_{m-n}\overline{\Delta z}^n$ (n pouvant être

égal à zéro), on peut écrire, comme au n° 5,

$$\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)=A_{m-n}\overline{\Delta z}^{n}(1+K),$$

le module de K devenant aussi petit qu'on veut pour une valeur assez petite du module de Δz. Par conséquent le module du premier membre de l'égalité posée tend vers zéro en même temps que celui de Δz (*Algèbre*, I.), et cela dans toute l'étendue du plan.

Cette continuité des polynomes entraîne immédiatement des conséquences remarquables.

1051. VI. *Soient un polynome $\varphi(z)$ et une variable z, tous deux imaginaires. On sait* (99, 107) *qu'on peut leur donner les formes correspondantes*

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha) \qquad \text{et} \qquad \varphi(z)=P+Qi.$$

Cela posé, lorsque le module et l'argument de z varient, ensemble ou isolément, d'une manière continue et suivant une loi déterminée, aucune des quantités P *et* Q *ne peut changer de signe sans s'annuler.*

Admettons, en effet, que l'argument α varie d'une manière continue de α_1 et α_2 et que, dans cet intervalle, le module r demeure constant ou varie d'une manière continue avec α. Si P ou Q prend, sans s'annuler, des valeurs de signes contraires pour $\alpha=\alpha_1$ et pour $\alpha=\alpha_2$, P ou Q est une fonction discontinue dans l'intervalle considéré, puisque ses valeurs négatives et ses valeurs positives, ne s'y rejoignant pas par leur limite commune zéro, s'y trouvent séparées. Il en serait donc de même du polynome $\varphi(z)$; ce qui est impossible (11).

Cette proposition, dans le cas d'une fonction entière et d'une variable *réelles*, revêt la forme suivante.

1052. VII. *La fonction entière $\varphi(z)$ et la variable z étant réelles, si les valeurs z_1 et $z_2>z_1$ de la variable conduisent à des résultats $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$ qui soient des signes contraires, la fonction $\varphi(z)$ s'annule nécessairement pour une ou plusieurs valeurs de z, comprises entre z_1 et z_2.*

La démonstration est identique.

Si la variable z varie d'une manière continue depuis la valeur $z = z_1$ jusqu'à la valeur $z = z_2$, $\varphi(z)$ devra varier aussi d'une manière continue (1050) depuis la valeur $\varphi(z_1)$ jusqu'à la valeur $\varphi(z)$. Comme ces deux résultats sont, par hypothèse, de signes contraires, $\varphi(z_2)$ passera nécessairement dans l'intervalle au moins une fois par la valeur zéro, limite commune des quantités négatives croissantes et des quantités positives décroissantes.

Principe fondamental de la théorie des équations.

1053. *Toute équation algébrique* (1040) *a une racine réelle ou imaginaire :* tel est le principe fondamental de la théorie des équations.

On lui donne le nom de *théorème de* D'ALEMBERT.

Lorsqu'on se borne aux polynomes à coefficients réels et aux valeurs réelles de la variable, on peut facilement en prouver l'exactitude, sauf dans un seul cas.

1054. *Toute équation algébrique à coefficients réels et de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

Soient l'équation

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres réels et où l'on peut toujours supposer A_0 *positif*. Admettons qu'on fasse varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

m étant impair, une très grande valeur positive substituée à x rend le premier membre de l'équation positif, tandis qu'une valeur négative, très grande en valeur absolue, substituée à x, rend ce premier membre négatif (1149). D'ailleurs, pour $x = 0$, le premier membre se réduit à son dernier terme A_m.

Si A_m est *positif*, le premier membre de l'équation change donc de signe pour une certaine valeur de x comprise entre $-\infty$ et 0, et l'équation a au moins une racine *négative* (1152). Si A_m est *négatif*, le premier membre de l'équation change de signe pour une certaine valeur de x comprise entre 0 et $+\infty$, et l'équation a au moins une racine *positive*.

Le Tableau ci-dessous résume ce qu'on vient de dire :

VALEURS DONNÉES A x.	SIGNES DE $F(x)$.
$-\infty$	$-$
0	même signe que $A_m(\pm)$.
$+\infty$	$+$

L'équation

$$x^3 - 4x^2 + 5x + 7 = 0$$

a au moins une racine négative.

L'équation

$$x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 3x - 9 = 0$$

a au moins une racine positive.

1055. *Toute équation algébrique à coefficients réels et de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

D'après l'observation faite au n° 1149 et sans avoir besoin de recommencer le raisonnement précédent, il suffit de former le Tableau ci-dessous :

VALEURS DONNÉES A x.	SIGNES DE $F(x)$.
$-\infty$	$+$
0	même signe que $A_m(-)$.
$+\infty$	$+$

Le premier membre de l'équation change donc de signe, aussi bien lorsque x passe de $-\infty$ à 0, que lorsque x passe de 0 à $+\infty$, c'est-à-dire que l'équation admet au moins une racine *négative* et au moins une racine *positive*.

L'équation

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - 11x - 2 = 0$$

a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

1056. *Il y a doute lorsque, l'équation étant de degré pair, son dernier terme est positif.*

Dans cette hypothèse, en effet, on ne peut affirmer aucun changement de signe du premier membre de l'équation,

lorsque x parcourt toute l'échelle des grandeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$ en traversant zéro.

Nous laisserons donc de côté ce cas particulier, auquel il faut joindre le cas général des équations à coefficients imaginaires, et nous passerons immédiatement à la démonstration du principe fondamental que nous avons énoncé (1053) et sur l'importance duquel il est inutile d'insister.

Parmi les démonstrations proposées, nous choisirons celle adoptée par J.-A. SERRET (1), d'après CAUCHY (*Anciens exercices de Mathématiques*), et qu'il a notablement simplifiée. Malgré les remarquables travaux publiés avant ou après Cauchy, sur la même question, cette démonstration, entièrement analytique, est encore une des plus directes et des plus simples.

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

1057. LEMME. — *Soit un polynome entier quelconque de degré m, à coefficients réels ou imaginaires,*

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m.$$

Si le module de $\varphi(z)$ n'est pas égal à zéro pour une certaine valeur réelle ou imaginaire de la variable, $z = z_0$, on peut déterminer une quantité h, réelle ou imaginaire, telle que le module de $\varphi(z_0 + h)$ soit inférieur à celui de $\varphi(z_0)$,

Nous avons le droit de développer $\varphi(z_0 + h)$ par la série de Taylor (887). Nous aurons ainsi

$$\varphi(z_0 + h) = \varphi(z_0) + \varphi'(z_0)\frac{h}{1} + \varphi''(z_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \varphi^m(z_0)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Par hypothèse, le module de $\varphi(z_0)$ n'est pas nul. Le premier terme du développement existe donc. Les coefficients de quelques puissances de h peuvent s'annuler et les termes correspondants disparaître; mais le dernier terme du développement subsiste comme le premier. Son coefficient est, en

(1) J.-A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, Gauthier-Villars. Nous supposons démontré que la Série de Taylor est applicable aux fonctions de variables imaginaires.

effet, égal, comme on le sait (887, 736), au coefficient A_0 du premier terme de $\varphi(z)$.

Cela posé, représentons, pour plus de rapidité, les différents coefficients du développement par

$$Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_m.$$

Si nous désignons par Z_n le premier de ces coefficients qui, après $Z_0 = \varphi(z_0)$, soit différent de zéro, nous aurons

$$\varphi(z_0+h) = Z_0 + Z_n h^n + Z_{n+1} h^{n+1} + \ldots + Z_m h^m$$

ou

$$(1)\qquad \frac{\varphi(z_0+h)}{\varphi(z_0)} = 1 + \frac{Z_n}{Z_0} h_n + \frac{Z_{n+1}}{Z_0} h^{n+1} + \ldots + \frac{Z_m}{Z_0} h^m.$$

On peut poser alors (94, 107)

$$h = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \frac{Z_p}{Z_0} = \rho_p(\cos\omega_p + i\sin\omega_p),$$

et l'égalité (1) deviendra (112, 114)

$$(2)\qquad \begin{aligned}\frac{\varphi(z_0+h)}{\varphi(z_0)} = 1 &+ \rho^n r^n[\cos(n\alpha+\omega_n) + i\sin(n\alpha+\omega_n)]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \rho_m r^m[\cos(m\alpha+\omega_m) + i\sin(m\alpha+\omega_m)].\end{aligned}$$

Si l'on détermine alors l'argument α par la condition

$$n\alpha + \omega_n = \pi,$$

la parenthèse qui multiplie $\rho_n r^n$ se réduira à -1, et l'égalité (2) prendra la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\varphi(z_0+h)}{\varphi(z_0)} = 1 &- \rho_n r^n\\ &+ \rho_{n+1} r^{n+1}\{\cos[(n+1)\alpha+\omega_{n+1}] + i\sin[(n+1)\alpha+\omega_{n+1}]\}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \rho_m r^m[\cos(m\alpha+\omega_m) + i\sin(m\alpha+\omega_m)].\end{aligned}\right.$$

Soient maintenant R et R_0 les modules respectifs de $\varphi(z_0+h)$ et de $\varphi(z_0)$. Le module du premier membre de l'égalité (3) est (113)

$$\frac{R}{R_0}.$$

Le module du second membre est, comme on le sait (111), au plus égal à la somme des modules des parties qui le composent.

Considérons d'abord le premier terme $1-\rho_n r^n$. Si ce premier terme est un nombre positif, il se confondra avec son module (91). Il suffit pour cela qu'on donne à r une valeur inférieure à $\frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}}$. Cette condition étant supposée remplie, on aura donc

$$\frac{R}{R_0} \leq (1-\rho_n r^n) + \rho_{n+1} r^{n+1} + \ldots + \rho_m r^m,$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{R_0} \leq 1 - \rho_n r^n \left[1 - \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} r - \frac{\rho_{n+2}}{\rho_n} r^2 - \ldots - \frac{\rho_m}{\rho_n} r^{m-n} \right].$$

Lorsqu'on fait tendre h ou r vers zéro, la parenthèse du second membre de cette relation tend vers 1, et elle reste positive (1044) pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et une certaine limite positive λ facile à déterminer (1043). Par conséquent, pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et la plus petite des deux quantités λ et $\frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}}$, on a nécessairement

$$\frac{R}{R_0} < 1 \qquad \text{ou} \qquad R < R_0;$$

ce qui justifie l'énoncé.

1058. Principe fondamental : *Toute équation algébrique* $\varphi(z) = 0$, *à coefficients réels ou imaginaires et de degré quelconque* m, *admet une racine réelle ou imaginaire.*

En effet, faisons prendre à la variable z toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires. Le module de $\varphi(z)$, nombre positif, ne pourra pas diminuer constamment et atteindra un certain minimum. Ce minimum ne peut pas répondre à une valeur infinie de z ou de son module, puisque le module de $\varphi(z)$ devient en même temps infini (1048); il répond donc à une valeur finie du module de z.

Il en résulte que le minimum atteint par le module de $\varphi(z)$, lorsque z prend toutes les valeurs possibles, est nécessairement *zéro;* car, si l'on supposait que ce minimum eût une valeur finie R_0, non nulle, et répondant à $z = z_0$, on pourrait, d'après le lemme qu'on vient d'établir (1057), déterminer une quantité additionnelle h pour laquelle on aurait

$$\operatorname{mod}\varphi(z_0 + h) < R_0,$$

quelque petit que fût R_0.

Il est, par suite, prouvé qu'il existe toujours une valeur finie de z, telle que l'on ait, pour cette valeur, mod $\varphi(z)$ ou $\varphi(z) = 0$, c'est-à-dire il est prouvé que toute équation algébrique a une racine.

1059. Il faut bien comprendre de quelle manière une racine imaginaire de la forme $a + bi$ peut satisfaire à l'équation $\varphi(z) = 0$.

Comme on l'a vu (99), la substitution de $a + bi$ à la place de z dans le premier membre de l'équation conduit à un résultat de même forme $P + Qi$. Si $a + bi$ est racine, on a

$$P + Qi = 0,$$

c'est-à-dire (91) que les valeurs de a et b satisfont aux deux conditions $P = 0$ et $Q = 0$.

Points racines.

1060. Ce que nous venons de remarquer (1059) conduit naturellement au procédé géométrique qu'on peut suivre pour trouver *graphiquement* les racines de l'équation $\varphi(z) = 0$.

Ramenons la variable z à la forme imaginaire et remplaçons-la par le binome $x + yi$, où x et y sont des quantités réelles. Nous aurons alors

$$\varphi(z) = \varphi(x + yi) = \psi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Le module de $\varphi(z)$, égal à

$$\sqrt{[\psi(x, y)]^2 + [\chi(x, y)]^2},$$

s'annule toutes les fois que z atteint une racine de l'équa-

tion $\varphi(z) = 0$, ou toutes les fois qu'on a simultanément

$$\psi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0. \tag{1}$$

Il en résulte que, si $z = a + bi$ est racine, et seulement dans ce cas, a et b représentent, pour le système des deux équations (1), *une solution commune.*

On peut alors, en prenant des axes coordonnés rectangulaires, construire par rapport à ces axes, comme nous l'avons déjà indiqué souvent (748), les deux courbes réelles, lieux des équations (1); et leurs points d'intersection réels auront précisément pour coordonnées les groupes de solutions communes (a, b) répondant à toutes les racines de l'équation $\varphi(z) = 0$. Ces points d'intersection sont les *points racines*.

Pour les racines imaginaires complexes, les deux courbes auxiliaires se couperont en dehors des axes; pour les racines imaginaires simples, elles se couperont sur l'axe des y (128); pour les racines réelles, elles se couperont sur l'axe des x.

CHAPITRE II.

CONSÉQUENCES DU PRINCIPE FONDAMENTAL. — COMPOSITION DES ÉQUATIONS.

Facteurs linéaires d'une fonction entière, nombre des racines d'une équation.

1061. I. *Toute équation algébrique de degré m, à coefficients réels ou imaginaires, admet exactement m racines réelles ou imaginaires.*

Nous avons vu (228) que, lorsqu'un polynôme $\varphi(z)$ s'annule quand on substitue une certaine quantité a à la place de z, ce polynôme est exactement divisible par le binôme $z-a$. Cette propriété est vraie, qu'il s'agisse de quantités *réelles* ou *imaginaires*.

Cela posé, considérons l'équation algébrique quelconque de degré m

$$\varphi(z)=0,$$

le premier membre, ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable, *ayant pour premier terme* $A_0 z^m$.

L'équation proposée a une racine réelle ou imaginaire (1058). Désignons-la par a. On aura $\varphi(a)=0$ et $\varphi(z)$ sera exactement divisible par $z-a$. *Le premier terme du quotient sera* $A_0 z^{m-1}$. Représentons le quotient par $\varphi_1(z)$. Nous aurons

$$\varphi(z)=(z-a)\varphi_1(z).$$

Si l'on forme l'équation $\varphi_1(z)=0$, elle aura une racine quelconque b. On aura $\varphi_1(b)=0$, et $\varphi_1(z)$ sera exactement divisible par $z-b$. *Le premier terme du quotient sera*

$A_0 z^{m-2}$. Représentons ce quotient par $\varphi_2(z)$. Nous aurons

$$\varphi_1(z) = (z - b)\,\varphi_2(z).$$

Le degré par rapport à z des quotients successifs allant toujours en diminuant d'une unité, on parviendra, en répétant la même opération un nombre suffisant de fois, à un quotient du premier degré $\varphi_{m-1}(z)$, *dont le premier terme sera* $A_0 z$ et qui, égalé à zéro, aura une racine et une seule (*Alg. élém.*). Si on la désigne par l, $\varphi_{m-1}(z)$ sera exactement divisible par $z - l$, et le quotient se réduira évidemment à A_0.

La série des opérations ainsi effectuées est résumée par les égalités suivantes, où les m quantités $a, b, c, \ldots, l$ représentent respectivement une racine de chacune des m équations successivement considérées :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= (z - a)\,\varphi_1(z),\\
\varphi_1(z) &= (z - b)\,\varphi_2(z),\\
\varphi_2(z) &= (z - c)\,\varphi_3(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\varphi_{m-1}(z) &= (z - l)\,A_0.
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie ces m égalités membre à membre et si l'on simplifie le résultat, il vient identiquement

$$(1) \qquad \varphi(z) = A_0(z - a)(z - b)(z - c)\ldots(z - l).$$

Les racines de l'équation $\varphi(z) = 0$ se confondent avec les valeurs de z qui annulent le second membre de l'identité (1). Or, pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs le soit. Les seules valeurs de z qui soient racines de l'équation $\varphi(z) = 0$ sont donc précisément les m quantités $a, b, c, \ldots, l$; car toute autre quantité mise à la place de z, n'annulant aucun des facteurs du second membre de l'identité (1), ne peut annuler le premier membre.

Il est, par suite, démontré que le nombre des racines d'une équation algébrique quelconque est exactement égal à son degré.

Les facteurs binômes $z - a$, $z - b$, $z - c$, $\ldots$, $z - l$ sont les *facteurs linéaires,* ou les *diviseurs du premier degré,* ou simplement les *facteurs premiers* de $\varphi(z)$.

La démonstration précédente conduit à plusieurs remarques importantes.

1062. II. *Tout polynôme du $m^{ième}$ degré*, telle que nous l'avons défini, *peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré, multiplié par le coefficient A_0 de son premier terme.* Il suffit de calculer les racines de l'équation correspondante $\varphi(z) = 0$.

Réciproquement, on peut former immédiatement le premier membre d'une pareille équation, lorsque ses racines sont données *a priori*. Le coefficient A_0 reste seul arbitraire.

Il en résulte que *les premiers membres de deux équations algébriques qui ont les mêmes racines ne peuvent différer que par un facteur constant*, puisque tous leurs facteurs linéaires sont identiques et que le coefficient de leur premier terme demeure seul indéterminé.

1063. Rien n'exige dans ce qui précède (1061) que les racines $a, b, c, \ldots, l$ soient *différentes*, et il peut arriver, en effet, que quelques-unes soient égales entre elles. On dit alors que l'équation $\varphi(z) = 0$ a des racines *multiples* ou des racines *égales*.

Si les racines a et b, par exemple, sont égales, le second membre de l'identité (1) (1061) contient le facteur $(z-a)^2$, et a est une racine *double*.

Si les racines a, b, c sont égales, a est une racine *triple*, correspondant au facteur $(z-a)^3$.

Si l'équation admet n racines égales à a, le second membre de l'identité (1) renferme le facteur $(z-a)^n$, et a est une *racine multiple d'ordre n*.

Une racine qui ne se reproduit pas est une racine *simple* ou *du premier ordre*.

Quand on dit qu'une équation algébrique de degré m a m racines, on entend que chaque racine multiple doit être comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

1064. Une objection peut se présenter à l'esprit. La décomposition du premier membre de l'équation $\varphi(z) = 0$ en facteurs linéaires dépend-elle de la première racine a mise en évidence? En d'autres termes, si l'on commençait par diviser

$\varphi(z)$ par le binôme $z - c$ au lieu d'employer d'abord le diviseur $z - a$, obtiendrait-on une décomposition différente de la première? Ou bien, plus généralement, si l'on employait tout autre mode de décomposition, parviendrait-on toujours au même résultat?

Il nous semble donc utile de démontrer la proposition suivante, qui assimile complètement aux nombres premiers de l'Arithmétique les facteurs linéaires d'une fonction entière et qui justifie la dénomination de *facteurs premiers* donnée à ces facteurs linéaires, d'ailleurs divisibles seulement par eux-mêmes et par l'unité.

1065. III. *Un polynôme ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.*

Admettons que l'on ait obtenu pour la fonction $\varphi(z)$ deux systèmes de facteurs premiers et qu'on ait à la fois, quel que soit z,

$$\varphi(z) = A_0(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-l),$$
$$\varphi(z) = A'_0(z-a')(z-b')(z-c')\ldots(z-l').$$

Si l'on donne à z la valeur particulière a, la première expression de $\varphi(z)$ s'annule, puisqu'elle contient le facteur $z - a$. Il faut donc qu'il en soit de même de la seconde expression, égale à la première pour les mêmes valeurs de z; ce qui exige que l'un de ses facteurs, $z - a'$ par exemple, s'annule. Ce facteur sera donc lui-même égal à $z - a$. Ainsi, les facteurs premiers sont les mêmes dans les deux expressions. Et, comme on peut supprimer successivement de part et d'autre ceux dont on a reconnu l'égalité et renouveler le même raisonnement sur les produits restants, il en résulte que les facteurs qui se répètent présentent dans les deux expressions le même ordre de multiplicité (1063). Enfin, les deux expressions, ainsi composées des mêmes facteurs premiers affectés des mêmes exposants, devant être égales pour une même valeur quelconque de z, il faut qu'on ait aussi $A_0 = A'_0$.

Il résulte de là que, si l'on peut décomposer le premier membre d'une équation $\varphi(z) = 0$ en deux facteurs entiers Z et Z_1, les racines de l'équation proposée seront l'ensemble des racines des deux équations plus simples $Z = 0$, $Z_1 = 0$.

1066. IV. *Lorsqu'un polynôme quelconque* $\varphi(z)$, *de degré*

m, s'annule pour plus de m valeurs de la variable, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

En effet, l'équation $\varphi(z) = 0$ étant du degré m n'a que m racines (1061) et ne peut être satisfaite que par m valeurs de la variable, sauf le cas où, le coefficient A_0 de son premier terme étant nul, elle est nulle quel que soit z. Ce coefficient, d'après l'hypothèse indiquée, est donc nul. L'équation $\varphi(z) = 0$ s'abaisse alors au degré $m - 1$, et le même raisonnement prouve que le coefficient A_1 du second terme de $\varphi(z)$ est aussi nul. Et ainsi de suite.

1067. V. *Lorsque deux polynômes en z de degré m sont égaux pour plus de m valeurs de la variable, ils sont identiques.*

Cette proposition résulte immédiatement de la précédente. En effet, soient

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_m$$

les deux polynômes proposés. L'expression de leur égalité conduit, en transposant tous les termes dans un même membre, à l'équation

$$(A_0 - B_0) z^m + (A_1 - B_1) z^{m-1} + \ldots + (A_m - B_m) = 0,$$

qui est de degré m et satisfaite, par hypothèse, par plus de m valeurs de z. Tous ses coefficients sont donc identiquement nuls (1066), c'est-à-dire qu'on a

$$A_0 = B_0, \qquad A_1 = B_1, \qquad \ldots, \qquad A_m = B_m.$$

1068. VI. Essai d'une racine. — On a souvent à essayer si un nombre a est racine d'une équation algébrique $\varphi(z) = 0$. Il suffit de vérifier que $\varphi(z)$ est exactement divisible par le binôme $z - a$ (1061).

Les détails donnés au 228 indiquent la marche à suivre. On peut les présenter plus rapidement de la manière suivante.

Soit

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m.$$

En effectuant la division de $\varphi(z)$ par $z - a$, on obtient, d'une manière générale, un quotient de la forme

$$A_0 z^{m-1} + B_1 z^{m-2} + B_2 z^{m-3} + \ldots + B_{m-1}$$

et un reste R indépendant de z.

$\varphi(z)$ étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on doit avoir identiquement, quel que soit z,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \varphi(z) = A_0 z^m + B_1 & z^{m-1} + B_2 & z^{m-2} + B_3 & z^{m-3} + \ldots + B_{m-1} & z + R \\ \quad - A_0 a & \quad - B_1 a & \quad - B_2 a & \quad - B_{m-2} a & \quad - B_{m-1} a, \end{array}$$

c'est-à-dire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres,

$$A_1 = B_1 - A_0 a, \quad A_2 = B_2 - B_1 a, \quad A_3 = B_3 - B_2 a, \quad \ldots,$$
$$A_{m-1} = B_{m-1} - B_{m-2} a, \quad A_m = R - B_{m-1} a.$$

Il en résulte

$$B_1 = A_1 + A_0 a, \quad B_2 = A_2 + B_1 a, \quad B_3 = A_3 + B_2 a, \quad \ldots,$$
$$B_{m-1} = A_{m-1} + B_{m-2} a, \quad R = A_m + B_{m-1} a.$$

Ces égalités expriment la loi de formation des termes du quotient et du reste.

Le coefficient d'un terme quelconque du quotient est égal au produit du coefficient du terme précédent par la valeur a du second terme du binôme diviseur (abstraction faite du signe — dont elle est affectée), *augmenté du coefficient du terme du dividende qui est de même rang que celui qu'on veut écrire au quotient.*

Le reste s'obtient, de la même manière, *en ajoutant au produit du dernier terme du quotient par a le terme constant du dividende.*

Le reste R est donc, comme il est facile de s'en assurer en appliquant la loi de proche en proche (228), le résultat de la substitution de a à la place de z dans $\varphi(z)$, c'est-à-dire $\varphi(a)$. *Si l'opération conduit à* $R = 0$, et seulement dans ce cas, *la quantité a est racine de l'équation* $\varphi(z) = 0$.

Lorsque le premier membre de l'équation n'est pas *complet,* il faut, pour appliquer convenablement la règle, supposer les termes manquants rétablis avec le coefficient 0.

L'algorithme que nous venons de rappeler est important.

Comme nous le verrons, la recherche des racines commensurables est fondée sur son emploi.

Nous terminerons par quelques exemples.

1069. Exemples. — 1° *Chercher si l'équation*

$$\varphi(z) = 4z^5 - 10z^4 + 6z^3 - 7z^2 + 9z - 11 = 0$$

admet la racine 2.

Nous essayerons la division du premier membre par $z - 2$. Le premier terme du quotient est $4z^4$. Les différents coefficients du quotient et le reste sont ensuite fournis par les égalités ci-dessous (1068) :

$$4 \times 2 - 10 = -2, \qquad (-2) \times 2 + 6 = 2, \qquad 2 \times 2 - 7 = -3,$$
$$(-3) \times 2 + 9 = 3, \qquad 3 \times 2 - 11 = -5.$$

Le quotient est donc

$$4z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 3z + 3,$$

et le reste est -5, de sorte que 2 n'est pas racine de l'équation et qu'on a $\varphi(2) = -5$.

2° *Chercher si l'équation*

$$\varphi(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 - (1-2i)z + 2(1+2i) = 0$$

admet la racine $1+2i$.

Nous essayerons la division du premier membre par $z - (1+2i)$. Le premier terme du quotient est z^2. On obtient ensuite par l'algorithme indiqué (1068) les différents coefficients du quotient et le reste. On a

$$1 \times (1+2i) - 2(1+i) = -1, \qquad (-1) \times (1+2i) - (1-2i) = -2,$$
$$(-2) \times (1+2i) + 2(1+2i) = 0.$$

Le reste étant nul, $1+2i$ est racine de l'équation. Le quotient est d'ailleurs

$$z^2 - z - 2.$$

3° *Chercher si l'équation*

$$\varphi(z) = 2z^4 - 5z^3 + 7z - 5 = 0$$

admet la racine -2.

Nous essayerons la division du premier membre par $z - (-2)$, en ayant soin de supposer le terme manquant, qui est celui du second degré, écrit avec le coefficient 0.

Le premier terme du quotient est $2z^3$. On a ensuite

$$2\times(-2)-5=-9, \qquad (-9)\times(-2)+0=18,$$
$$18\times(-2)+7=-29, \qquad (-29)\times(-2)-5=53.$$

Le reste n'étant pas nul, -2 n'est pas racine. Le quotient est

$$2z^3-9z^2+18z-29$$

et, le reste étant 53, on a $\varphi(-2)=53$.

Équations à coefficients réels.

1070. Lorsque l'équation algébrique proposée a tous ses coefficients réels, on peut généraliser le théorème relatif aux substitutions (1032) et montrer que, dans ce cas, les racines imaginaires marchent nécessairement par couples de racines imaginaires conjuguées (83).

1071. VII. *Soit l'équation algébrique à coefficients réels* $F(x)=0$. *Si les deux nombres réels* λ *et* $\mu>\lambda$, *substitués à la place de* x *dans le premier membre de l'équation, donnent des résultats,* $F(\lambda)$ *et* $F(\mu)$, *de signes contraires, il existe entre ces deux nombres un nombre impair de racines réelles de l'équation. Si les deux résultats* $F(\lambda)$ *et* $F(\mu)$ *sont de même signe, les deux nombres* λ *et* μ *comprennent un nombre pair de racines réelles de l'équation* (*ce qui n'exclut pas zéro*).

[Il est entendu qu'une racine multiple réelle d'ordre n compte pour n racines.]

Désignons par a, b, c, ..., g *toutes* les racines réelles comprises entre λ et μ, et soit $f(x)$ le quotient de $F(x)$ par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-g).$$

On aura

$$(1) \qquad F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-g)f(x).$$

$f(x)$ représente le produit du coefficient du premier terme de l'équation considérée par les facteurs premiers qui correspondent aux racines réelles, *non comprises* entre λ et μ, et aux racines imaginaires que l'équation $F(x)=0$ peut admettre. Il en résulte que l'équation $f(x)=0$ n'a aucune racine réelle entre les nombres λ et μ, et que, par suite, les

deux résultats $f(\lambda)$ et $f(\mu)$ sont nécessairement de même signe (**1052**).

Cela posé, substituons successivement à la place de x_1 dans l'identité (1), les nombres λ et μ. On pourra écrire

$$(2) \qquad \frac{F(\lambda)}{f(\lambda)} = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)\dots(\lambda - g),$$

$$(3) \qquad \frac{F(\mu)}{f(\mu)} = (\mu - a)(\mu - b)(\mu - c)\dots(\mu - g).$$

Supposons, en premier lieu, que $F(\lambda)$ et $F(\mu)$ soient *de signes contraires*. Il en sera de même des seconds membres des identités (2) et (3), puisque $f(\lambda)$ et $f(\mu)$ sont de même signe. Or, dans l'identité (2), tous les facteurs du second membre sont *négatifs*, tandis qu'ils sont tous *positifs* dans l'identité (3). Il faut donc qu'ils soient *en nombre impair*, pour que les seconds membres des deux identités soient eux-mêmes de signes contraires, de sorte qu'il y a bien *un nombre impair de racines réelles* de $F(x) = 0$ entre λ et μ.

En second lieu, si $F(\lambda)$ et $F(\mu)$ sont *de même signe*, comme $f(\lambda)$ et $f(\mu)$, les seconds membres des identités (2) et (3) doivent être aussi de même signe; ce qui exige que les facteurs qui les composent soient *en nombre pair*. Et il y a alors *un nombre pair de racines réelles* de $F(x) = 0$ entre λ et μ, nombre qui peut être zéro.

D'après la loi des réciproques (*Géom.*, **34**), la réciproque de cette double proposition est vraie. Nous l'énoncerons de la manière suivante :

$F(x) = 0$ *étant une équation algébrique à coefficients réels et* λ *et* μ *deux nombres réels, si ces nombres comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation, les deux résultats* $F(\lambda)$ *et* $F(\mu)$ *sont de signes contraires. Si les mêmes nombres comprennent un nombre pair de racines réelles de l'équation ou n'en comprennent aucune, les deux résultats* $F(\lambda)$ *et* $F(\mu)$ *sont de même signe.*

1072. Il résulte de ce qui précède que *le nombre des racines réelles d'une équation algébrique à coefficients réels,* $F(x) = 0$, *est toujours de même parité que le degré m de l'équation, c'est-à-dire pair si m est pair, impair si m est impair.*

En effet, pour une équation de degré pair, les deux substitutions $-\infty$ et $+\infty$ à la place de x donnent des résultats de même signe, tandis que, pour une équation de degré impair, les deux mêmes substitutions donnent des résultats de signes contraires (1054, 1055).

On peut en conclure que, *dans une équation algébrique à coefficients réels, le nombre des racines imaginaires est toujours pair,* puisque ce nombre est nécessairement l'excès du degré de l'équation (1061) sur le nombre de racines réelles qu'elle admet.

Nous reviendrons un peu plus loin sur cette importante propriété, et nous en donnerons une démonstration plus explicite.

1073. Il n'est pas inutile de remarquer que la réciproque de la proposition du n° 1052 n'est pas toujours vraie, précisément en raison de la proposition du n° 1071 qui en est la généralisation.

$F(x) = 0$ étant une équation algébrique à coefficients réels et les résultats $F(a)$ et $F(b)$, fournis par les substitutions réelles a et b, étant de signes contraires, on est certain (1052) que $F(x)$ s'annulera *au moins une fois* quand x parcourra d'une manière continue l'intervalle (a, b). Mais on ne peut pas affirmer, réciproquement, que, si x atteint une racine réelle de $F(x) = 0$, $F(x)$ changera de signe, avant et après cette valeur de x. *Cela dépend de l'ordre de multiplicité de la racine réelle atteinte par* x.

En reprenant les notations et le raisonnement du n° 1071, on peut supposer, en effet, les deux nombres réels λ et μ assez rapprochés pour qu'il n'existe entre eux qu'une racine a d'ordre n. Les identités (2) et (3) du n° 1071 deviennent alors

$$\frac{F(\lambda)}{f(\lambda)} = (\lambda - a)^n, \qquad \frac{F(\mu)}{f(\mu)} = (\mu - a)^n,$$

et l'on voit que, si n est impair, $F(\lambda)$ et $F(\mu)$ sont de signes contraires, tandis que, si n est pair, $F(\lambda)$ et $F(\mu)$ conservent le même signe.

Ainsi, *le premier membre de l'équation* $F(x) = 0$ *change ou non de signe, suivant que la valeur de* x *passe par une racine dont le degré de multiplicité est impair ou pair.*

1074. Les considérations géométriques, que nous allons développer très succinctement, viennent à l'appui de ce qui précède et peignent pour ainsi dire aux yeux les résultats obtenus analytiquement.

Prenons (*fig.* 21) deux axes rectangulaires Ox, Oy. Les coefficients de $F(x)$ étant toujours supposés réels et x variant de $-\infty$ à $+\infty$, portons les valeurs de x en abscisses et les valeurs correspondantes de $F(x)$ en ordonnées. Les points où la courbe ainsi déterminée rencontre l'axe Ox répondent aux valeurs de x qui annulent $F(x)$ ou aux racines de $F(x) = 0$.

Fig. 21.

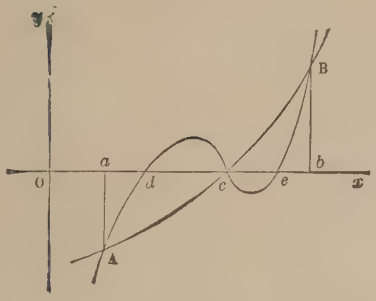
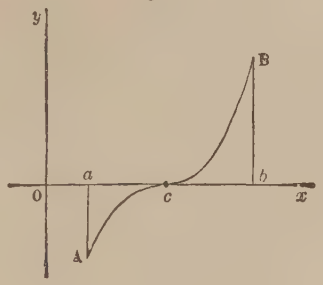


Fig. 22.



Si deux valeurs $x = Oa$, $x = Ob$ répondent à des valeurs Aa, Bb de $F(x)$ qui soient *de signes contraires,* il est évident que la courbe représentative, en passant de A à B, rencontrera l'axe des x *une fois* au point c, ou *un nombre impair de fois* (1071) aux points d, c, e par exemple.

Si les points d, c, e se rapprochent et viennent se confondre en c (*fig.* 22), l'équation $F(x) = 0$ admet alors une racine *triple* Oc, et il est clair (*Géom.*, 111) que la courbe AcB a au point c, avec l'axe Ox, un contact d'ordre supérieur. Lorsque x traverse cette racine *triple*, $F(x)$ *change de signe* (1073).

Si les deux valeurs $x = Oa$, $x = Ob$ correspondent à des valeurs Aa, Bb, de $F(x)$, qui soient *de même signe* (*fig.* 23), il est évident que la courbe représentative, en passant de A à B, *peut ne pas rencontrer l'axe* Ox; mais que, si elle le rencontre, ce sera *un nombre pair de fois* (1071), soit aux points c et d, soit aux points e, f, g, h, etc.

Si ces points d'intersection se rapprochent et viennent se confondre en un seul point l (*fig.* 24), l'équation $F(x) = 0$ admet alors une racine *double* ou *quadruple,* etc., et il est clair que la courbe AlB a au point l, avec l'axe Ox, un contact simple ou un contact d'ordre supérieur. Lorsque x traverse cette racine *double* ou *quadruple,* $F(x)$ *ne change pas de signe* (1073).

D'une manière générale, F (x) étant un polynôme entier à coefficients réels, si l'on pose

$$y = F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

et si l'on construit la courbe correspondante par rapport aux axes rectangulaires Ox, Oy, on obtient ce qu'on appelle la *courbe parabolique*

Fig. 23.

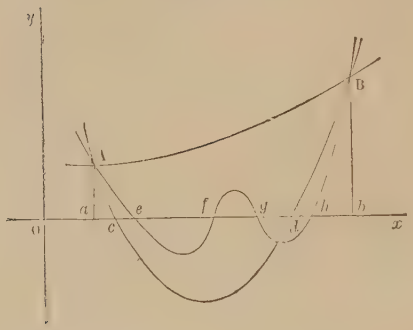
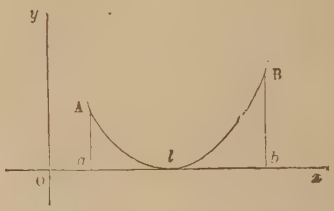


Fig. 24.



du $m^{ième}$ degré, par analogie avec la parabole du second degré dont l'équation est de la forme $y = ax^2$ lorsque son axe est pris pour axe des y (*Géom.*, 432).

D'après les propriétés des polynômes à coefficients réels, la courbe est nécessairement formée d'un trait continu, s'étendant à l'infini à droite et à gauche, sans revenir sur lui-même; car à chaque valeur de x répond une seule valeur de y. En étudiant les ondulations de cette courbe relativement à l'axe Ox, on se rendra compte des variations successives éprouvées par les valeurs de la fonction, c'est-à-dire de leurs alternatives de croissance et de décroissance; et, en marquant les points d'intersection de la courbe avec le même axe, points pour lesquels on a $y = 0$, on déterminera les racines *réelles* de l'équation algébrique $F(x) = 0$.

Racines imaginaires conjuguées.

1073. VIII. *Toute équation algébrique à coefficients réels*, $F(x) = 0$, *qui admet la racine imaginaire* $\alpha + \beta i$, *admet aussi la racine imaginaire conjuguée* $\alpha - \beta i$.

En effet, en remplaçant x par $\alpha + \beta i$ dans la fonction entière à coefficients réels F (x), on obtient (99) un résultat de la forme

$$P + Q i$$

et, comme $\alpha+\beta i$ est racine par hypothèse, on doit avoir

$$P+Qi=0,$$

c'est-à-dire

$$P=0, \qquad Q=0.$$

Si l'on substitue maintenant à la place de x l'imaginaire $\alpha-\beta i$, conjuguée de la première, on parviendra, puisque tous les coefficients de $F(x)$ sont réels, à un résultat qui ne différera du précédent que par le signe de i, c'est-à-dire au résultat

$$P-Qi.$$

Mais P et Q étant nuls, d'après l'existence de la première racine, on aura

$$P-Qi=0,$$

c'est-à-dire que $\alpha-\beta i$ est aussi racine de l'équation $F(x)=0$.

1076. Il faut bien remarquer que la proposition ne peut plus subsister lorsque le premier membre de l'équation proposée renferme des coefficients imaginaires, c'est-à-dire n'a pas tous ses coefficients réels. Car, ainsi que nous l'avons déjà indiqué précédemment (100), i change bien de signe dans la valeur de x lorsqu'on substitue $\alpha-\beta i$ au lieu de $\alpha+\beta i$; mais il n'en change pas dans les différents coefficients imaginaires qui restent invariables. On ne peut donc plus dire que la seconde substitution conduit à un résultat conjugué de celui fourni par la première substitution.

1077. On voit que *toute équation algébrique à coefficients réels renferme* nécessairement *un nombre pair de racines imaginaires* (1072), puisque, d'après la proposition précédente, elles se correspondent par couples.

Ajoutons que les deux facteurs premiers qui répondent a deux racines imaginaires conjuguées $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$ sont de la forme

$$(x-\alpha)-\beta i \quad \text{et} \quad (x-\alpha)+\beta i,$$

c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes conjugués et que leur produit égal au carré de leur module commun, constitue le facteur réel du second degré

$$(x-\alpha)^2+\beta^2.$$

On peut donc, en se reportant au n° 1061, énoncer ce théorème remarquable :

Le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels est le produit d'autant de facteurs réels du premier degré qu'elle admet de racines réelles et d'autant de facteurs réels du second degré qu'elle admet de couples de racines imaginaires conjuguées, le tout multiplié par le coefficient de son premier terme.

On comprend par là comment une équation algébrique dont tous les coefficients sont réels peut cependant admettre des racines imaginaires.

1078. Il est évident que *les racines conjuguées* $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$ *sont toujours du même ordre de multiplicité.*

Admettons, par exemple, que $\alpha+\beta i$ soit une racine double. $\alpha+\beta i$ étant racine, $\alpha-\beta i$ le sera aussi, et l'on pourra diviser $F(x)$, premier membre de l'équation, par le facteur réel du second degré

$$(x-\alpha)^2+\beta^2$$

qui correspond à ces deux racines conjuguées. En égalant à zéro le quotient $F_1(x)$, on obtient une seconde équation dont les racines sont les autres racines de la première. Par suite, l'équation $F_1(x)=0$ admet encore la racine $\alpha+\beta i$ et, d'après le théorème direct (1075), elle admet aussi la racine conjuguée $\alpha-\beta i$, qui est, par conséquent, comme $\alpha+\beta i$, une racine double de $F(x)=0$. $F_1(x)$ sera donc de nouveau divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, de sorte que $F(x)$ le sera à son tour par

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2.$$

Le raisonnement est général. Si $\alpha+\beta i$ est une racine multiple d'ordre n, il en est de même de la conjuguée $\alpha-\beta i$, et $F(x)$ est divisible par

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n.$$

On peut conclure de là que *toute équation algébrique à coefficients réels, qui n'a que des racines imaginaires, est nécessairement de degré pair, les deux termes extrêmes de son premier membre étant de même signe* (1061).

Ce résultat concorde d'ailleurs avec les énoncés des nos 1054 et 1055.

1079. Il convient de remarquer que *cette propriété des racines imaginaires des équations algébriques à coefficients réels, d'être ainsi conjuguées deux à deux, appartient de même,* nécessairement (1077), *aux racines incommensurables du second degré des équations algébriques à coefficients commensurables.*

La démonstration directe est tout à fait analogue à celle du n° 1077.

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ ait tous ses coefficients commensurables et qu'elle admette la racine incommensurable du second degré $a + \sqrt{b}$.

En substituant cette valeur à la place de x dans $F(x)$, on obtient un résultat de la forme $P + Q\sqrt{b}$. En effet, en appliquant successivement la formule du binôme au développement des différents termes de $F(x)$, l'irrationnelle $\sqrt{b}$ disparaîtra dans tous les termes où $\sqrt{b}$ doit être élevée à une puissance paire et persistera au contraire sous cette forme dans tous les termes où $\sqrt{b}$ doit être élevée à une puissance impaire. Si $a + \sqrt{b}$ est racine, on devra avoir

$$P + Q\sqrt{b} = 0,$$

ce qui entraîne les conditions

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Si l'on substitue $a - \sqrt{b}$ à la place de x au lieu de $a + \sqrt{b}$, le résultat ne différera du précédent que par le changement de signe de $\sqrt{b}$. On trouvera donc

$$P - Q\sqrt{b}.$$

Mais l'existence de la première racine donnant $P = 0$ et $Q = 0$, on a

$$P - Q\sqrt{b} = 0,$$

c'est-à-dire que $a - \sqrt{b}$ est aussi racine de $F(x) = 0$.

Les facteurs premiers qui correspondent aux deux racines étant

$$(x - a) - \sqrt{b} \quad \text{et} \quad (x - a) + \sqrt{b},$$

leur produit est le facteur du second degré à coefficients commensurables

$$(x - a)^2 - b;$$

ce qui explique comment une équation algébrique à coefficients commensurables peut pourtant admettre des racines incommensurables du second degré.

Relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique.

1080. Soit l'équation algébrique quelconque de degré m

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

Désignons par a, b, c, ..., k, l, les racines de cette équation. Nous aurons identiquement (1061)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m \\ \quad = A_0 (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-k)(z-l). \end{array} \right.$$

Cela posé, en se reportant à l'établissement de la formule du binôme, on a (264)

$$\begin{aligned} &(z+a)(z+b)(z+c)\ldots(z+k)(z+l) \\ &\quad = z^m + S_1 z^{m-1} + S_2 z^{m-2} + \ldots + S_{m-1} z + S_m. \end{aligned}$$

S_1 représente la somme des m seconds termes des binômes multipliés; S_2, la somme des produits 2 à 2 des mêmes termes; S_3, la somme de leurs produits 3 à 3; ...; S_m est le produit de ces seconds termes.

Si, maintenant, tous les seconds termes des binômes considérés changent de signe, il suffit évidemment, pour avoir le produit correspondant, de changer les signes des termes du développement précédent qui renferment des sommes de produits où les quantités a, b, c, ..., k, l, sont assemblées en *nombre impair*.

Il en résulte

$$\begin{aligned} &(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-k)(z-l) \\ &\quad = z^m - S_1 z^{m-1} + S_2 z^{m-2} - \ldots \mp S_{m-1} z \pm S_m. \end{aligned}$$

Le dernier terme S_m a le signe + ou le signe — suivant que le degré m de l'équation proposée est *pair* ou *impair*.

Finalement, nous aurons, d'après l'identité (1), cette nouvelle identité

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m \\ \quad = A_0 z^m - A_0 S_1 z^{m-1} + A_0 S_2 z^{m-2} - \ldots \\ \qquad \mp A_0 S_{m-1} z \pm A_0 S_m. \end{array} \right.$$

Les coefficients des termes de même degré devant alors (1067) être égaux dans les deux membres, nous aurons

$$A_1 = -A_0 S_1 \quad \text{ou} \quad \frac{A_1}{A_0} = -(a+b+c+\ldots+k+l) = -\sum a,$$

$$A_2 = A_0 S_2 \quad \text{ou} \quad \frac{A_2}{A_0} = +(ab+ac+ad+\ldots+lk) = +\sum ab,$$

$$A_3 = -A_0 S_3 \quad \text{ou} \quad \frac{A_3}{A_0} = -(abc+abd+\ldots+lkh) = -\sum abc,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$A_m = \pm A_0 S_m \quad \text{ou} \quad \frac{A_m}{A_0} = \pm abc\ldots kl.$$

On peut énoncer comme il suit ces importants résultats.

Lorsqu'on a réduit le coefficient du premier terme de l'équation $\varphi(z) = 0$ *à l'unité,* en divisant les deux membres de l'équation par sa valeur primitive A_0, on a les relations ci-après entre les nouveaux coefficients de l'équation et ses racines :

Le coefficient du deuxième terme, multiplié par -1, *représente la somme des racines ;*

Le coefficient du troisième terme, multiplié par $(-1)^2$, *représente la somme des produits* 2 *à* 2 *des racines ;*

Le coefficient du quatrième terme, multiplié par $(-1)^3$, *représente la somme des produits* 3 *à* 3 *des racines ;* ... ;

Le coefficient du $(n+1)^{ième}$ *terme, multiplié par* $(-1)^n$, *représente la somme des produits n à n des racines ;* ... ;

Enfin, *le coefficient du* $(m+1)^{ième}$ *terme ou le terme constant de l'équation, multiplié par* $(-1)^m$, *représente le produit des racines.*

1084. Comme l'équation complète du $n^{ième}$ degré contient $m+1$ termes, la mise en œuvre du théorème précédent fournit en tout m relations entre les m racines. Il peut donc sembler, au premier abord, que ces m relations suffisent pour déterminer les m racines; mais il est facile de montrer que ces relations, qui peuvent grandement faciliter la résolution de l'équation lorsque ses racines sont soumises *a priori* à d'autres conditions particulières, ne peuvent pas, en général, conduire à cette résolution, lorsqu'on les considère seules et toutes ensemble.

En effet, si l'on veut trouver la racine a en utilisant seulement les m relations du n° 1080, il faut éliminer entre ces m équations les $m-1$ autres racines $b, c, d, \ldots, k, l$. Comme toutes les racines entrent d'une manière parfaitement *symétrique* dans les relations employées, l'équation finale en a à laquelle on parviendra sera absolument la même (sauf la lettre représentant l'inconnue) que celle qu'on aurait obtenue en cherchant l'une quelconque des autres racines b, c, d, $\ldots$, k, l. Il en résulte que l'équation en a aura nécessairement pour racines, non seulement a, mais les $m-1$ autres racines de l'équation proposée. Elle ne sera donc autre chose que cette équation elle-même, où l'on substituerait le symbole a au symbole z.

Il n'est pas difficile de vérifier cette remarque par le calcul.

Séparons la racine a des autres racines $b, c, d, \ldots, k, l$, et désignons par $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}$ les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, $\ldots$, $m-1$ à $m-1$ de ces autres racines. On pourra poser alors (1036) les égalités suivantes :

$$\frac{A_1}{A_0} = -a - s_1, \qquad \frac{A_2}{A_0} = as_1 + s_2, \qquad \frac{A_3}{A_0} = -as_2 - s_3, \qquad \ldots,$$

$$\frac{A_{m-1}}{A_0} = \mp as_{m-2} \mp s_{m-1}, \qquad \frac{A_m}{A_0} = \pm as_{m-1}.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité par a^{m-1}, les deux membres de la deuxième par a^{m-2}, les deux membres de la troisième par a^{m-3}, $\ldots$, les deux membres de l'avant-dernière par a, et ajoutons ensuite membre à membre tous les résultats obtenus. Nous aurons alors, en simplifiant,

$$\frac{A_1}{A_0}a^{m-1} + \frac{A_2}{A_0}a^{m-2} + \frac{A_3}{A_0}a^{m-3} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{A_0}a + \frac{A_m}{A_0} = -a^m,$$

c'est-à-dire

$$A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + A_3a^{m-3} + \ldots + A_{m-1}a + A_m = 0.$$

Applications.

1082. Nous nous proposons de constater par quelques exemples très simples l'utilité des relations précédentes, lorsque les racines de l'équation à résoudre sont soumises à quelques conditions spéciales.

1° *Résoudre l'équation générale du troisième degré, dans le cas où l'une des racines de l'équation doit être égale à la somme des deux autres.*

Soit l'équation

$$A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0.$$

Désignons les trois racines cherchées par a, b, c. Nous aurons entre ces racines les quatre relations suivantes, la première imposée par l'énoncé, les trois autres fournies par le théorème du n° 1080 :

$$a = b + c, \tag{1}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = -(a + b + c), \tag{2}$$

$$\frac{A_2}{A_0} = ab + ac + bc, \tag{3}$$

$$\frac{A_3}{A_0} = -abc. \tag{4}$$

Puisqu'on a quatre équations et trois inconnues, il existera (ce qu'on pouvait prévoir) une *équation de condition* entre les coefficients de l'équation générale.

En combinant (1) et (2), on obtient

$$\frac{A_1}{A_0} = -2a \quad \text{ou} \quad a = b + c = -\frac{A_1}{2A_0}.$$

L'équation (3) donne ensuite, d'après (1),

$$\frac{A_2}{A_0} = a(b + c) + bc = a^2 + bc = \frac{A_1^2}{4A_0^2} + bc,$$

c'est-à-dire

$$bc = \frac{A_2}{A_0} - \frac{A_1^2}{4A_0^2} = \frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_0^2}.$$

On connaît ainsi la somme $b + c$ et le produit bc, de sorte que b et c sont racines de l'équation du second degré

$$u^2 + \frac{A_1}{2A_0}u + \frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_0^2} = 0;$$

d'où

$$u = \frac{-A_1 \pm \sqrt{5A_1^2 - 16A_0A_2}}{4A_0}.$$

Les trois racines a, b, c sont donc déterminées.

Quant à l'équation de condition, elle sera donnée par l'équation (4) dont nous n'avons pas fait usage, et dans laquelle nous substituerons

les valeurs trouvées pour a et pour le produit bc. Il viendra

$$\frac{A_3}{A_0} = \frac{A_1}{2A_0}\,\frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_0^2} = \frac{4A_0A_1A_2 - A_1^3}{8A_0^3}$$

ou

$$A_1^3 - 4A_0A_1A_2 + 8A_0^2A_3 = 0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation générale du troisième degré, pour que l'une de ses racines soit égale à la somme des deux autres.

Supposons, par exemple, $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 3$. L'équation de condition donne alors $A_3 = 2$. L'équation à résoudre devient

$$z^3 + 2z^2 + 3z + 2 = 0,$$

et l'on a

$$a = -\frac{2}{2} = -1, \qquad u = \frac{-2 \pm \sqrt{20 - 48}}{4},$$

c'est-à-dire

$$b = \frac{-2 + 2i\sqrt{7}}{4} \qquad \text{et} \qquad c = \frac{-2 - 2i\sqrt{7}}{4}.$$

On a donc bien $a = b + c$.

2° *Résoudre l'équation incomplète du troisième degré*

$$z^3 + pz + q = 0,$$

sachant qu'elle a une racine double.

Le terme en z^2 manquant a pour coefficient 0, ce qui montre que la somme des racines est *nulle*.

Désignons par z_1 la racine simple et par z_2 la racine double, c'est-à-dire deux fois répétée.

Les relations du n° 1080 fournissent ici les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad 0 = z_1 + 2z_2,$$

$$(2) \qquad p = 2z_1z_2 + z_2^2,$$

$$(3) \qquad q = -z_1z_2^2.$$

Puisque nous avons trois équations et deux inconnues, les coefficients p et q seront liés par une équation de condition.

L'équation (1) donne

$$z_1 = -2z_2.$$

Les équations (2) et (3) deviennent alors, par substitution,

$$p = -3z_2^2 \qquad \text{et} \qquad q = 2z_2^3.$$

En divisant ces deux résultats l'un par l'autre, on a immédiatement

$$\frac{q}{p} = -\frac{2z_2}{3} \qquad \text{ou} \qquad z_2 = -\frac{3q}{2p}$$

et, par l'équation (1),

$$z_1 = \frac{3q}{p}.$$

L'équation de condition s'obtient en remplaçant z_2 par sa valeur dans $p = -3z_2^2$. On a ainsi

$$p = -3\frac{9q^2}{4p^2} \qquad \text{ou} \qquad 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

En résumé, l'équation quelconque

$$z^3 + pz + q = 0$$

a une racine double, si la condition $4p^3 + 27q^2 = 0$ est remplie. Sa racine simple a pour expression $\frac{3q}{p}$, et sa racine double, $-\frac{3q}{2p}$.

Supposons, par exemple, $p = 3i$. L'équation de condition donne

$$4.27i^3 + 27q^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad q^2 = 4i,$$

c'est-à-dire

$$q = 2\sqrt{i} = 2\sqrt[4]{-1}.$$

Reportons-nous (119) à la formule fondamentale

$$\sqrt[m]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m},$$

en nous rappelant qu'il suffit de donner à k les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce que l'on ait trouvé, en tenant compte du double signe du second membre, les m valeurs distinctes de $\sqrt[m]{-1}$.

Nous aurons, dans le cas actuel, en faisant $m = 4$,

$$\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4},$$

et il suffira de donner à k les valeurs 0 et 1.

On a ainsi, pour $\sqrt[4]{-1}$, les deux couples de valeurs

$$\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4};$$

ce qui revient, d'après les propriétés des arcs supplémentaires, à

$$\pm\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4} = \pm\cos\frac{\pi}{4}(1 \pm i) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

On a donc enfin

$$q = \pm\sqrt{2}(1 \pm i).$$

Mais, d'après l'équation de condition, on doit avoir $q^2 = 4i$. Comme $(1 \pm i)^2$ se réduit à $\pm 2i$, on voit qu'il faut rejeter le signe — dans cette parenthèse et prendre seulement

$$q = \pm \sqrt{2}\,(1 + i).$$

L'équation à résoudre est alors

$$z^3 + 3iz \pm \sqrt{2}\,(1 + i) = 0.$$

Sa racine simple a pour valeur

$$\pm \frac{3\sqrt{2}\,(1+i)}{3i} = \pm \sqrt{2}\,\frac{1+i}{i},$$

tandis que celle de sa racine double est égale à

$$\mp \frac{3\sqrt{2}\,(1+i)}{6i} = \mp \sqrt{2}\,\frac{1+i}{2i}.$$

Les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble.

Il est facile de représenter géométriquement ces racines imaginaires.

Considérons la racine simple qui correspond à la seconde valeur de q ou à la seconde solution. Elle a pour expression

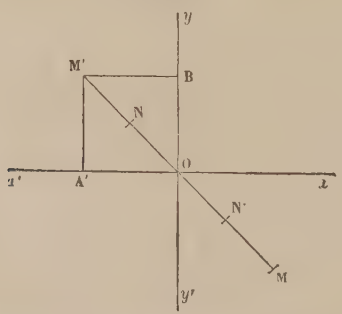
$$-\sqrt{2}\,\frac{1+i}{i}.$$

Multiplions ses deux termes par $-i$, ce qui est permis (95); son expression deviendra

$$-\sqrt{2}\,(-i - i^2) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Pour la construire (125, 126), il suffit alors de prendre (*fig.* 25)

Fig. 25.



$OA' = \sqrt{2}$ sur la partie négative de l'axe xx' et $OB = \sqrt{2}$ sur la partie positive de l'axe yy'. Le point M', dont les coordonnées sont OA' et OB, ou le rayon vecteur OM' (132), représente la racine dont il s'agit.

La racine simple qui fait partie de l'autre solution ne différant de celle qu'on vient de construire que par un changement de signe, on n'a, pour la représenter à son tour (129), qu'à prolonger le vecteur OM′ de l'autre côté de l'origine d'une longueur OM = OM′.

Quant aux racines doubles des deux solutions, elles sont les moitiés des racines simples correspondantes, changées de signes. On prendra donc les milieux N et N′ des vecteurs OM′ et OM, et l'on associera la racine double ON′ avec la racine simple OM′ et la racine double ON avec la racine simple OM.

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Définitions.

1083. Les relations établies à la fin du Chapitre précédent entre les coefficients d'une équation algébrique et ses racines nous conduisent naturellement à exposer les notions fondamentales relatives à la théorie des fonctions symétriques, puisque les coefficients d'une pareille équation sont précisément des fonctions symétriques de ses racines.

D'une manière générale, on entend par *fonction symétrique de plusieurs quantités* une fonction qui ne change pas lorsqu'on échange entre elles, de toutes les manières possibles, les quantités qui y entrent. Ainsi, une expression renfermant plusieurs lettres et qui reste la même quand on permute deux lettres quelconques est une fonction symétrique de ces lettres.

Nous ne considérerons que des fonctions symétriques rationnelles.

Les expressions

$$a^2+b^2+c^2, \qquad ab+ac+bc, \qquad \frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2},$$

sont des fonctions rationnelles et symétriques des trois lettres a, b, c : les deux premières sont entières, la troisième est rationnelle ou fractionnaire.

Toute fonction symétrique non entière peut être ramenée, par la réduction au même dénominateur, à une fraction dont les deux termes sont des fonctions symétriques et entières

Ainsi, la dernière fonction indiquée ci-dessus peut être ramenée à la forme

$$\frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^2b^2c^2}.$$

On peut donc s'occuper seulement des fonctions symétriques entières.

De plus, lorsqu'une fonction symétrique entière n'est pas homogène (793), elle est forcément la somme de plusieurs fonctions symétriques homogènes, comme, par exemple,

$$ab + ac + bc - abc.$$

Il est permis, par conséquent, de se borner à l'étude des fonctions symétriques entières et homogènes. Mais, dans cette hypothèse même, il y a encore lieu de distinguer, la fonction considérée pouvant être la somme de deux ou d'un plus grand nombre de fonctions symétriques de même degré, mais différentes, qu'on peut calculer séparément. Ainsi, on a (302, 303)

$$(a + b + c + \ldots + l)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab,$$
$$(a + b + c + \ldots + l)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc.$$

On se restreindra donc finalement aux fonctions symétriques, entières et homogènes, où les exposants des lettres sont les mêmes dans un terme quelconque, de sorte que la fonction est définie lorsqu'on donne les lettres qui y entrent et un seul de ses termes.

Lorsque chaque terme ne contient qu'une lettre, on a une fonction symétrique *simple* ou *du premier ordre;* lorsque chaque terme contient deux lettres, on a une fonction symétrique *double* ou *du deuxième ordre;* et ainsi de suite.

Les fonctions symétriques simples de plusieurs quantités ne sont autre chose que les *sommes des puissances semblables* de ces quantités. Nous avons trouvé précédemment (285 et suiv.) l'expression des fonctions symétriques simples relatives aux termes d'une progression arithmétique.

Nous allons nous proposer de chercher les formules qui font connaître les fonctions symétriques simples des racines d'une équation algébrique quelconque, sans qu'on ait besoin de déterminer ces racines

Fonctions symétriques simples des racines d'une équation algébrique. Formules de Newton.

1084. Soit l'équation algébrique de degré m ramenée à la forme

$$(1) \quad Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_{m-1} z + p_m = 0.$$

Nous désignerons ses m racines par a, b, c, ..., k, l. Si Z' est la dérivée du premier membre Z, on a toujours (887)

$$(2) \quad Z' = m z^{m-1} + (m-1) p_1 z^{m-2} + (m-2) p_2 z^{m-3} + \ldots + p_{m-1}.$$

On peut indiquer une autre expression de la dérivée Z' et, en l'identifiant avec la précédente, on parviendra aux résultats cherchés.

Nous avons vu, en effet (1061), que

$$Z = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-k)(z-l),$$

et nous savons (786) que la dérivée d'un produit d'un nombre quelconque m de facteurs ou de fonctions (m étant fini) est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque facteur ou de chaque fonction par le produit de tous les autres facteurs ou de toutes les autres fonctions. Or, la dérivée du premier facteur $z-a$ par rapport à z est l'unité, qu'il faut multiplier par le produit

$$(z-b)(z-c)\ldots(z-k)(z-l)$$

de tous les autres facteurs, c'est-à-dire par $\frac{Z}{z-a}$, et ainsi de suite. On a donc immédiatement

$$(3) \quad Z' = \frac{Z}{z-a} + \frac{Z}{z-b} + \frac{Z}{z-c} + \ldots + \frac{Z}{z-k} + \frac{Z}{z-l}.$$

Mais nous avons indiqué une règle commode pour trouver rapidement le quotient de Z par un binôme de la forme $z-a$ (1068, 228). Nous pourrons donc écrire, d'après cette règle et

en nous reportant à l'équation (1),

$$(4)\quad \frac{Z}{z-a} = z^{m-1} + a \;\Big|\; z^{m-2} + a^2 + p_1 \;\Big|\; z^{m-3} + a_3 + p_1 a + p_2 \;\Big|\; z^{m-4} + \ldots + a^{m-1} + p_1 a^{m-2} + p_2 a^{m-3} + p_3 a^{m-4} + \ldots\ldots + p_{m-2} a + p_{m-1}.$$

Il n'y a qu'à remplacer successivement a par les autres racines $b, c, \ldots, k, l$, dans le second membre de l'équation (4), pour avoir les autres quotients

$$\frac{Z}{z-b}, \quad \frac{Z}{z-c}, \quad \ldots, \quad \frac{Z}{z-k}, \quad \frac{Z}{z-l}.$$

En les ajoutant tous ensemble et avec le précédent, et en représentant d'une manière générale par la notation S_n la somme $a^n + b^n + c^n + \ldots + k^n + l^n$, nous aurons évidemment

$$(5)\quad Z' = m z^{m-1} + S_1 \;\Big|\; z^{m-2} + S_2 + m p_1 \;\Big|\; z^{m-3} + S_3 + p_1 S_1 + m p_2 \;\Big|\; z^{m-4} + \ldots + S_{m-1} + p_1 S_{m-2} + p_2 S_{m-3} + p_3 S_{m-4} + \ldots\ldots + p_{m-2} S_1 + m p_{m-1}.$$

En identifiant les deux valeurs de Z', c'est-à-dire les seconds membres des égalités (2) et (5), et en simplifiant, nous obtiendrons les formules suivantes :

$$(A)\quad \begin{cases} S_1 + p_1 = 0, \\ S_2 + p_1 S_1 + 2 p_2 = 0, \\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3 p_3 = 0, \\ S_4 + p_1 S_3 + p_2 S_2 + p_3 S_1 + 4 p_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_{m-1} + p_1 S_{m-2} + p_2 S_{m-3} + p_3 S_{m-4} + \ldots + p_{m-2} S_1 + (m-1) p_{m-1} = 0. \end{cases}$$

La première des formules (A) fait connaître S_1 ou la somme des racines (1080); la deuxième fait alors connaître S_2 ou la somme des carrés des racines; la troisième fait connaître S_3 ou la somme de leurs cubes, et ainsi de suite, jusqu'à la $(m-1)^{ième}$ ou dernière qui fait connaître S_{m-1} ou la somme des puissances $(m-1)$ des racines. En effectuant de proche en proche ces calculs très simples, il vient

$$\begin{aligned}
&S_1 = -p_1,\\
&S_2 = p_1^2 - 2p_2,\\
&S_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3,\\
&S_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les formules (A) vont du degré 1 au degré $m-1$. Pour poursuivre *au delà* ou *en deçà*, désignons par n un entier positif, négatif ou nul, et multiplions les deux membres de l'équation donnée $Z = 0$ par z^n. Elle deviendra

$$z^{m+n} + p_1z^{m+n-1} + p_2z^{m+n-2} + p_3z^{m+n-3} + \ldots + p_{m-1}z^{n+1} + p_mz^n = 0.$$

Remplaçons alors successivement z par chacune des racines $a, b, c, \ldots, k, l$, et ajoutons ensuite tous les résultats obtenus. Nous aurons évidemment

$$(\beta)\quad \left\{ \begin{aligned} &S_{m+n} + p_1S_{m+n-1} + p_2S_{m+n-2}\\ &\quad + p_3S_{m+n-3} + \ldots + p_{m-1}S_{n+1} + p_mS_n = 0. \end{aligned} \right.$$

En donnant d'abord à n les valeurs positives 0, 1, 2, 3, ..., et en remarquant que $S_0 = m$, nous trouverons cette deuxième série de formules :

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} &S_m + p_1S_{m-1} + p_2S_{m-2} + p_3S_{m-3} + \ldots + p_{m-1}S_1 + mp_m = 0,\\ &S_{m+1} + p_1S_m + p_2S_{m-1} + p_3S_{m-2} + \ldots + p_{m-1}S_2 + p_mS_1 = 0,\\ &S_{m+2} + p_1S_{m+1} + p_2S_m + p_3S_{m-1} + \ldots + p_{m-1}S_3 + p_mS_2 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

La première des formules (B) donne S_m, puisqu'on connaît les autres sommes par les formules (A); la deuxième donne ensuite S_{m+1}; la troisième, S_{m+2}, etc.

On peut remarquer que les sommes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{m-1}, S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots$, ne renferment dans leurs expressions

aucuns dénominateurs (autres que ceux que les coefficients de l'équation donnée peuvent contenir), puisque les différentes inconnues ont toutes pour coefficient l'unité. De plus, chaque somme est une fonction entière des coefficients de l'équation, de même degré que son indice, de sorte que, si ces coefficients sont des nombres entiers, les différentes sommes sont elles-mêmes des nombres entiers.

Les formules (A) et (B) ont été données par NEWTON. Il est clair que l'on peut indifféremment, à l'aide de ces formules, déterminer les sommes en fonction des coefficients de l'équation, ou les coefficients en fonction des sommes lorsqu'on connaît m de ces dernières.

Si l'on substitue maintenant à n, dans l'équation (β), *les valeurs négatives* $-1, -2, -3, \ldots$, on obtiendra une troisième série de formules qui feront connaître les sommes des puissances semblables à *exposants négatifs*. Ces formules sont :

$$(B') \quad \begin{cases} S_{m-1} + p_1 S_{m-2} + p_2 S_{m-3} + p_3 S_{m-4} + \ldots + mp_{m-1} + p_m S_{-1} = 0, \\ S_{m-2} + p_1 S_{m-3} + p_2 S_{m-4} + p_3 S_{m-5} + \ldots + p_{m-1} S_{-1} + p_m S_{-2} = 0, \\ S_{m-3} + p_1 S_{m-4} + p_2 S_{m-5} + p_3 S_{m-6} + \ldots + p_{m-1} S_{-2} + p_m S_{-3} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les autres sommes étant connues, la première équation donnera S_{-1}; la deuxième donnera ensuite S_{-2}; la troisième, S_{-3}, etc. Mais, à cause du coefficient constant p_m, la remarque faite plus haut n'est pas applicable à ces nouvelles sommes.

[Au lieu d'employer les formules (B'), on pourrait changer simplement dans l'équation proposée z en $\frac{1}{z}$ (nous insisterons plus loin sur cette transformation) et continuer alors à se servir des groupes de formules (A) et (B); car les puissances positives de $\frac{1}{z}$ sont les puissances négatives de z.]

REMARQUE. — Lorsqu'on a une fonction symétrique homogène des coefficients $p_1, p_2, p_3, \ldots$, le nombre de facteurs contenus dans chaque terme est l'*ordre* de la fonction. Si la fonction n'est pas homogène, son ordre est l'ordre le plus élevé parmi ceux de ses différents termes.

Dans les fonctions symétriques homogènes que nous venons de considérer, tous les termes ont le même poids, et ce poids

est celui de la fonction. Le *poids* d'un terme est la somme des indices des facteurs qui y entrent. Ainsi le poids du terme $p_1p_2p_3$ est $1+2+3$. Le poids du terme

$$p_1p_2^2p_3^3 \quad \text{ou} \quad p_1p_2p_2p_3p_3p_3$$

est $1+2\times 2+3\times 3$. D'une manière générale, le poids du terme $p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma$ est donc $\alpha+2\beta+3\gamma$, et son ordre est $\alpha+\beta+\gamma$.

Il est clair, d'après les formules précédemment établies, que, par rapport aux coefficients de l'équation donnée, le poids de S_1 est égal à 1, celui de S_2 égal à 2, celui de S_3 égal à 3, et, d'une manière générale, celui de S_m égal à m.

Autre procédé fondé sur l'emploi de la division.

1085. Pour arriver aux mêmes résultats, on peut suivre un autre procédé où une simple division algébrique suffit.

Reprenons l'équation (3) du n° 1084 mise sous cette forme :

$$(1)\qquad \frac{Z'}{Z}+\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\ldots+\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z-l}.$$

Si l'on effectue la division de 1 par $z-a$, on trouve

$$(2)\qquad \frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^2}+\frac{a^2}{z^3}+\frac{a^3}{z^4}+\ldots.$$

Si, dans la relation (2), on remplace successivement a par les $m-1$ autres racines $b, c, \ldots, k, l$, et qu'on ajoute ensuite membre à membre tous les résultats obtenus, il viendra évidemment, en conservant les mêmes notations que dans le numéro précédent,

$$(3)\qquad \frac{Z'}{Z}=\frac{m}{z}+\frac{S_1}{z^2}+\frac{S_2}{z^3}+\frac{S_3}{z^4}+\frac{S_4}{z^5}+\ldots.$$

Ainsi, en divisant Z′ par Z et en remarquant que $m=S_0$, on voit que les sommes successives des puissances semblables *positives* des racines de l'équation $Z=0$ sont les coefficients de $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \ldots$, ou de $z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, \ldots$, dans le quotient de la division du polynôme dérivé Z′ par le polynôme Z.

Bien que le calcul n'offre aucune difficulté, on peut, pour éviter les exposants négatifs, multiplier d'abord les deux membres de la relation (3) par z; ce qui donne

$$(3\ bis) \qquad \frac{zZ'}{Z} = m + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \frac{S_3}{z^3} + \frac{S_4}{z^4} + \ldots;$$

puis, changer ensuite z en $\frac{1}{u}$. Le premier membre de l'égalité précédente deviendra $\frac{U_1}{U}$, U_1 et U étant des polynomes en u, et l'on aura

$$(4) \qquad \frac{U_1}{U} = m + S_1 u + S_2 u^2 + S_3 u^3 + S_4 u^4 + \ldots.$$

En effectuant la division des deux polynomes U_1 et U, ordonnés suivant les puissances croissantes de u, les coefficients du quotient ordonné de même représenteront les sommes S_0, S_1, S_2, S_3, ..., indéfiniment.

On peut trouver d'une manière analogue les sommes S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, ... des puissances semblables *négatives* des racines de $Z = 0$.

Posons

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z},$$

et effectuons la division de 1 par $a - z$. Nous aurons

$$\frac{1}{z-a} = -\left(\frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \frac{z^3}{a^4} + \ldots\right).$$

Donc, évidemment, en remplaçant successivement a dans la relation précédente par les $m - 1$ autres racines et en se reportant à l'équation (1),

$$(5) \qquad -\frac{Z'}{Z} = S_{-1} + S_{-2} z + S_{-3} z^2 + S_{-4} z^3 + \ldots.$$

Il suffira donc encore d'effectuer la division des deux polynomes $-Z'$ et Z ordonnés suivant les puissances croissantes de z. Les coefficients du quotient ordonné de même représenteront les sommes S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}, ... indéfiniment.

On doit avoir soin d'ailleurs de rétablir dans les quotients trouvés les termes manquants en leur donnant le coefficient o.

1086. Exemple. — Un exemple très simple ne sera pas inutile. Prenons l'équation classique

$$z^3 - 7z + 7 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (3 *bis*) du n° 1085 devient ici

$$\frac{z(3z^2 - 7)}{z^3 - 7z + 7}.$$

Changeons dans cette expression z en $\frac{1}{u}$. Nous aurons

$$\frac{\frac{1}{u}\left(\frac{3}{u^2} - 7\right)}{\frac{1}{u^3} - \frac{7}{u} + 7}$$

ou, en multipliant les deux termes par u^3 en ayant soin de les ordonner suivant les puissances croissantes de u,

$$\frac{U_1}{U} = \frac{3 - 7u^2}{1 - 7u^2 + 7u^3}.$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$3 + 0.u + 14u^2 - 21u^3 + 98u^4 - 245u^5 + 833u^6 - 2401u^7 + 7546u^8 - 22638u^9 + \ldots.$$

On a donc, dans ce cas,

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 14, \quad S_3 = -21, \quad S_4 = 98, \quad S_5 = -245,$$
$$S_6 = 833, \quad S_7 = -2401, \quad S_8 = 7546, \quad S_9 = -22638, \quad \ldots.$$

Pour les sommes de puissances négatives, on considérera l'expression

$$-\frac{Z'}{Z} = \frac{7 - 3z^2}{7 - 7z + z^3}.$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$1 + z + \frac{4}{7}z^2 + \frac{3}{7}z^3 + \frac{2}{7}z^4 + \frac{10}{49}z^5 + \frac{1}{7}z^6 + \frac{5}{49}z^7 + \ldots.$$

On a donc, dans ce cas,

$$S_{-1}=1, \quad S_{-2}=1, \quad S_{-3}=\frac{4}{7}, \quad S_{-4}=\frac{3}{7}, \quad S_{-5}=\frac{2}{7},$$

$$S_{-6}=\frac{10}{49}, \quad S_{-7}=\frac{1}{7}, \quad S_{-8}=\frac{5}{49}, \quad \ldots.$$

On peut vérifier ces dernières valeurs à l'aide des formules (B′) du n° 1086, combinées avec les résultats précédents.

Fonctions symétriques d'ordres supérieurs des racines d'une équation algébrique.

1087. Soient toujours l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré $Z=0$ et ses racines $a, b, c, \ldots, k, l$.

Proposons-nous de calculer les fonctions symétriques dont chaque terme contient deux racines, c'est-à-dire les fonctions symétriques *doubles*.

En supposant d'abord les exposants des deux lettres différents, chaque terme sera de la forme $a^\alpha b^\beta$, et nous représenterons ces fonctions symétriques doubles par la notation

$$\Sigma a^\alpha b^\beta.$$

Cela posé, considérons le produit des deux fonctions symétriques simples correspondantes, c'est-à-dire (1086) le produit de S_α par S_β.

Comme on a

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots + k^\alpha + l^\alpha,$$
$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \ldots + k^\beta + l^\beta,$$

il est clair que le produit $S_\alpha S_\beta$ comprend deux sortes de termes : des termes tels que $a^{\alpha+\beta}$ pour toutes les racines, et des termes tels que $a^\alpha b^\beta$ pour toutes les combinaisons deux à deux des puissances α et β des racines. On a donc précisément

$$S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} + \Sigma a^\alpha b_\beta,$$

d'où

$$\Sigma a^\alpha b^\beta + S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}. \tag{1}$$

Si les exposants α et β deviennent égaux, on voit que le terme $a^\alpha b^\beta$ ne diffère plus du terme $a^\beta b^\alpha$, c'est-à-dire que les termes de $\Sigma a^\alpha b^\beta$ devenant égaux deux à deux, on doit rem-

placer $\Sigma a^\alpha b^\beta$ par $2\Sigma a^\alpha b^\alpha$. On a, par suite, dans cette hypothèse,

(1 *bis*) $$\Sigma a^\alpha b^\alpha = \tfrac{1}{2}[(S_\alpha)^2 - S_{2\alpha}].$$

1088. Passons aux fonctions symétriques dont chaque terme contient trois racines, c'est-à-dire aux fonctions symétriques *triples*.

En supposant d'abord les exposants des trois lettres différents, chaque terme sera de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, et nous représenterons ces fonctions symétriques triples par la notation

$$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} S_\alpha &= a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots + k^\alpha + l^\alpha, \\ S_\beta &= a^\beta + b^\beta + c^\beta + \ldots + k^\beta + l^\beta, \\ S_\gamma &= a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \ldots + k^\gamma + l^\gamma, \end{aligned}$$

et, si l'on multiplie ses trois sommes entre elles, le produit comprend évidemment cinq sortes de termes : des termes de la forme $a^{\alpha+\beta+\gamma}$; des termes de la forme $a^{\alpha+\beta}b^\gamma$; des termes de la forme $a^{\alpha+\gamma}b^\beta$; des termes de la forme $a^{\beta+\gamma}b^\alpha$; et, enfin, des termes de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, sans qu'aucune autre combinaison puisse se présenter. Il vient donc, d'après les notations adoptées,

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_{\alpha+\beta+\gamma} &+ \Sigma a^{\alpha+\beta} b^\gamma + \Sigma a^{\alpha+\gamma} b^\beta \\ &+ \Sigma a^{\beta+\gamma} b^\alpha + \Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma. \end{aligned}$$

Mais la formule (1) du numéro précédent donne

$$\begin{aligned} \Sigma a^{\alpha+\beta} b^\gamma &= S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\beta+\gamma}, \\ \Sigma a^{\alpha+\gamma} b^\beta &= S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma}, \\ \Sigma a^{\beta+\gamma} b^\alpha &= S_{\beta+\gamma} S_\alpha - S_{\alpha+\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

On a donc, finalement, la formule suivante pour les fonctions symétriques triples :

(2) $$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\beta+\gamma} S_\alpha + 2 S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Lorsque deux des exposants α et β deviennent égaux, le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ne diffère plus du terme $a^\beta b^\alpha c^\gamma$, de sorte que, les termes de $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ devenant égaux deux à deux, on doit rem-

placer $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par $2\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\gamma$. On a alors

$$(2\ bis)\qquad \Sigma a^\alpha b^\alpha c^\gamma = \tfrac{1}{2}(S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha} S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma} S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}).$$

Lorsque les trois exposants α, β, γ deviennent égaux, les six termes qui correspondent aux permutations des trois lettres a, b, c, sans toucher aux exposants (243), deviennent eux-mêmes identiques. On doit donc remplacer, dans ce cas, $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par $6\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\alpha$. On a alors

$$(2\ ter)\qquad \Sigma a^\alpha b^\alpha c^\alpha = \tfrac{1}{6}(S_\alpha^3 - 3S_{2\alpha} S_\alpha + 2S_{3\alpha}).$$

1089. On continuera de la même manière pour calculer les fonctions symétriques *quadruples*, *quintuples*, etc.

Il est clair que si, ayant calculé l'expression de la fonction symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre, k exposants deviennent égaux entre eux parmi les n exposants considérés, il faut diviser l'expression primitive, modifiée en vertu de la même hypothèse, par le produit $k!$ (242).

Voici le Tableau des fonctions symétriques les plus simples de l'équation

$$z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

a, b, c, d, ... désignant les racines.

I. $\Sigma a = -p_1$.

II. $\Sigma^2 a = p_1^2 - 2p_2$; $\Sigma ab = p_2$.

III. $\Sigma a^3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$; $\Sigma a^2 b = -p_1p_2 + 3p_3$;
$\Sigma abc = -p_3$.

IV. $\Sigma a^4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 - 4p_4$;
$\Sigma a^3 b = p_1^2p_2 - 2p_2^2 - p_1p_3 + 4p_4$;
$\Sigma a^2 b^2 = p_2^2 - 2p_1p_3 + 2p_4$; $\Sigma a^2 bc = p_1p_3 - 4p_4$; $\Sigma abcd = p_4$.

V. $\Sigma a^5 = -p_1^5 + 5p_1^3p_2 - 5p_1p_2^2 - 5p_1^2p_3 + 5p_2p_3 + 5p_1p_4 - 5p_5$;
$\Sigma a^4 b = -p_1^3p_2 + 3p_1p_2^2 + p_1^2p_3 - 5p_2p_3 - p_1p_4 + 5p_5$;
$\Sigma a^3 b^2 = -p_1p_2^2 + 2p_1^2p_3 + p_2p_3 - 5p_1p_4 + 5p_5$;
$\Sigma a^3 bc = -p^2p_3 + 2p_2p_3 + p_1p_4 - 5p_5$;
$\Sigma a^2 b^2 c = -p_2p_3 + 3p_1p_4 - 5p_5$; $\Sigma a^2 bcd = -p_1p_4 + 5p_5$;
$\Sigma abcde = -p_5$.

VI. $\Sigma a^6 = p_1^6 - 6p_1^4p_2 + 9p_1^2p_2^2 - 2p_2^3 + 6p_1^3p_3 - 12p_1p_2p_3$
$+ 3p_3^2 - 6p_1^2p_4 + 6p_2p_4 + 6p_1p_5 - 6p_6$.

VII. $\Sigma a^7 = -p_1^7 + 7p_1^5p_2 - 14p_1^3p_2 + 7p_1p_2^3 - 7p_1^4p_3 + 21p_1^2p_2p_3$
$- 7p_2^2p_3 - 7p_1p_3^2 + 7p_1^3p_4 - 14p_1p_2p_4 + 7p_3p_4 - 7p_1^3p_5$
$+ 7p_2p_5 + 7p_1p_6 - 7p_7$.

1090. On conclut de ce qui précède une importante proposition.

Puisque les fonctions symétriques des différents ordres dépendent toujours de celles du premier ordre, *toute fonction symétrique, entière et homogène, des racines d'une équation algébrique, est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation* (1084). *Il en est* donc *de même*, d'après les explications données au n° 1083, *de toute fonction symétrique et rationnelle des racines.*

Remarque. — D'après ce qui précède (1084, *Remarque*) et d'après les formules qu'on vient d'obtenir (1087, 1088), on voit que le poids d'une fonction symétrique double, telle que $\Sigma a^{\alpha} b^{\beta}$, est égal à $\alpha + \beta$, et que cette fonction est du deuxième ordre, puisqu'il n'entre que deux facteurs dans chaque terme. De même, le poids d'une fonction symétrique triple, telle que $\Sigma a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, est égal à $\alpha + \beta + \gamma$, et cette fonction est du troisième ordre....

Ainsi le poids d'une fonction symétrique de degré μ des racines d'une équation algébrique est précisément égal à μ, par rapport aux coefficients de l'équation, parce que, d'une manière générale, S^m est de poids m par rapport à ces mêmes coefficients,

Si l'on a à considérer, par exemple, la fonction symétrique $\Sigma a^2 (b-c)^2$, elle est du deuxième ordre et son poids est 4. Elle ne renfermera donc (1084) que des termes en $p_1 p_3$, en p_2^2 et en p_4, et il ne restera plus qu'à trouver les coefficients numériques de ces termes.

Méthode de Cauchy.

1091. Nous croyons devoir exposer encore, sur le sujet qui nous occupe, la méthode si ingénieuse donnée par Cauchy dans ses *Anciens exercices de Mathématiques*, et qui permet de trouver directement une fonction symétrique et entière quelconque des racines d'une équation. Cette méthode remarquable repose sur une proposition préliminaire que nous allons développer.

1092. Soient toujours l'équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré

$$(1)\quad Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + p_3 z^{m-3} + \ldots + p_{m-1} z + p_m = 0$$

et a, b, c, ..., k, l ses racines.

Désignons par Σ une fonction symétrique et entière de ces m racines.

Admettons que, par un procédé quelconque, on ait éliminé de l'expression de Σ toutes les racines, sauf la première a. On pourra alors, en ordonnant Σ par rapport à a, la mettre sous la forme

$$(2)\quad \Sigma = N_0 a^n + N_1 a^{n-1} + N_2 a^{n-2} + \ldots + N_{n-1} a + N_n,$$

N_0, N_1, N_2, ..., N_n étant des coefficients composés rationnellement (1090) avec ceux de l'équation $Z = 0$.

En substituant a à la place de z dans cette équation, il vient, en appelant A le résultat de la substitution,

$$(3)\quad A = a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + p_3 a^{m-3} + \ldots + p_{m-1} a + p_m.$$

Le lemme qu'il s'agit d'établir est alors celui-ci :

Si l'on divise l'expression (2) *de* Σ *par la valeur* (3) *de* A, *le reste de cette division est indépendant de a et représente précisément la valeur de* Σ.

En effet, soient Q le quotient obtenu et R le reste. On a identiquement

$$\Sigma = AQ + R.$$

Mais, puisque a est racine de l'équation (1), on a nécessairement $A = 0$ et, par suite,

$$\Sigma = R.$$

D'ailleurs, le reste R est au plus du degré $m - 1$ par rapport à a, puisque le diviseur A est du degré m par rapport à la même lettre. On peut donc poser

$$R = \Sigma = \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} + \ldots + \nu a + \rho.$$

Mais, si, au lieu de conserver dans Σ la première racine a, on avait conservé l'une quelconque des autres racines b, c, ..., k, l de l'équation considérée, il est clair que, puisque Σ est une fonction symétrique de ses m racines, on serait parvenu

aux mêmes valeurs pour les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu, \rho$, et que le seul changement eût été la substitution à la place de a de la nouvelle racine choisie.

On voit par là que l'équation

$$\Sigma = \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \ldots + \nu z + \rho$$

ou

$$(4) \quad \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \ldots + \nu z + (\rho - \Sigma) = 0$$

doit être satisfaite par les m valeurs de z égales aux m racines de l'équation (1). L'équation (4) étant du degré $m-1$ est alors identiquement nulle, c'est-à-dire qu'elle a tous ses coefficients égaux à zéro (1066). Il en résulte $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ..., $\nu = 0$, et

$$(5) \qquad \Sigma = \rho;$$

ce qui démontre le lemme énoncé.

Nous avons supposé dans ce qui précède les racines a, b, c, ..., k, l, différentes les unes des autres; mais la proposition subsiste à la limite, lorsque quelques-unes deviennent égales entre elles, puisque cette proposition demeure vraie lorsque ces mêmes racines présentent entre elles des différences aussi petites qu'on voudra.

1093. Venons maintenant à la méthode de Cauchy. Les notations restant les mêmes, divisons Z par $z - a$; puis, le quotient obtenu Z_1 par $z - b$; le nouveau quotient Z_2 par $z - c$; et, ainsi de suite, jusqu'à ce que nous parvenions à un quotient Z_{m-1} du premier degré, qui ne contiendra plus que le facteur premier $z - l$ (1061).

Considérons alors les m équations

$$(1) \quad Z = 0, \qquad Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_{m-1} = 0.$$

La première, qui est l'équation proposée, a pour racines a, b, c, ..., k, l. La deuxième, dont on calculera le premier membre Z_1 par la règle indiquée (1068), a pour racines b, c, ..., k, l, et ses coefficients, d'après cette règle, sont exprimés sous forme entière en fonction de la première racine a et des coefficients de Z; la troisième a pour racines c, ..., k, l, et ses coefficients sont de même exprimés sous forme entière en fonction de la deuxième racine b et des coefficients

de Z_1, c'est-à-dire en fonction des deux premières racines a et b et des coefficients de Z; .... D'une manière générale, les coefficients de l'une quelconque des m équations considérées sont exprimés sous forme entière en fonction des coefficients de la première et des racines qui ne satisfont plus à l'équation à laquelle on est parvenu ou des racines supprimées jusque-là.

Dans ces conditions, désignons par A, B, C, ..., K, L, les valeurs des premiers membres des m équations (1), lorsqu'on y substitue *respectivement* à la place de z les m racines $a, b, c, \ldots, k, l$. Nous aurons nécessairement

$$(2)\quad A=0,\quad B=0,\quad C=0,\quad \ldots,\quad K=0,\quad L=0.$$

La fonction symétrique et rationnelle Σ dont nous voulons trouver la valeur indépendamment des racines de $Z=0$ est fonction symétrique des racines de cette équation, aussi bien que des racines des autres équations (1); ce qui va nous permettre d'éliminer successivement de l'expression de Σ les m racines $a, b, c, \ldots, k, l$, *en nous fondant toujours sur la proposition du n°* **1092.**

Nous commencerons par éliminer la dernière racine l et, pour cela, nous n'aurons qu'à résoudre l'équation du premier degré $L=0$, qui nous donnera la valeur de l à substituer dans Σ. Il est préférable, pour opérer toujours de même, d'ordonner Σ par rapport à l et d'effectuer ensuite sa division par L : le reste obtenu sera Σ débarrassé de l.

En regardant à présent la valeur de Σ comme une fonction symétrique des deux racines k et l, dont la dernière est éliminée, et en ordonnant cette valeur par rapport à k, on divisera Σ par K, et le reste obtenu sera la valeur de Σ débarrassée de k et, par conséquent, de k et de l.

En continuant successivement de la même manière, on parviendra à une valeur de Σ qui ne contiendra plus que a. On l'ordonnera par rapport à a, on la divisera par A, et le reste obtenu sera la valeur de Σ qu'on voulait trouver, débarrassée de toutes les racines $a, b, c, \ldots, k, l$, et exprimée seulement en fonction des coefficients de l'équation proposée.

1094. Le premier terme de chaque polynôme diviseur ayant pour coefficient l'unité, les divisions n'introduiront par

elles-mêmes aucun dénominateur. Il en résulte que les différents restes ne pourront renfermer d'autres dénominateurs que ceux qui se trouvent dans les coefficients mêmes de l'équation considérée.

Σ *est* donc *nécessairement une fonction symétrique et rationnelle de ces coefficients; et, si ces mêmes coefficients sont entiers, la valeur définitive de* Σ *est elle-même un nombre entier.*

Cette remarquable propriété est la généralisation ou l'extension de celle énoncée au n° 1090. Cette extension découle immédiatement de la méthode de Cauchy, tandis que la méthode de Newton ne peut y conduire directement.

Application.

1095. Proposons nous de déterminer par la méthode précédente (1093) la fonction symétrique qui représente le produit des carrés des différences des racines d'une équation donnée, prises deux à deux.

En conservant toujours les mêmes notations, nous aurons

$$(1)\quad Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + p_3 z^{m-3} + \ldots + p_{m-1} z + p_m = 0,$$

en même temps que, pour l'inconnue cherchée,

$$(1\ bis)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma = (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 \ldots \\ \qquad \times (b-c)^2 (b-d)^2 \ldots (k-l)^2. \end{array} \right.$$

En appliquant la règle du n° 1068, formons l'équation

$$Z_1 = \frac{Z}{z-a} = 0.$$

Nous aurons

$$(2)\quad \begin{array}{rrrl} Z_1 = z^{m-1} + a & z^{m-2} + a^2 & z^{m-3} + \ldots + a^{m-1} & = 0, \\ + p_1 & + p_1 a & + p_1 a^{m-2} & \\ & + p_2 & + p_1 a^{m-3} & \\ & & + \ldots\ldots & \\ & & + p_{m-1} a & \\ & & + p_{m-1} & \end{array}$$

et la même fonction symétrique pour l'équation (2) sera

$$(2\,bis) \qquad \Sigma_1 = (b-c)^2(b-d)^2\ldots(k-l)^2.$$

On aura donc

$$(3) \qquad \Sigma = (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\ldots(a-l)^2\Sigma_1.$$

D'autre part, la formule (3) du n° 1084 donne, pour la dérivée Z′ du polynôme Z,

$$Z' = \frac{Z}{z-a} + \frac{Z}{z-b} + \frac{Z}{z-c} + \ldots + \frac{Z}{z-k} + \frac{Z}{z-l}.$$

Pour $z = a$, on a, par hypothèse, $Z = 0$. Donc, pour cette même valeur, Z′ se réduit à la *vraie valeur* de son premier terme (917). Comme on a, d'une manière générale

$$Z' = mz^{m-1} - (m-1)p_1z^{m-2} + (m-2)p_2z^{m-3} + \ldots + p_{m-1}$$

et (1061)

$$\frac{Z}{z-a} = (z-b)(z-c)(z-d)\ldots(z-l),$$

on voit que l'hypothèse $z = a$ conduit à l'identité

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-l) = Z'_a,$$

en désignant ainsi le résultat de la substitution de a à la place de z dans la valeur générale de Z′.

On parvient donc finalement à la formule

$$(4) \qquad \Sigma = [ma^{m-1} + (m-1)p_1a^{m-2} + (m-2)p_2a^{m-3} + \ldots + p_{m-1}]^2\Sigma_1.$$

Il en résulte que, *si l'on peut calculer la fonction symétrique dont il s'agit pour une équation d'un certain degré, on aura immédiatement sa valeur pour une équation de degré supérieur d'une unité.*

En effet, si l'on admet qu'on sache exprimer Σ_1 en fonction des coefficients de l'équation (2), c'est-à-dire en fonction de a et des coefficients de l'équation (1), on voit que, par la formule (4), Σ sera exprimée de la même manière. Par suite, en l'ordonnant par rapport à a et en la divisant par Z_a ou par A (1053), le reste de la division ainsi effectuée repré-

sentera la valeur de Σ débarrassée de toutes les racines et en fonction des seuls coefficients de la proposée.

Or on peut calculer immédiatement le produit des carrés des différences des racines pour une équation du second degré. On passera donc de là à la même fonction symétrique pour l'équation du troisième degré, puis pour celle du quatrième degré, et ainsi de suite.

1096. Soit l'équation du second degré

$$z^2 + pz + q = 0,$$

dont les racines sont a et b. Nous aurons

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab.$$

Mais (1080)

$$a + b = -p \qquad \text{et} \qquad ab = q.$$

Il en résulte

$$(a-b)^2 = p^2 - 4q.$$

1097. Nous pouvons maintenant considérer l'équation complète du troisième degré sous la forme

$$Z = z^3 + pz^2 + qz + r = 0,$$

en désignant ses trois racines par a, b, c.

Nous poserons, d'après ce qui précède (1095),

$$\Sigma = (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2,$$
$$\Sigma_1 = (b-c)^2,$$
$$\Sigma = (a-b)^2 (a-c)^2 \Sigma_1.$$

Σ_1 répond à l'équation du second degré

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{Z}{z-a} = z^2 + a & z + a^2 = 0 \\ + p & + pa \\ & + q \end{array}$$

On a donc immédiatement (1096)

$$\Sigma_1 = (a+p)^2 - 4(a^2 + pa + q) = -3a^2 - 2pa + p^2 - 4q.$$

On a ensuite (1095), d'après la valeur de la dérivée Z' pour $z = a$,

$$(a-b)(a-c) = 3a^2 + 2pa + q.$$

Il vient donc

$$= [-3a^2 - 2pa + p^2 - 4q][3a^2 + 2pa + q]^2$$

$$= -27a^6 - 54pa^5 - 27p^2 \left| \begin{array}{l} -54q \end{array} \right| a^4 + 4p^3 \left| \begin{array}{l} -72pq \end{array} \right| a^3 + 4p^4 \left| \begin{array}{l} -18p^2q \\ -27q^2 \end{array} \right| a^2 + 4p^3q \left| \begin{array}{l} -18pq^2 \end{array} \right| a + p^2q^2 \left| \begin{array}{l} -4q^3 \end{array} \right.$$

Nous pouvons diviser cette valeur de Σ par $Z_a = A = a^3 + pa^2 + qa + r$ (1095), et le reste de la division sera la valeur même de Σ débarrassée des trois racines a, b, c. En effectuant, on trouve par quotient

$$-27a^3 - 27pa^2 - 27qa + 4p^3 - 18pq + 27r.$$

Le reste est

$$\Sigma = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3r + 18pqr - 27r^2.$$

Nous remarquerons, et nous y reviendrons plus tard, que si l'on voulait former l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines de l'équation du troisième degré

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0,$$

$-\Sigma$ serait précisément (1080) le dernier terme ou le terme constant du premier membre de l'équation cherchée.

N. B. — Nous avons admis sans démonstration que la dérivée de

$$z^m = (x + iy)^m$$

est $mz^{m-1} = m(x + iy)^{m-1}$. On peut le montrer facilement en partant du développement de $(x + iy)^m$ par la formule du binôme.

De même (744), les formules de Taylor et de Maclaurin s'appliquent aux polynômes en z, où z est l'imaginaire $x + iy$.

Discriminants.

1098. Nous retrouverons plus loin, à propos de la théorie des racines égales, une fonction symétrique importante, que nous allons définir.

Considérons, comme au n° 1095, le produit

$$\begin{aligned} P = {} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) \\ & (a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & (a_{n-2} - a_{n-1})(a_{n-2} - a_n) \\ & (a_{n-1} - a_n) \end{aligned}$$

où il s'agit des racines $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de l'équation

$$f(z) = 0.$$

P *peut être mis sous forme de déterminant.* Soit, en effet,

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

P_1 s'annule si deux quelconques des quantités a_i, a_j deviennent identiques, puisque dans ce cas il a deux colonnes composées des mêmes éléments. Il est donc divisible par chacun des binômes

$$a_1 - a_2, \quad a_1 - a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} - a_n$$

qui figurent dans P et se trouve être de la forme

$$P_1 = AP,$$

A étant un certain facteur.

Or, dans la première ligne de P figure le produit a_1^{n-1}; dans la seconde ligne est le produit a_2^{n-2}, etc., ..., de telle sorte que P admet le facteur

$$a_1^{n-1} a_2^{n-2} \ldots a_{n-1};$$

ce facteur figure aussi, au signe près, dans P_1; on l'obtient en faisant le produit

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-1} a_1^{n-1} \times (-1)^{n-2} a_2^{n-2} \times \ldots \times (-1)^2 a_{n-2}^2 \times (-1) a_{n-1}^1 \times 1 \\ &= (-1)^{1+2+3+\ldots+(n-1)} a_1^{n-1} a_2^{n-2} \ldots a_{n-1} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_1^{n-1} a_2^{n-2} \ldots a_{n-1}; \end{aligned}$$

il en résulte

$$P_1 = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} P;$$

P_1 est donc égal soit à P, soit à $-P$, selon la parité de n; par exemple, si $n = 4$, $\frac{(n-1)n}{2} = 6$, P_1 est égal à P; si $n = 3$, $\frac{(n-1)n}{2} = 3$, P_1 est de signe contraire à celui de P.

Si l'on échange deux des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *le produit* P *change de signe;* cela résulte de ce que P_1, où deux colonnes sont permutées, change lui-même de signe, du fait de cette permutation.

Le carré de P *demeure donc invariable quand on échange entre elles deux quelconques des racines* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de* $f(x)$: P^2 *est donc une fonction symétrique des racines de* $f(x)$ (1095).

Soit

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n;$$

on donne à la fonction symétrique D,

$$D = A_0^{2n-2} P^2 = A_0^{2n-2} P_1^2,$$

le nom de DISCRIMINANT *du polynôme* $f(z)$.

1099. Formons le carré du déterminant P_1, en opérant convenablement ; prenant d'abord le cas d'une équation du troisième degré, à trois racines a_1, a_2, a_3, on aura, en échangeant les lignes et les colonnes,

$$D = A_0^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}^2 = A_0^4 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}^2$$

$$= A_0^4 \begin{vmatrix} 1^2 + 1^2 + 1^2 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ a_1 + a_2 + a_3 & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 & a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 \end{vmatrix}$$

ou (1084), en remarquant qu'on peut écrire

$$S_0 = a_1^0 + a_2^0 + a_3^0 = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$D = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix};$$

on voit que, d'une manière générale,

$$D = A_0^{2n-2} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix},$$

où les quantités S ont été calculées (1084).

Cela permet le calcul *direct* des discriminants, tandis qu'aux n^os^ 1095 à 1097 on les a calculées par voie de *récurrence*.

Voici les discriminants les plus usuels :

Deuxième degré :

$$f(z) = A_0 z^2 + A_1 z + A_2,$$
$$D = A_1^2 - 4 A_0 A_2;$$

Troisième degré :

$$f(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3,$$
$$D = A_1^2 A_2^2 + 18 A_0 A_1 A_2 A_3 - 4 A_0 A_2^3 - 4 A_1^3 A_3 - 27 A_0^2 A_3^2,$$

formules qui comprennent celles du n° 1097. On voit que D est *homogène* en A_0, A_1, A_2, ...

Théorème. — *Le discriminant* D *est une fonction irréductible des quantités* A_0, A_1, ..., A_n.

Supposons, en effet, que D admette un diviseur rationnel D_1; ce diviseur devra être homogène en A_0, A_1, ..., comme l'est D (2000); donc, abstraction faite d'une puissance de A_0 pouvant entrer en facteur, il s'exprimera rationnellement à l'aide des variables a_1, a_2, ..., a_n. Mais D n'est divisible par aucune puissance de A_0; donc D_1 contiendra a_1, a_2, ..., a_n, à moins qu'il se réduise à une constante, et sera, comme D, divisible par $(a_i - a_k)^2$, quels que soient les indices i et k. Il sera donc divisible par P^2, ce qui prouve, qu'abstraction faite d'un facteur constant D_1 est identique à D.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DANS LES CAS LES PLUS SIMPLES ET LES PLUS USUELS. — THÉORIE DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

But qu'on se propose dans la transformation des équations.

1100. Le problème à résoudre est celui-ci :

On donne une équation

$$\varphi(z) = 0, \tag{1}$$

et il s'agit d'en déduire une nouvelle équation, TRANSFORMÉE *de la première, dont les racines aient avec celles de la proposée une relation déterminée.*

L'hypothèse la plus simple est de supposer que chaque racine de la transformée doit être exprimée par une *fonction rationnelle* de la racine correspondante de la proposée. En désignant par u les racines de la transformée, par $f(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ deux fonctions entières de z, on aura alors

$$u = \frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}. \tag{2}$$

Si l'équation (1) est de degré m, elle admettra m racines; à chacune de ces racines correspondra une valeur de u, et une seule. *La transformée sera,* par conséquent, *dans l'hypothèse indiquée, du même degré que la proposée.*

Nous nous bornerons, dans ce Chapitre, au cas particulier où les deux polynômes $f(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ sont du premier degré, et nous examinerons toutes les transformations usuelles qui y sont comprises.

1101. Dans ce cas particulier, on a

$$u = \frac{az + b}{a'z + b'}, \tag{1}$$

a, b, a', b', étant des constantes données. On en tire, en résolvant par rapport à z,

$$z = \frac{b'u - b}{a - a'u} \tag{2}$$

et, si l'on substitue cette valeur dans l'équation proposée $\varphi(z) = 0$, il vient, pour la transformée cherchée,

$$\varphi\left(\frac{b'u - b}{a - a'u}\right) = 0. \tag{3}$$

En chassant les dénominateurs, on ramènera cette équation à la forme ordinaire

$$\psi(u) = 0, \tag{3 bis}$$

et le problème sera résolu.

1102. La transformation linéaire exprimée par la formule (1) du numéro précédent répond à la succession de transformations plus simples.

En effet, si a' n'est pas nul, on peut écrire d'abord, en divisant par a' les deux termes de la valeur de u,

$$u = \frac{\frac{a}{a'}z + \frac{b}{a'}}{z + \frac{b'}{a'}};$$

puis, en effectuant la division,

$$u = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{z + \frac{b'}{a'}}. \tag{1 bis}$$

Il est clair que, si l'on pose maintenant

$$u = z_1 + \frac{a}{a'},$$

$$z_1 = \frac{ba' - ab'}{a'^2} z_2, \qquad z_2 = \frac{1}{z_3}, \qquad z_3 = z + \frac{b'}{a'},$$

il suffira d'éliminer z_1, z_2, z_3 entre ces quatre équations pour retrouver la relation primitive (1 *bis*) ou (1).

Si a' est nul, on a simplement

$$u = \frac{az+b}{b'} = \frac{a}{b'}z + \frac{b}{b'},$$

de sorte que la formule résulte alors de l'élimination de z_1 entre les deux équations

$$z_1 = \frac{a}{b'}z, \qquad u = z_1 + \frac{b}{b'}.$$

En résumé, la transformation linéaire générale revient à la combinaison de transformations plus simples représentées, en laissant les symboles de côté, par les formules

$$u = kz, \qquad u = \frac{1}{z}, \qquad u = z + h.$$

Nous allons donc nous occuper directement de ces transformations élémentaires, dont l'emploi est très fréquent et qu'il est indispensable de connaître.

Multiplier les racines d'une équation donnée par une quantité constante.

1103. Soit l'équation quelconque du $m^{\text{ième}}$ degré $\varphi(z) = 0$. On peut toujours supposer que le coefficient de la plus haute puissance de z dans $\varphi(z)$ a été rendu égal à l'unité, puisqu'on n'a, pour remplir cette condition, qu'à diviser les deux membres de l'équation par le coefficient de z^m. On a donc

$$(1) \qquad \varphi(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_{m-1} z + p_m = 0.$$

La transformée en u doit avoir pour racines celles de la proposée, multipliées par la quantité constante k [on doit supposer alors $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 1$ et $a = k$, dans la formule (1) du n° 1101]. Nous aurons donc

$$u = kz \qquad \text{et} \qquad z = \frac{u}{k},$$

de sorte que l'équation de la transformée sera

$$\varphi\left(\frac{u}{k}\right) = 0,$$

ou, *en conservant le même symbole pour les nouvelles racines,*

$$\varphi\left(\frac{z}{k}\right) = 0.$$

Comme la multiplication du premier membre d'une équation algébrique par un facteur constant ne modifie pas ses racines (1061), il sera plus simple de prendre pour équation de la transformée

$$k^m \varphi\left(\frac{z}{k}\right) = 0.$$

On évitera ainsi évidemment les dénominateurs qui proviennent de la transformation elle-même, et l'on aura alors, comme équation pratique de la transformée, d'après l'équation (1),

$$(2)\quad \begin{cases} k^m \varphi\left(\dfrac{z}{k}\right) = z^m + k p_1 z^{m-1} + k^2 p_2 z^{m-2} + \dots \\ \qquad\qquad + k^{m-1} p_{m-1} z + k^m p_m = 0. \end{cases}$$

Lorsqu'on veut multiplier les racines d'une équation

$$\varphi(z) = 0$$

par k, ou lorsqu'on veut obtenir sa transformée en kz, il suffit donc *de multiplier respectivement les différents termes de la proposée par les puissances successives* k^0, k^1, k^2, ..., k^{m-1}, k^m, *de manière que, dans chaque terme, la somme des exposants de k et de z soit toujours égale au degré m de l'équation.*

Quand on a trouvé les racines de la transformée, il faut les diviser par k pour avoir celles de la proposée.

1104. Le cas de la division est compris dans celui de la multiplication.

En effet, diviser les racines d'une équation par la quantité constante k, c'est les multiplier par $\frac{1}{k}$. On a alors, pour la transformée (1103),

$$\left(\frac{1}{k}\right)^m \varphi(kz) = z^m + \frac{p_1}{k} z^{m-1} + \frac{p_2}{k^2} z^{m-2} + \dots + \frac{p_{m-1}}{k^{m-1}} z + \frac{p_m}{k^m} = 0,$$

ou, en multipliant par k^m,

$$\varphi(kz) = k^m z^m + k^{m-1} p_1 z^{m-1} + k^{m-2} p_2 z^{m-2} + \ldots + k p_{m-1} z + p_m = 0.$$

Lorsqu'on veut diviser les racines d'une équation $\varphi(z) = 0$ *par* k, *il faut* donc *multiplier respectivement les différents termes de la proposée par les puissances successives* k^m, k^{m-1}, k^{m-2}, ..., k^1, k^0.

Transformée en $-z$.

1105. On a souvent besoin de former une équation dont les racines soient celles de l'équation donnée $\varphi(z) = 0$, *changées de signes,* c'est-à-dire *multipliées par* -1.

Il suffit, pour obtenir cette transformée $\varphi(-z) = 0$, qu'on appelle la *transformée en* $-z$, de supposer dans ce qui précède (1103) $k = -1$.

On a, dans cette hypothèse,

$$(-1)^m \varphi(-z) = z^m - p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} - p_3 z^{m-3} + \ldots \mp p_{m-1} z \pm p_m = 0.$$

Si m est pair, $(-1)^m = 1$, et le premier terme de la transformée est z^m. Si m est impair, $(-1)^m = -1$, et il faut (ce qui est permis) changer les signes de tous les termes du premier membre de la transformée, pour que son premier terme reste toujours z^m.

La règle pratique est donc celle-ci :

Pour obtenir le premier membre de la transformée

$$\varphi(-z) = 0,$$

il suffit de changer dans $\varphi(z)$ *les signes des termes de degré impair lorsque* m *est pair, et les signes des termes de degré pair lorsque* m *est impair* (0 *est un nombre pair*). De cette manière, le premier terme est toujours z^m dans la proposée et dans la transformée.

Soit l'équation

$$z^4 - 5z^3 + 3z^2 - 7 = 0.$$

La transformée en $-z$ est

$$z^4 + 5z^3 + 3z^2 - 7 = 0.$$

Soit l'équation

$$z^5 - 7z^3 - 2z^2 + 8 = 0.$$

La transformée en $-z$ est

$$z^5 - 7z^3 + 2z^2 - 8 = 0.$$

Ramener les coefficients d'une équation à la forme entière, en conservant l'unité comme coefficient du premier terme.

1106. C'est encore un cas particulier de la première transformation (1103). Il suffit de l'effectuer d'après la règle indiquée, en laissant le multiplicateur k *indéterminé*. Il ne reste ensuite qu'à fixer sa valeur, *aussi simplement que possible*, pour que tous les dénominateurs qui entrent dans les différents coefficients de l'équation donnée disparaissent.

Soit, par exemple, l'équation

$$z^3 - \frac{7}{2}z^2 + \frac{3}{7}z - \frac{5}{4} = 0.$$

La transformée $k^m \varphi\left(\frac{z}{k}\right) = 0$ est (1103)

$$z^3 - \frac{7k}{2}z^2 + \frac{3k^2}{7}z - \frac{5k^3}{4} = 0.$$

La plus petite valeur à donner à k est alors évidemment 14, en raison des deux premiers dénominateurs qui sont premiers entre eux. k^3 contiendra, par suite, le facteur 2^3, et le dernier dénominateur disparaîtra *a fortiori*.

La transformée sera finalement

$$z^3 - 49z^2 + 84z - 3430 = 0,$$

et il faudra diviser ses racines par 14 pour avoir celles de la proposée.

Diminuer d'une quantité constante les racines d'une équation donnée.

1107. Soit l'équation quelconque du $m^{\text{ième}}$ degré $\varphi(z) = 0$, que nous prendrons cette fois sous la forme plus générale

$$(1) \quad \varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

La transformée en u doit avoir pour racines celles de la proposée diminuées d'une quantité constante h [on doit alors supposer $a=1$, $a'=0$, $b'=1$ et $b=-h$, dans la formule (1) du n° 1101]. On aura donc

$$u=z-h \qquad \text{et} \qquad z=u+h,$$

de sorte que l'équation de la transformée sera

$$\varphi(u+h)=0$$

ou, en conservant le même symbole pour les nouvelles racines,

$$\varphi(z+h)=0.$$

En développant par la série de Taylor et en ordonnant par rapport aux puissances de z (895), la transformée aura pour expression

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(z+h)=\varphi(h)+\frac{\varphi'(h)}{1}z\\ +\frac{\varphi''(h)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{\varphi^m(h)}{1.2.3\ldots m}z^m=0.\end{aligned}\right.$$

Il reste seulement à déterminer les coefficients $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$, ... Pour cela, on peut diviser par le binôme $z-h$, d'après la règle connue (1068), les polynômes $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, ... Le reste auquel on parvient dans chaque division est le résultat de la substitution de h à la place de z dans le polynôme dividende.

Soit, par exemple, l'équation

$$\varphi(z)=2z^4-7z^3-8z^2+5z-1=0,$$

dont on veut diminuer de 3 toutes les racines.

On aura, comme transformée,

$$\varphi(z+3)=\varphi(3)+\frac{\varphi'(3)}{1}z+\frac{\varphi''(3)}{1.2}z^2$$
$$+\frac{\varphi'''(3)}{1.2.3}z^3+\frac{\varphi^{IV}(3)}{1.2.3.4}z^4=0.$$

La série des opérations est la suivante :

$$\frac{\varphi(z)}{z-3} = 2z^3 - z^2 - 11z - 28 - \frac{85}{z-3},$$

$$\frac{\varphi'(z)}{z-3} = \frac{8z^3 - 21z^2 - 16z + 5}{z-3} = 8z^2 + 3z - 7 - \frac{16}{z-3},$$

$$\frac{\varphi''(z)}{z-3} = \frac{24z^2 - 42z - 16}{z-3} = 24z + 30 + \frac{74}{z-3},$$

$$\frac{\varphi'''(z)}{z-3} = \frac{48z - 42}{z-3} = 48 + \frac{102}{z-3},$$

$$\frac{\varphi^{IV}(z)}{z-3} = \frac{48}{z-3} = \frac{2.1.2.3.4}{z-3}.$$

On a donc

$$\varphi(3) = -85, \qquad \varphi'(3) = -16, \qquad \varphi''(3) = 74,$$
$$\varphi'''(3) = 102, \qquad \varphi^{IV}(3) = 2.1.2.3.4.$$

Par suite, la transformée cherchée est, en renversant l'ordre des termes et en tenant compte des dénominateurs,

$$\varphi(z+3) = 2z^4 + 17z^3 + 37z^2 - 16z - 85 = 0.$$

D'une manière générale, quand on a les racines de la transformée, il faut les augmenter de h pour avoir celles de la proposée.

1108. Si l'on veut *augmenter* de h les racines de la proposée, au lieu de les diminuer de la même quantité, il suffit évidemment de remplacer h par $-h$ dans tout ce que l'on vient de dire. L'équation de la transformée est immédiatement

$$\varphi(z-h) = \varphi(-h) + \frac{\varphi'(-h)}{1} z + \frac{\varphi''(-h)}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{\varphi^m(-h)}{1.2.3\ldots m} z^m = 0.$$

Faire disparaître un terme quelconque d'une équation.

1109. Cette question n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Supposons qu'on diminue les racines de l'équation (1) [1107] d'une quantité h, que nous laisserons d'abord *indéterminée*.

La transformée sera l'équation (2) du même numéro, c'est-à-dire

$$\varphi(h) + \frac{\varphi'(h)}{1} z + \frac{\varphi''(h)}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{\varphi^m(h)}{1.2.3\ldots m} z^m = 0.$$

Pour faire disparaître un terme *quelconque* de cette transformée [sauf, bien entendu, celui qui contient z à la plus haute puissance et dont le coefficient est constant (736)], on n'a qu'à égaler à zéro le coefficient de ce terme, qui est une fonction de h, et à trouver, à l'aide de l'équation ainsi obtenue, la valeur à donner à cette indéterminée.

Si l'on veut faire disparaître le terme en z^{m-1} ou le deuxième terme de l'équation quand elle est ordonnée suivant les puissances décroissantes de z, on n'a qu'à poser

$$\varphi^{m-1}(h) = 0,$$

équation du premier degré en h, qui ne donnera qu'une seule valeur pour cette indéterminée. Ainsi, *il n'y a qu'une seule manière de faire disparaître le deuxième terme d'une équation.*

Pour faire disparaître le troisième terme, il faut poser

$$\varphi^{m-2}(h) = 0.$$

C'est une équation du second degré en h, de sorte que, par deux transformations différentes, on peut remplacer une équation donnée par une autre qui n'ait plus de troisième terme. Et ainsi de suite.

On voit que le nombre des substitutions répondant à la question augmente, à mesure que l'on considère dans la proposée des termes plus éloignés.

Enfin, si l'on veut faire disparaître le dernier terme ou le terme constant de la transformée, il faut poser

$$\varphi(h) = 0,$$

équation toute pareille à la proposée et qui n'en diffère que par la substitution du symbole h à la place de z.

La raison de ce fait est évidente. Lorsque le terme constant manque dans une équation algébrique, elle admet *une racine nulle*. La quantité dont on diminue les racines de la proposée doit donc être égale à l'une *quelconque* d'entre elles et, par suite, l'équation de condition $\varphi(h) = 0$ ayant les

mêmes racines que la proposée doit se confondre avec elle (1062).

1110. Supposons, en particulier, qu'on veuille faire disparaître le deuxième terme de l'équation

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

Comme nous venons de le dire (1063), il faut poser

$$\varphi^{m-1}(h) = 0.$$

Or on a (735), en simplifiant,

$$\varphi^{m-1}(h) = m A_0 h + A_1 = 0,$$

et il en résulte

$$h = -\frac{A_1}{m A_0}.$$

Par conséquent, *pour faire disparaître le deuxième terme d'une équation quelconque, il suffit de diminuer les racines de la proposée du quotient, changé de signe, du coefficient du deuxième terme par le coefficient du premier multiplié par le degré de l'équation.*

Quand on aura trouvé les racines de la transformée, on devra les augmenter de $-\frac{A_1}{m A_0}$ pour obtenir celles de la proposée.

La règle qu'on vient d'indiquer et qu'on a souvent à appliquer concorde avec les relations connues (1080) qui existent entre les coefficients d'une équation et ses racines. Car, si l'on diminue chacune des m racines de $-\frac{A_1}{m A_0}$, on diminue leur somme de $-\frac{A_1}{A_0}$, c'est-à-dire de sa propre valeur; cette somme est donc annulée et, puisqu'elle représente en valeur absolue, dans toute équation, le quotient du coefficient du deuxième terme par le coefficient du premier, le deuxième terme disparaît alors forcément dans la transformée.

Si l'on veut, par exemple, se débarrasser du deuxième terme relativement à l'équation générale du troisième degré mise sous la forme

$$z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = 0,$$

il faut diminuer ses racines de la quantité $-\frac{p_1}{3}$.

1111. Plusieurs termes peuvent disparaître ensemble, si les valeurs des coefficients de l'équation s'y prêtent.

Le deuxième et le troisième terme, par exemple, disparaîtront à la fois, si la valeur de h satisfait en même temps aux deux équations

$$\varphi^{m-1}(h)=0, \qquad \varphi^{m-2}(h)=0,$$

dont l'une est du premier degré en h et l'autre du second degré.

De la première équation, on déduira, comme précédemment (1110), la valeur

$$h=-\frac{A_1}{mA_0},$$

qu'on n'aura plus qu'à substituer dans la seconde, pour obtenir, entre les coefficients de la proposée, l'équation de condition nécessaire.

Cette seconde équation $\varphi^{m-2}(h)=0$ est (735)

$$m(m-1)(m-2)\ldots 3A_0h^2$$
$$+(m-1)(m-2)\ldots 2A_1h+(m-2)(m-3)\ldots 2.1A_2=0$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{1}{2}m(m-1)A_0h^2+(m-1)A_1h+A_2=0.$$

La substitution indiquée conduit alors à l'équation de condition

$$A_2=\frac{(m-1)A_1^2}{2mA_0}$$

entre les trois premiers coefficients de la proposée, équation de condition qui doit être satisfaite pour que la disparition du deuxième terme entraîne celle du troisième.

1112. Il faut remarquer avec soin que l'on ne peut pas, en essayant de faire disparaître successivement tous les termes intermédiaires du premier membre d'une équation, la ramener à la forme binôme (*Alg. élém.*).

En effet, chaque opération de ce genre, tout en faisant disparaître le terme qu'on veut éliminer en l'effectuant, fait nécessairement reparaître le terme que l'opération précédente avait supprimé.

Prenons, par exemple, une équation telle que

$$z^m + p_2 z^{m-2} + p_3 z^{m-3} + \ldots = 0,$$

dont on ait déjà fait disparaître le deuxième terme. Pour faire disparaître maintenant le terme en z^{m-2}, il faut former la nouvelle transformée en $z + h$ (1107), et donner à h la valeur convenable (1109). Or on a directement pour cette transformée

$$(z+h)^m + p_2 (z+h)^{m-2} + p_3 (z+h)^{m-3} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire, en développant et en ordonnant,

$$\begin{array}{l|l|l} z^m + mhz^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.2} h^2 & z^{m-2} + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} h^3 & z^{m-3} + \ldots = 0 \\ \quad + p_2 & \quad + (m-2) p_2 h & \\ & \quad + p_3 & \end{array}$$

La valeur de h qui fait alors disparaître le terme en z^{m-2} étant, comme on le voit, différente de zéro, le terme en z^{m-1} reparaît nécessairement si celui en z^{m-2} disparaît.

Former une équation dont les racines soient les inverses de celles d'une équation donnée.

1113. Soit l'équation quelconque

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots \\ \qquad\qquad + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m = 0. \end{cases}$$

La transformée en u doit avoir pour racines les inverses des racines de la proposée [on doit supposer alors $a = 0$, $b = 1$, $a' = 1$, $b' = 0$, dans la formule (1) du n° 1101]. Nous aurons donc

$$u = \frac{1}{z} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{u},$$

de sorte que l'équation de la transformée sera

$$\varphi\left(\frac{1}{u}\right) = 0$$

ou, en conservant le même symbole pour les nouvelles racines,

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Cette transformée est donc, en remplaçant z par $\frac{1}{z}$ dans l'équation (1),

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \frac{A_2}{z^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-2}}{z^2} + \frac{A_{m-1}}{z} + A_m = 0.$$

En supposant z différent de zéro, multiplions les deux membres par z^m et renversons l'ordre des termes.

Nous aurons finalement

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} z^m \varphi\left(\frac{1}{z}\right) &= A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} \\ &\quad + A_{m-2} z^{m-2} + \ldots + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient donc *la transformée en* $\frac{1}{z}$ *en échangeant dans la proposée les coefficients des termes également éloignés des extrêmes.*

1114. On peut étendre ici la portée d'une remarque faite déjà en Algèbre élémentaire (*Alg. élém.*), relativement aux équations du second degré.

Il peut arriver que, dans l'équation (1) [1113], les modules des n premiers coefficients A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, deviennent *nuls*. Cette équation *s'abaisse* alors au degré $m - n$ et devient

$$(1\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &A_n z^{m-n} + A_{n+1} z^{m-n-1} \\ &\quad + A_{n+2} z^{m-n-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0, \end{aligned} \right.$$

de sorte qu'elle *semble* perdre n racines.

Quant à l'équation (2) [1113], elle reste du degré m; mais, ses derniers termes disparaissant, on peut mettre z^n en facteur dans le second membre, et l'on a

$$z^m \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = z^n (A_m z^{m-n} + A_{m-1} z^{m-n-1} + A_{m-2} z^{m-n-2} + \ldots + A_{n+1} z + A_n) = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{z}$ admet donc alors n racines *nulles* et, si on les supprime, on a, en concordance avec l'équation (1 *bis*),

$$(2\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} z^{m-n} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) &= A_m z^{m-n} + A_{m-1} z^{m-n-1} \\ &\quad + A_{m-2} z^{m-n-2} + \ldots + A_{n+1} z + A_n = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais, aux n racines *nulles* (ou de modules nuls) supprimées dans la transformée, correspondent nécessairement n racines *infinies* (ou de modules infinis) de la proposée.

On voit donc que *le nombre des termes du degré le plus élevé qui disparaissent dans une équation algébrique quelconque marque le nombre des racines infinies qui s'introduisent en même temps parmi celles de la proposée.*

1115. Cherchons encore la transformée en $-\frac{1}{z}$ de l'équation $\varphi(z)=0$ [on doit alors supposer $a=0$, $b=-1$, $a'=1$, $b'=0$, dans la formule (1) du n° 1101]. On aura

$$u=-\frac{1}{z} \qquad \text{et} \qquad z=-\frac{1}{u},$$

de sorte que la transformée sera

$$\varphi\left(-\frac{1}{u}\right)=0$$

ou, en conservant le même symbole pour les nouvelles racines,

$$\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)=0.$$

Il suffit donc de changer, comme on pouvait le prévoir, z en $-z$ dans l'équation (2) du n° 1113, et de se rappeler ce que nous avons dit (1105) sur la transformée en $-z$ d'une équation $\varphi(z)=0$.

On a, pour équation de la nouvelle transformée,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(-z)^m\,\varphi\left(-\dfrac{1}{z}\right)=A_m(-z)^m+A_{m-1}(-z)^{m-1}+\dots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +A_1(-z)+A_0=0.\end{array}\right.$$

Suivant que m sera *pair* ou *impair*, on devra changer dans le second membre les signes des termes de degré *impair* ou *pair*, de sorte que le premier terme du second membre aura toujours le signe $+$, et que le facteur $(-z)^m$ du premier membre sera toujours remplacé par z^m. On aura donc finalement, pour la transformée cherchée,

$$z^m\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)=A_mz^m-A_{m-1}z^{m-1}+A_{m-2}z^{m-2}+\dots\pm A_2z^2\mp A_1z\pm A_0=0.$$

Théorie des équations réciproques.

1116. La transformation qu'on vient d'établir conduit naturellement à l'étude des *équations réciproques*.

Il peut arriver que, pour une équation donnée $\varphi(z)=0$, les deux équations

$$\varphi(z)=0 \qquad \text{et} \qquad z^m\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=0 \quad [1113]$$

aient les mêmes racines.

Lorsqu'il en est ainsi, *l'équation proposée admet aussi pour racines les inverses de ses racines* (1113), c'est-à-dire que ses racines sont tellement distribuées que, à chacune d'elles, répond son inverse [si, à z, répond d'une manière générale $\frac{1}{z}$, pour $z=a$, on a $\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$; et, pour $z=\frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{z}=a$].

Une pareille équation est dite RÉCIPROQUE.

1117. *Cherchons la condition pour qu'une équation algébrique quelconque de degré m soit réciproque.*

L'équation donnée $\varphi(z)=0$ et l'équation aux inverses $z^m\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=0$ étant supposées avoir les mêmes racines, leurs premiers membres ne peuvent différer que par un facteur constant (1062). On doit donc avoir identiquement, en désignant par λ une constante appropriée,

$$(1) \qquad \varphi(z)=\lambda z^m\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$

ou

$$A_0z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\ldots+A_m$$
$$=\lambda A_m z^m+\lambda A_{m-1}z^{m-1}+\lambda A_{m-2}z^{m-2}+\ldots+\lambda A_0.$$

Il en résulte

$$A_0=\lambda A_m, \qquad A_1=\lambda A_{m-1}, \qquad A_2=\lambda A_{m-2}, \qquad \ldots,$$
$$A_{m-2}=\lambda A_2, \qquad A_{m-1}=\lambda A_1, \qquad A_m=\lambda A_0,$$

c'est-à-dire, en rapprochant les égalités extrêmes,

$$\frac{A_0}{A_m}=\lambda=\frac{1}{\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda^2=1 \qquad \text{et} \qquad \lambda=\pm 1.$$

On a, par suite,

$$A_0 = \pm A_m, \qquad A_1 = \pm A_{m-1}, \qquad A_2 = \pm A_{m-2}, \quad \ldots$$

Ainsi, *d'une manière générale, dans toute équation réciproque, les coefficients des termes à égale distance des extrêmes doivent être égaux et de même signe* ou *égaux et de signes contraires.*

Dans le cas de *m impair,* le premier membre de l'équation renferme un nombre *pair* de termes dont les coefficients peuvent se correspondre deux à deux. Mais, dans le cas de *m pair*, le premier membre de l'équation renferme un nombre *impair* de termes, de sorte que le coefficient du terme du milieu n'a pas de correspondant. Si l'on pose $m = 2n$, ce coefficient est A_n, et l'on doit alors avoir

$$A_n = \pm A_n.$$

L'hypothèse $\lambda = -1$ exige donc qu'on ait $A_n = 0$.

Nous devons, par suite, ajouter à l'énoncé ci-dessus que *si, dans une équation réciproque de degré pair, les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux et de signes contraires, le terme du milieu manque.*

1118. On peut ramener toutes les équations réciproques à un type unique.

Remarquons que les racines égales à $+1$ ou à -1 sont à elles-mêmes leurs propres inverses, et n'ont pas de racines correspondantes ou conjuguées. Et c'est en raison de ce fait qu'il peut exister des équations réciproques de degré impair. Au contraire, les racines $+i$ et $-i$ se correspondent.

Cela posé, admettons que l'équation $\varphi(z) = 0$ n'admette aucune racine égale à $+1$ ou à -1, et reprenons l'identité du numéro précédent

$$\varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Faisons d'abord $z = 1$ dans cette identité. Il viendra

$$\varphi(1) = \lambda (1)^m \varphi(1),$$

c'est-à-dire, $\varphi(1)$ étant différent de zéro d'après l'hypothèse adoptée,

$$\lambda = 1.$$

Si l'on fait maintenant $z = -1$ et $\lambda = 1$ dans la même identité, on a

$$\varphi(-1) = (-1)^m \varphi(-1),$$

c'est-à-dire, $\varphi(-1)$ étant aussi différent de zéro,

$$(-1)^m = 1;$$

ce qui exige que m soit pair.

Donc, *lorsqu'une équation réciproque n'admet aucune racine égale à* ± 1, *elle est de degré pair et l'on ne peut conserver que la valeur* $\lambda = +1$, *de sorte que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont deux à deux égaux et de même signe.*

Supposons maintenant que l'équation $\varphi(z) = 0$ possède des racines égales à ± 1 et qu'on mette ces racines en évidence. On pourra écrire

$$\varphi(z) = (z-1)^p (z+1)^q f(z).$$

L'équation $f(z) = 0$ n'aura, par hypothèse, aucune racine égale à $+1$ ou à -1, et elle renfermera les autres racines, conjuguées deux à deux, de l'équation $\varphi(z) = 0$, supposée réciproque. L'équation $f(z) = 0$ sera donc elle-même réciproque, et elle remplira alors les conditions que nous venons de trouver.

Or il est toujours facile, lorsqu'on a à résoudre une équation réciproque, de la débarrasser préalablement des racines égales à l'unité qu'elle peut admettre. On voit, en effet, immédiatement, si, en substituant $+1$ ou -1 dans le premier membre de l'équation, on obtient un résultat nul; et, dans l'affirmative, on n'a qu'à diviser ce premier membre par $z-1$ ou $z+1$ pour supprimer la racine correspondante (1061).

Il est donc permis de ne considérer, au point de vue de leur résolution, que les équations réciproques de degré pair et dont les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux et de même signe.

C'est ce que nous allons faire.

1119. Les équations réciproques, dont on vient de déterminer le type, sont toujours susceptibles *d'abaissement*, c'est-à-dire que leur résolution peut se ramener à celle d'une équation *de degré moindre*. C'est là, au point de vue algébrique, une propriété très importante, et sur laquelle nous reviendrons.

Soit, actuellement, l'équation réciproque de degré pair, dont les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux et de même signe,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_0 z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \dots \\ \quad + A_n z^n + \dots + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \end{array}\right.$$

Les racines de cette équation se partageront par couples, tels que α et $\frac{1}{\alpha}$, β et $\frac{1}{\beta}$, γ et $\frac{1}{\gamma}$, ...

On peut alors ramener sa résolution à celle d'une équation de degré n ou de degré moitié, en posant

$$(2)\qquad z + \frac{1}{z} = u;$$

car, à deux valeurs réciproques de z $\left(\text{telles que } \alpha \text{ et } \frac{1}{\alpha}\right)$, correspondra toujours une seule valeur $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ de u.

Il s'agit de former l'équation en u, c'est-à-dire d'éliminer z entre les équations (1) et (2). C'est à quoi l'on peut arriver très simplement comme il suit.

Rapprochons, dans l'équation (1), les termes de mêmes coefficients, après avoir divisé les deux membres par z^n (quantité supposée différente de zéro). Nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_0\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + A_1\left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ \qquad + A_2\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) + \dots + A_n = 0, \end{array}\right.$$

et il ne reste plus qu'à exprimer en fonction de u chacun des binômes

$$z^n + \frac{1}{z^n},\quad z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}},\quad z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}},\quad \dots.$$

Or on a, d'une manière générale,

$$\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} + z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}.$$

On en déduit, en remplaçant par u le facteur $z + \frac{1}{z}$ du

premier membre,

$$(4) \qquad z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} = \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right) u - \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}\right).$$

Cette formule résout la question, puisqu'elle donne la valeur d'un binôme quelconque, lorsqu'on connaît, en fonction de u, les valeurs des deux binômes précédents. Nous aurons, en partant des deux binômes

$$z + \frac{1}{z} = u \qquad \text{et} \qquad z^0 + \frac{1}{z^0} = 2,$$

et en faisant $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, dans la formule (4),

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right) u - \left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right) = u^2 - 2,$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) u - \left(z + \frac{1}{z}\right) = u^3 - 3u,$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) u - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = u^4 - 4u^2 + 2,$$

$$z^5 + \frac{1}{z^5} = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) u - \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = u^5 - 5u^3 + 5u,$$

.....

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on voit que l'équation (1) est bien ramenée à une équation en u, de degré n. Une fois cette équation en u résolue, les valeurs de z sont données par la relation générale $z + \frac{1}{z} = u$, c'est-à-dire par l'équation du second degré

$$(5) \qquad z^2 - uz + 1 = 0,$$

dont le produit des racines est, pour chaque valeur de u et comme cela doit être, égal à l'unité. On a

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

Les n valeurs de u conduisent ainsi aux $2n$ valeurs de z. Si les n valeurs de u sont $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, on peut mettre (1061) le premier membre de l'équation (1) sous la forme

$$A_0(z^2 - u_0 z + 1)(z^2 - u_1 z + 1)(z^2 - u_2 z + 1)\ldots(z^2 - u_{n-1} z + 1).$$

On rencontre en Analyse de nombreux exemples d'équations réciproques (*Alg. élém.*).

1120. Les racines d'une équation $\varphi(z) = 0$, au lieu d'être simplement réciproques, peuvent être *réciproques et de signes contraires*. A une racine $z = a$ répond alors une autre racine $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{a}$, et le produit des racines conjuguées, au lieu d'être égal à 1, est égal à -1.

Nous allons présenter succinctement la théorie de ces équations réciproques de *seconde espèce*, tout à fait analogue à celle des équations réciproques ordinaires.

L'équation donnée admettant les mêmes racines que la transformée en $-\frac{1}{z}$, on devra avoir identiquement (1115)

$$\varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

ou

$$\begin{aligned} &A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m \\ &\quad = \lambda A_m z^m - \lambda A_{m-1} z^{m-1} + \lambda A_{m-2} z^{m-2} - \ldots \\ &\qquad \pm \lambda A_2 z^2 \mp \lambda A_1 z \pm \lambda A_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &A_0 = \lambda A_m, \quad A_1 = -\lambda A_{m-1}, \quad A_2 = \lambda A_{m-2}, \quad \ldots, \\ &A_{m-2} = \pm \lambda A_2, \quad A_{m-1} = \mp \lambda A_1, \quad A_m = \pm \lambda A_0. \end{aligned}$$

Il en résulte, en rapprochant les égalités extrêmes,

$$\frac{A_0}{A_m} = \lambda = \pm \frac{1}{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 = \pm 1.$$

On a donc les deux solutions

$$\lambda = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \pm i.$$

La première conduit aux conditions

$$A_0 = \pm A_m, \quad A_1 = \mp A_{m-1}, \quad A_2 = \pm A_{m-2}, \quad \ldots;$$

la seconde, aux conditions

$$A_0 = \pm i A_m, \quad A_1 = \mp i A_{m-1}, \quad A_2 = \pm i A_{m-2}, \quad \ldots.$$

Mais on peut ramener aussi les équations considérées à un

type unique (1118), en remarquant que les seules racines qui puissent se correspondre à elles-mêmes sont données par la relation

$$z = -\frac{1}{z} \qquad \text{ou} \qquad z^2 = -1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad z = \pm i.$$

Admettons donc que l'équation $\varphi(z) = 0$ ne possède aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et reprenons l'identité

$$\varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

En y faisant $z = +i$, on a, puisque $-\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = +i$,

$$\varphi(i) = \lambda (i)^m \varphi(i); \tag{2}$$

en y faisant $z = -i$, on a également, puisque $-\frac{1}{-i} = \frac{i}{i^2} = -i$,

$$\varphi(-i) = \lambda(-i)^m \varphi(-i). \tag{3}$$

$\varphi(i)$ et $\varphi(-i)$ sont différents de zéro par hypothèse. Il vient donc, en multipliant membre à membre les relations (2) et (3) et en simplifiant,

$$1 = \lambda^2 (-i^2)^m = \lambda^2 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \pm 1.$$

Si l'on remplace maintenant λ par cette valeur, dans la relation (2) par exemple, on a

$$\varphi(i) = \pm (i)^m \varphi(i) \qquad \text{ou} \qquad i^m = \pm 1;$$

ce qui exige (97) que m soit *pair*.

Par suite, *lorsque l'équation réciproque de seconde espèce ne renferme aucune racine $+i$ ou $-i$, la solution $\lambda = \pm i$ n'existe pas; l'équation est de degré pair et les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont* ALTERNATIVEMENT *égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.*

Supposons maintenant que l'équation $\varphi(z) = 0$ admette des racines $+i$ et $-i$, et mettons-les en évidence en écrivant

$$\varphi(z) = (z - i)^p (z + i)^q f(z).$$

L'équation $f(z) = 0$ n'aura, par hypothèse, aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et elle renfermera les autres racines, conjuguées deux à deux, de l'équation $\varphi(z) = 0$, supposée ré

ciproque de seconde espèce. L'équation $f(z)=0$ sera donc elle-même réciproque de seconde espèce, et elle remplira alors les conditions que nous venons d'énoncer.

Or il est toujours facile de débarrasser préalablement l'équation considérée des racines $\pm i$ qu'elle peut avoir. En substituant $+i$ ou $-i$ dans le premier membre de l'équation, on voit facilement (97) si le résultat est nul; et, dans l'affirmative, on n'a qu'à diviser ce premier membre par $z-i$ ou $z+i$ pour supprimer la racine correspondante (1061).

Au point de vue de leur résolution, il est donc permis de ne conserver, parmi les équations réciproques de seconde espèce, que celles qui sont de degré pair et dont les coefficients également éloignés des extrêmes sont alternativement égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.

Le type de ces équations est

$$(4)\quad \begin{cases} A_0 z^{2n}+A_1 z^{2n-1}+A_2 z^{2n-2}+A_3 z^{2n-3}+\ldots+A_n z^n+\ldots \\ \qquad -A_3 z^3+A_2 z^2-A_1 z+A_0=0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(5)\qquad z-\frac{1}{z}=u,$$

chaque couple de racines conjuguées $\left(\alpha \text{ et } -\frac{1}{\alpha}\right)$ conduit à une seule valeur $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$ de u. En éliminant z entre les équations (4) et (5), on obtiendra une équation en u de degré moitié ou de degré n.

Rapprochons dans le premier membre de l'équation (4) les termes également éloignés des extrêmes, après avoir divisé par z^n les deux membres de l'équation. Il viendra

$$(6)\quad \begin{cases} A_0\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)+A_1\left(z^{n-1}-\frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ \qquad +A_2\left(z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}\right)+A_3\left(z^{n-3}-\frac{1}{z^{n-3}}\right)+\ldots=0. \end{cases}$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer en fonction de u les binômes

$$z^n+\frac{1}{z^n},\quad z^{n-1}-\frac{1}{z^{n-1}},\quad z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}},\quad z^{n-3}-\frac{1}{z^{n-3}},\quad \ldots,$$

où les signes + et — alternent. Pour cela, nous aurons recours à la relation générale

$$\left(z^k \pm \frac{1}{z^k}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right) = z^{k+1} \mp \frac{1}{z^{k+1}} - z^{k-1} \pm \frac{1}{z^{k-1}},$$

où l'on doit prendre ensemble les signes supérieurs et les signes inférieurs. Il en résulte donc

$$(7) \qquad z^{k+1} \pm \frac{1}{z^{k+1}} = \left(z^k \mp \frac{1}{z^k}\right) u + \left(z^{k-1} \pm \frac{1}{z^{k-1}}\right).$$

En prenant alternativement les signes supérieurs et les signes inférieurs, cette formule donne l'expression d'un binôme quelconque en fonction de u, à l'aide des valeurs des deux binômes précédents. En partant des deux binômes $z - \frac{1}{z} = u$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$, et en faisant successivement $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, nous aurons

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right) u + \left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right) = u^2 + 2,$$

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) u + \left(z - \frac{1}{z}\right) = u^3 + 3u,$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) u + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = u^4 + 4u^2 + 2,$$

$$z^5 - \frac{1}{z^5} = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) u + \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) = u^5 + 5u^3 + 5u,$$

. . . . . .

[Il est évident que ces binômes sont bien ceux qu'on a à calculer; car, le premier terme de l'équation donnée étant supposé toujours positif, et les racines conjuguées deux à deux ayant un produit égal à — 1, le dernier terme est alternativement négatif et positif dans les équations successives du deuxième, du quatrième, du sixième, du huitième, du dixième degré, ..., qu'on a à considérer (1080).]

On voit que l'équation en u sera de degré n. Quand on l'aura résolue, les racines de l'équation en z seront fournies par la relation générale $z - \frac{1}{z} = u$, c'est-à-dire par l'équation du

second degré

$$z^2 - uz - 1 = 0, \tag{8}$$

dont le produit des racines est, pour chaque valeur de u et, comme cela doit être, égal à -1. On a

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2}.$$

Les n valeurs de u conduisent ainsi aux $2n$ valeurs de z.

CHAPITRE V.

FACTEURS PREMIERS COMMUNS A DEUX POLYNOMES. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE. — RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS. — RECHERCHE DES DIVISEURS DES POLYNOMES A UNE VARIABLE.

Facteurs premiers communs à deux polynômes. Plus grand commun diviseur algébrique.

1121. Soient deux fonctions entières quelconques de z, l'une de degré m, l'autre de degré n, et telles que

$$Z = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$
$$Z_1 = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \ldots + B_{n-1} z + B_n.$$

Nous avons vu (1062) qu'on peut décomposer chacun de ces polynômes en facteurs premiers de la forme $z - a$, en nombre égal à son degré, et que cette décomposition ne peut avoir lieu que d'une seule manière (1063).

Il peut arriver, dans certains cas particuliers, que les deux polynômes considérés admettent un ou plusieurs facteurs premiers communs, et il est indispensable, dans un grand nombre de questions, de pouvoir s'assurer qu'il en est ainsi.

Le produit de tous les facteurs premiers, égaux ou inégaux, communs aux deux polynômes Z et Z_1, c'est-à-dire pris avec leur exposant le moins élevé dans les deux fonctions, *s'appelle par analogie* (*Arithmétique*) *leur plus grand commun diviseur.*

On voit que les facteurs indépendants de z n'interviennent pas dans cette définition. On devra donc, le cas échéant, spécifier s'il en existe ou non de communs aux deux polynômes Z et Z_1.

1122. Les facteurs premiers des polynômes entiers jouant absolument le même rôle que les facteurs premiers des nombres (1054), la théorie du plus grand commun diviseur algébrique est toute pareille à celle du plus grand commun diviseur arithmétique et ne présente aucune difficulté.

Soient les deux fonctions entières Z et Z_1, ordonnées suivant les puissances décroissantes de z (1121). Supposons Z de degré supérieur à Z_1, c'est-à-dire $m > n$. Divisons alors Z par Z_1. Il est clair que, si la division est exacte, Z_1 est le plus grand commun diviseur cherché, puisque tous ses facteurs premiers sans exception appartiennent à Z. Écartons cette hypothèse. Appelons Q le quotient de la division de Z par Z_1, et représentons le reste correspondant par Z_2. Nous aurons

$$Z = Z_1 Q + Z_2. \tag{1}$$

Nous allons montrer que le plus grand commun diviseur entre Z et Z_1 est le même qu'entre Z_1 et Z_2.

Supposons, en effet, que les polynômes Z et Z_1 admettent tous deux le facteur premier $z - a$ et que p soit son plus faible exposant dans les deux polynômes.

On aura alors

$$Z = (z-a)^p . A, \qquad Z_1 = (z-a)^p . B,$$

A et B étant d'autres polynômes entiers. On déduira alors de l'identité (1)

$$Z_2 = (z-a)^p (A - BQ).$$

Par conséquent, si Z et Z_1 admettent p fois le facteur premier $z - a$, le reste Z_2 l'admet le même nombre de fois. En d'autres termes, tous les facteurs premiers communs à Z et à Z_1 le sont en même temps à Z_1 et à Z_2.

Supposons, réciproquement, que Z_1 et Z_2 admettent tous deux le facteur $z - a$, et que p soit son plus faible exposant dans les deux polynômes.

On aura

$$Z_1 = (z-a)^p . B, \qquad Z_2 = (z-a)^p . C,$$

C étant un polynôme entier comme B. On déduira alors de l'identité (1)

$$Z = (z-a)^p (BQ + C).$$

Par conséquent, si Z_1 et Z_2 admettent p fois le facteur premier $z - a$, le dividende Z l'admet le même nombre de fois,

En d'autres termes, tous les facteurs premiers communs à Z_1 et à Z_2 le sont en même temps à Z et à Z_1.

Les facteurs premiers communs, affectés des mêmes exposants, étant identiques pour les deux groupes de polynômes Z et Z_1, Z_1 et Z_2, le produit de ces facteurs premiers communs, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur, est aussi le même de part et d'autre.

La question étant ainsi ramenée à déterminer le plus grand commun diviseur de Z_1 et de Z_2, nous diviserons Z_1 par Z_2. Si la division est exacte, Z_2 est le plus grand commun diviseur cherché. Si l'on trouve un reste Z_3, ce plus grand commun diviseur est, d'après ce qu'on vient de voir, celui de Z_2 et de Z_3.

On poursuivra la même série d'opérations jusqu'à ce qu'on parvienne à un dernier reste qui divise exactement le reste précédent. Ce diviseur exact sera alors leur plus grand commun diviseur et, par suite, celui de Z et de Z_1.

On est donc conduit absolument à la même règle qu'en Arithmétique (*Arithm*).

1123. Les opérations poursuivies auront toujours une fin; car le degré des polynômes employés va constamment en diminuant, puisque le degré de chaque reste est inférieur à celui du diviseur correspondant, et que chaque reste devient diviseur à son tour.

Il en résulte que, si l'on ne parvient pas à un reste qui divise exactement le reste précédent, on parviendra nécessairement à un reste de degré o par rapport à z, c'est-à-dire indépendant de z ou constant.

Quand cette condition se réalise, les deux polynômes donnés Z et Z_1 n'ont aucun facteur premier commun, et sont dits *premiers entre eux* (*Arithm*).

1124. Au point de vue pratique, il est utile d'effectuer les calculs de manière à éviter les coefficients fractionnaires.

C'est à quoi l'on peut toujours arriver en multipliant tous les termes d'un dividende quelconque par une quantité indépendante de z, par exemple par le coefficient du premier terme du diviseur correspondant. De même, il faut avoir soin de simplifier l'expression d'un reste, lorsque tous ses termes admettent un facteur commun indépendant de z.

Ces modifications, extérieures pour ainsi dire, ne changent en rien le plus grand commun diviseur qu'on veut obtenir.

En effet, supposons qu'on ait été conduit à multiplier le dividende Z par un facteur α et qu'on ait dû diviser le reste Z_2 par un facteur β, tel que $Z_2 = \beta U$.

L'identité (1) (1022) sera, en désignant le nouveau quotient par q, remplacée par celle-ci :

$$\alpha Z = Z_1 q + \beta U; \qquad (1\ bis)$$

et, comme α et β sont des constantes, on prouvera absolument de la même manière (1022) que les polynômes Z et Z_1 d'une part, Z_1 et U d'autre part, ont les mêmes facteurs premiers communs affectés des mêmes exposants, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur de Z et de Z_1 est celui de Z_1 et de U.

Racines communes à deux équations.

1125. Il résulte immédiatement de ce qu'on vient d'exposer (1022) que, *si deux équations* $Z = 0$ *et* $Z_1 = 0$ *ont n racines communes, égales ou inégales, les deux polynômes* Z *et* Z_1 *ont n facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme* $z - a$, *c'est-à-dire un plus grand commun diviseur algébrique* D *du* $n^{ième}$ *degré.*

On peut trouver ce plus grand commun diviseur par des divisions successives, et l'égaler à zéro. *L'équation*

$$D = 0$$

a pour racines les n racines communes des deux équations $Z = 0$ *et* $Z_1 = 0$.

Si les polynômes Z et Z_1 sont premiers entre eux (1023), les deux équations correspondantes n'ont aucune racine commune.

On voit de plus, dans le cas où les racines communes existent, que, en divisant Z, par exemple, par D, et en égalant le quotient Q à zéro, l'équation

$$Q = 0$$

a pour racines (1065) toutes les autres racines de $Z = 0$, c'est-à-dire toutes celles qui ne lui sont pas communes avec $Z_1 = 0$.

1126. Avant d'indiquer quelques applications, on peut rattacher à ce qui précède la proposition suivante :

A et A_1 étant deux polynômes en z premiers entre eux et sans aucun facteur commun constant (1121), *on peut trouver deux autres polynômes entiers de z, que nous désignerons par* Z *et* Z_1, *et tel qu'on ait*

$$AZ - A_1 Z_1 = 1.$$

Effectuons, en effet, la série des opérations nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur de A et de A_1. Elles seront représentées par les identités

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = A_1 Q_1 + R_1, \\ A_1 = R_1 Q_2 + R_2, \\ R_1 = R_2 Q_3 + R_3, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ R_{p-2} = R_{p-1} Q_p + R_p, \end{array}\right.$$

et l'on parviendra à un dernier reste R_p qui sera une constante (1123).

La première des identités (1) donne

$$R_1 = A - A_1 Q_1.$$

En substituant cette valeur de R_1 dans la deuxième identité, on a

$$-R_2 = R_1 Q_2 - A_1 = AQ_2 - A_1(1 + Q_1 Q_2).$$

En substituant de même cette valeur de $-R_2$, ainsi que celle de R_1, dans la troisième identité, on trouve

$$R_3 = R_1 - R_2 Q_3 = A(1 + Q_2 Q_3) - A_1(Q_1 + Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3);$$

et ainsi de suite.

On voit qu'on obtient de cette manière une série d'identités dont le premier membre est alternativement $+R_1$, $-R_2$, $+R_3$, $-R_4$, ..., et dont le second membre est la différence de deux polynômes entiers contenant respectivement comme facteurs A et A_1. On arrivera donc finalement à une identité de la forme

$$\pm R_p = AM - A_1 N.$$

Son second membre doit être divisible exactement par $\pm R_{p-1}$

puisque son premier l'est. Comme A et A_1 sont des polynômes premiers entre eux et sans facteur commun constant, $\pm R_p$ devra diviser exactement les polynômes entiers M et N. En désignant les quotients par Z et Z_1 et en renversant les deux membres, on aura donc

$$AZ - A_1 Z_1 = 1.$$

Applications.

1127. *Résoudre l'équation du quatrième degré, dans le cas où elle a deux racines égales et de signes contraires.*

Si la proposée $\varphi(z) = 0$ a deux racines égales et de signes contraires telles que a et $-a$, il en est de même de la transformée $\varphi(-z) = 0$ (1105), qui admet alors les deux racines $-a$ et a. Les deux polynômes $\varphi(z)$ et $\varphi(-z)$ admettront donc un plus grand commun diviseur du second degré (1125). En l'égalant à zéro, on déterminera les racines a et $-a$, et la résolution complète de l'équation du quatrième degré s'ensuivra (1125).

Soit donc l'équation

$$\varphi(z) = A_0 z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0.$$

La transformée en $-z$ sera (1105)

$$\varphi(-z) = A_0 z^4 - A_1 z^3 + A_2 z^2 - A_3 z + A_4 = 0.$$

Au lieu de chercher le plus grand commun diviseur des deux premiers membres $\varphi(z)$ et $\varphi(-z)$, on simplifie les calculs en remplaçant le système considéré par le système équivalent (*Alg. élém*).

$$\varphi(z) + \varphi(-z) = 0,$$
$$\varphi(z) - \varphi(-z) = 0,$$

c'est-à-dire par les deux équations

$$2A_0 z^4 + 2A_2 z^2 + 2A_4 = 0,$$
$$2A_1 z^3 + 2A_3 z = 0.$$

En supprimant le facteur commun 2, on devra chercher le plus grand commun diviseur des deux polynômes

$$A_0 z^4 + A_2 z^2 + A_4 \quad \text{et} \quad A_1 z^3 + A_3 z,$$

sachant qu'il est du second degré. Nous donnons ci-dessous la suite des opérations, en appliquant la remarque du n° 1124 et en écrivant les quotients au-dessus des diviseurs comme en Arithmétique.

$$\begin{array}{r|l|l}
 & A_0 z & A_1 z \\
A_0 z^4 + A_2 z^2 + A_4 & A_1 z^3 + A_3 z & (A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_4 \\
\hline
z^4 + A_1 A_2 z^2 + A_1 A_4 & A_1 (A_1 A_2 - A_0 A_3) z^3 + A_3 (A_1 A_2 - A_0 A_3) z & \\
- A_0 A_3 z^2 & - A_1^2 A_4 z & \\
\hline
A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_4 & (A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4) z &
\end{array}$$

Puisque le plus grand commun diviseur cherché doit être du second degré, la dernière division doit s'effectuer exactement. L'équation de condition qui doit lier les coefficients de l'équation du quatrième degré pour qu'elle ait deux racines égales et de signes contraires est donc

$$A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 = 0.$$

Les deux racines égales et de signes contraires sont alors données par l'équation

$$(A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_4 = 0,$$

d'où

$$z = \pm \sqrt{\frac{A_1 A_4}{A_0 A_3 - A_1 A_2}}$$

ou, en tenant compte de l'équation de condition,

$$z = \pm \sqrt{-\frac{A_3}{A_1}}.$$

Les deux autres racines s'obtiendront en divisant le premier membre $\varphi(z)$ de l'équation donnée par le plus grand commun diviseur

$$(A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_4.$$

Mais, à cause de l'équation de condition, on peut remplacer le coefficient de z^2 par $\frac{A_1^2 A_4}{A_3}$.

On a donc à diviser le premier membre de $\varphi(z)$ par le binôme

$$\frac{A_1^2 A_4}{A_3} z^2 + A_1 A_4 = \frac{A_1 A_4 (A_1 z^2 + A_3)}{A_3},$$

c'est-à-dire simplement (1124) par $A_1 z^2 + A_3$.

On aura donc

$$\begin{array}{l|l}
A_0 z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 & A_1 z^2 + A_3 \\
\hline
A_1 A_0 z^4 + A_1^2 z^3 + A_1 A_2 z^2 + A_1 A_3 z + A_1 A_4 & A_0 z^2 + A_1 z + A_1 A_2 - A_0 A_3 \\
\quad - A_0 A_3 z^2 & \\
\hline
(A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_3 z + A_1 A_4 & \\
\quad - A_1 A_3 z & \\
\hline
(A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1 A_4 & \\
A_1 (A_1 A_2 - A_0 A_3) z^2 + A_1^2 A_4 & \\
\quad - A_3 (A_1 A_2 - A_0 A_3) & \\
\hline
A_1^2 A_4 + A_0 A_3^2 - A_1 A_2 A_3 &
\end{array}$$

Le reste de cette division est nul d'après l'équation de condition, et les deux autres racines de l'équation du quatrième degré seront déterminées par l'équation du second degré

$$A_0 z^2 + A_1 z + A_1 A_2 - A_0 A_3 = 0.$$

1128. 2° *Résoudre l'équation du quatrième degré,* $\varphi(z) = 0$, *connaissant la différence d qui existe entre deux de ses racines.*

Soient a et $a + d$ les deux racines dont la différence est d.

Si l'on forme alors la transformée en $z + d$, c'est-à-dire l'équation dont les racines sont celles de la proposée diminuées de d (1107), l'une des racines de cette transformée sera $a + d - d$ ou a, de sorte que l'équation donnée $\varphi(z) = 0$ et sa transformée $\varphi(z + d) = 0$ auront nécessairement une racine commune. Leurs premiers membres auront donc un plus grand commun diviseur du premier degré qui, égalé à zéro, fera connaître la racine a et, par suite, la racine $a + d$. En divisant $\varphi(z)$ par le produit $(z - a)(z - a - d)$ et en égalant le quotient à zéro, on obtiendra les deux autres racines de la proposée par une équation du second degré.

Appliquons cette marche à un exemple numérique, et proposons-nous de résoudre l'équation

$$\varphi(z) = z^4 - 7z^3 + 15z^2 - 7z - 6 = 0,$$

sachant que la différence entre deux de ses racines est égale à 1.

La transformée en $z + 1$ est ici (1107)

$$\varphi(1) + \varphi'(1) z + \frac{\varphi''(1)}{1.2} z^2 + \frac{\varphi'''(1)}{1.2.3} z^3 + \frac{\varphi^{IV}(1)}{1.2.3.4} z^4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(z + 1) = z^4 - 3z^3 + 0.z^2 + 6z - 4 = 0.$$

On doit donc chercher le plus grand commun diviseur des deux poly-

nômes

$$z^4 - 7z^3 + 15z^2 - 7z - 6 \qquad \text{et} \qquad z^4 - 3z^3 + 6z - 4.$$

On simplifiera un peu les calculs en remplaçant l'une des deux équations $\varphi(z) = 0$ et $\varphi(z+1) = 0$ par leur différence

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = 0;$$

ce qui est permis. On aura ainsi à considérer finalement les deux polynômes (en multipliant le second par -1)

$$z^4 - 3z^3 + 6z - 4 \qquad \text{et} \qquad 4z^3 - 15z^2 + 13z + 2.$$

Nous indiquons la recherche de leur plus grand commun diviseur

	$z+3$	$-4z-13$	$-z+1$
$4z^4 - 3z^3 + 6z - 4$	$4z^3 - 15z^2 + 13z + 2$	$-z^2 + 7z - 10$	$z - 2$
$4z^4 - 12z^3 + 24z - 16$	$+28z^2 - 40z$	$-2z$	
$+15z^3 - 13z^2 - 2z$	$+13z^2 - 27z + 2$	$+5z - 10$	
$-13z^2 + 22z - 16$	$+91z - 130$	$z - 2$	
$-52z^2 + 88z - 64$	$+64z - 128$	$+2$	
$+45z^2 - 39z - 6$	$z - 2$	0	
$-7z^2 + 49z - 70$			
$-z^2 + 7z - 10$			

On trouve, comme plus grand commun diviseur du premier degré, $z - 2$. En l'égalant à zéro, on voit que la racine a est, dans cet exemple numérique, représentée par 2; la racine $a + d$ l'est, par conséquent, par 3.

Pour obtenir les deux autres racines de l'équation proposée, il ne reste plus qu'à former le produit

$$(z-2)(z-3) = z^2 - 5z + 6.$$

En divisant par ce produit le premier membre $\varphi(z)$ de l'équation, on a pour quotient

$$z^2 - 2z - 1,$$

et, en l'égalant à zéro, on a, pour les racines cherchées,

$$1 \pm \sqrt{2}.$$

Recherche des diviseurs des polynômes à une variable.

1129. Nous pouvons supposer le polynôme considéré ramené à la forme (1106)

$$\varphi(z) = z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \ldots,$$

ainsi que ses différents diviseurs.

Nous avons vu que $\varphi(z)$ peut se décomposer, et cela d'une seule manière (1061, 1065), en m facteurs linéaires ou premiers, qui sont ses diviseurs du premier degré. Tout diviseur de $\varphi(z)$, d'un degré supérieur au premier, ne peut être que le produit de quelques-uns de ses facteurs premiers (1065).

Par conséquent, pour avoir tous les diviseurs de $\varphi(z)$, il est nécessaire et il est suffisant de combiner entre eux de toutes les manières possibles les facteurs premiers de $\varphi(z)$.

La fonction aura ainsi autant de diviseurs du second degré qu'on peut former de combinaisons avec m objets pris 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$ [246]; elle aura autant de diviseurs du troisième degré qu'on peut former de combinaisons avec m objets pris 3 à 3, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, ...

D'une manière générale, le nombre de ses diviseurs du $n^{\text{ième}}$ degré sera donné par la formule

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

En se rappelant (251) le théorème exprimé par la formule

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

on voit qu'il y a autant de diviseurs du premier degré que du degré $m-1$, autant du second degré que du degré $m-2$, ...

1130. Si l'on pouvait, d'une manière simple, déterminer un diviseur quelconque du premier membre de l'équation

$$\varphi(z) = 0,$$

la résolution de cette équation serait assurée; car, en opérant sur ce diviseur comme sur la fonction elle-même, on descendrait successivement jusqu'à des équations du second ou du premier degré.

Admettons, par exemple, que $\varphi(z)$ ait un diviseur Z, et que le quotient de $\varphi(z)$ par Z soit Z_1. L'équation donnée prendra la forme

$$ZZ_1 = 0,$$

et sa résolution reviendra (1021) à celle des deux équations de degré moindre

$$Z = 0, \qquad Z_1 = 0.$$

Mais la recherche des diviseurs d'un polynôme $\varphi(z)$ exige, en général, la résolution d'équations dont le degré est plus élevé que celui de ce polynôme, c'est-à-dire que cette recherche constitue un problème plus difficile que la résolution directe de l'équation $\varphi(z) = 0$ ou la détermination des facteurs premiers de $\varphi(z)$.

En effet, si l'on veut obtenir un diviseur de degré n, le nombre de ces diviseurs étant C_m^n (1129), l'équation qui permettra de déterminer un coefficient quelconque de ce diviseur devra être précisément du degré marqué par ce nombre.

Or, quand on suppose $n = 1$ ou $n = m - 1$, on a

$$C_m^1 = C_m^{m-1} = m;$$

mais, si l'on prend $n = 2, 3, 4, \ldots$, les nombres $C_m^2 = C_m^{m-2}$, $C_m^3 = C_m^{m-3}$, ..., vont en croissant (262) jusqu'à un certain maximum (273) [qui est $C_m^{\frac{m-1}{2}}$ si m est impair et $C_m^{\frac{m}{2}}$ si m est pair], pour repasser ensuite par les mêmes valeurs en ordre inverse à mesure que n augmente jusqu'à $m - 1$.

En prenant seulement $n = 2$,

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2};$$

et, pour que ce résultat surpasse m ou pour qu'on ait

$$m(m-1) > 2m,$$

il suffit de supposer m supérieur à 3.

Ainsi, lorsque la fonction est du troisième degré, la recherche de ses diviseurs du second degré est aussi difficile que la résolution de l'équation correspondante elle-même. Au delà du troisième degré, pour les diviseurs du second degré et, *a fortiori*, pour les diviseurs de degré supérieur, la question dépend d'une équation dont le degré surpasse celui de l'équation formée en égalant la fonction donnée à zéro.

1131. On peut suivre deux méthodes générales pour trouver les diviseurs d'un certain ordre. Nous allons les indiquer succinctement, et nous les appliquerons ensuite à la recherche des diviseurs du second degré pour les fonctions du troisième et du quatrième degré.

Première méthode. — Soit $\varphi(z)$ le polynôme donné, dont le degré est m et dont le premier terme est z^m. On veut chercher ses diviseurs du $n^{ième}$ degré. Nous représenterons l'un de ces diviseurs par un polynôme $f(z)$ ayant pour premier terme z^n, et contenant dès lors *n coefficients indéterminés*.

En divisant $\varphi(z)$ par $f(z)$, on parviendra à un reste de degré $n-1$, qui devra être identiquement nul, si $f(z)$ est bien l'un des diviseurs cherchés. En égalant à zéro les coefficients des différents termes du reste, on obtiendra donc n équations entre les données et les inconnues [qui sont les n coefficients indéterminés de $f(z)$]. Il faudra éliminer $n-1$ inconnues entre ces n équations, et l'on parviendra ainsi à une dernière équation, qui devra être de degré C_m^n, et qui fera connaître la $n^{ième}$ inconnue conservée. Les équations de condition conduiront ensuite, pour chaque valeur de cette $n^{ième}$ inconnue, aux valeurs correspondantes des $n-1$ autres coefficients.

Seconde méthode. — On peut encore opérer comme il suit. $f(z)$ représentant un diviseur du $n^{ième}$ degré, le quotient $F(z)$ de $\varphi(z)$ par $f(z)$ sera un polynôme de degré $m-n$, dont le premier terme aura pour coefficient l'unité d'après les conventions précédentes. En laissant *indéterminés* les n coefficients de $f(z)$ et les $m-n$ coefficients de $F(z)$, il faut que le produit de ces deux polynômes reforme identiquement la fonction $\varphi(z)$. En exprimant ce fait, on aura donc m équations de condition entre les données et les $n+m-n$ ou les m coefficients indéterminés. Il restera à en éliminer $m-1$ entre ces m équations, pour arriver à l'équation qui doit résoudre la question comme dans la première méthode, en faisant connaître la $m^{ième}$ inconnue.

Recherche des diviseurs du second degré dans le cas des polynômes du troisième et du quatrième degré.

1132. Troisième degré. — En égalant à zéro le polynôme donné du troisième degré, on peut toujours faire disparaître son second terme (1110) et le ramener à la forme

$$z^3+Qz+R=0. \tag{1}$$

Appliquons la *première méthode* (1311). Nous représente-

rons un diviseur du second degré de la fonction $z^3 + Qz + R$ par

$$z^2 + pz + q,$$

et nous effectuerons la division des deux polynômes.

$$\begin{array}{r|l} z^3 + Qz + R & z^2 + pz + q \\ \hline -pz^2 - qz & z - p \\ \hline -pz^2 + (Q - q)z + R & \\ +p^2 z + pq & \\ \hline (p^2 + Q - q)z + (R + pq) & \end{array}$$

Le reste du premier degré auquel on parvient devant être identiquement nul, les valeurs de p et de q devront satisfaire aux deux équations

$$p^2 + Q - q = 0, \qquad R + pq = 0.$$

En éliminant q entre ces deux équations, il vient

$$p^3 + Qp + R = 0.$$

Cette équation fera connaître le coefficient p, et l'on aura ensuite

$$q = -\frac{R}{p}.$$

Elle est du *troisième degré* (1130) et identique à l'équation (1), sauf la substitution de p à la place de z. Il est facile d'expliquer cette coïncidence.

Les diviseurs étant formés par le produit des facteurs premiers du polynôme assemblés convenablement (1129). représente la somme de deux quelconques des racines de l'équation (1) [1080]; mais, cette équation étant privée de son second terme, la somme de ses racines est nulle (1080), de sorte que p représente l'une quelconque des racines de l'équation (1).

La difficulté de la recherche des diviseurs du second degré est donc ici la même (1130) que la résolution directe de l'équation qui répond à la fonction donnée.

1133. Quatrième degré. — Nous supposerons également que l'équation du quatrième degré obtenue en égalant à zéro le

polynôme proposé a été privée de son second terme. Nous aurons ainsi

$$z^4 + Qz^2 + Rz + S = 0. \tag{1}$$

Appliquons la *seconde méthode* (1131). Nous représenterons toujours un diviseur du second degré du polynôme par

$$z^2 + pz + q,$$

et le quotient du premier membre de l'équation (1) par ce diviseur, quotient qui est aussi du second degré, sera représenté de même par

$$z^2 + p'z + q'.$$

On doit alors avoir identiquement

$$z^4 + Qz^2 + Rz + S = (z^2 + pz + q)(z^2 + p'z + q')$$

ou

$$z^4 + Qz^2 + Rz + S = z^4 + \begin{array}{l|l|l|l} p & z^3 + q & z^2 + qp' & z + qq' \\ p' & + pp' & + pq' & \\ & + q' & & \end{array}$$

Les équations de condition sont donc

$$p + p' = 0, \quad q + pp' + q' = Q, \quad qp' + pq' = R, \quad qq' = S.$$

La première donne

$$p' = -p,$$

et les trois autres deviennent

$$q - p^2 + q' = Q, \quad p(q' - q) = R, \quad qq' = S.$$

On a, par suite,

$$q' + q = p^2 + Q \quad \text{et} \quad q' - q = \frac{R}{p}.$$

Il en résulte immédiatement

$$q' = \frac{p^2 + Q}{2} + \frac{R}{2p} = \frac{p^3 + Qp + R}{2p},$$

$$q = \frac{p^2 + Q}{2} - \frac{R}{2p} = \frac{p^3 + Qp - R}{2p}.$$

En substituant ces valeurs dans la dernière équation de con-

dition, il vient enfin

$$\frac{(p^3+Qp+R)(p^3+Qp-R)}{4p^2}=S,$$

c'est-à-dire

$$(p^3+Qp)^2-R^2=4Sp^2$$

et, en développant,

$$p^6+2Qp^4+(Q^2-4S)p^2-R^2=0.$$

Cette équation en p est, comme cela doit être, du *sixième degré* [on a $C_4^2=\frac{4.3}{2}=6$]; mais elle ne renferme que des puissances paires de p, de sorte que, en prenant p^2 pour inconnue, *elle s'abaisse au troisième degré* et devient

$$(p^2)^3+2Q(p^2)^2+(Q^2-4S)p^2-R^2=0.$$

En résolvant cette équation du troisième degré, on aura les trois valeurs de p^2 ou les six valeurs de p, deux à deux égales et de signes contraires. Les valeurs correspondantes de q seront données par l'équation de condition

$$q=\frac{p^3+Qp-R}{2p}.$$

Dans ce cas particulier, grâce à l'*abaissement* de l'équation en p, la recherche des diviseurs du second degré est plus facile que la résolution directe de l'équation (1).

Descartes a pu ainsi ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle du troisième degré. Car, une seule valeur de p étant déterminée, on peut calculer les valeurs correspondantes, non seulement de q, mais encore de p' et de q', à l'aide des relations ci-dessus. On a alors à résoudre, à la place de l'équation (1), les deux équations du second degré

$$z^2+pz+q=0, \qquad z^2+p'z+q'=0,$$

dont les racines sont celles de l'équation (1) [1065].

On pouvait d'ailleurs prévoir l'*abaissement* de l'équation en p.

En effet, l'équation (1) étant privée de son second terme, la somme de ses quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 est nulle; et, si l'on égale à zéro un diviseur du second degré, dans l'équation obtenue

$$z^2+pz+q=0,$$

$-p$ représente la somme de deux *quelconques* de ces racines. D'après la condition

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,$$

les six valeurs de p satisfont donc aux relations suivantes

$$-z_1-z_2=z_3+z_4,\quad -z_1-z_3=z_2+z_4,\quad -z_1-z_4=z_2+z_3,$$
$$-z_2-z_3=z_1+z_4,\quad -z_2-z_4=z_1+z_3,\quad -z_3-z_4=z_1+z_2,$$

c'est-à-dire qu'elles sont bien deux à deux égales et de signes contraires.

Un fait remarquable doit être encore signalé. Si l'on considère l'équation du quatrième degré sans transformation, c'est-à-dire *non privée de son second terme,* l'équation en p à laquelle on parviendra par l'application de la seconde méthode sera une équation *complète* du sixième degré de la forme

$$(2)\qquad p^6+\mathrm{P}'p^5+\mathrm{Q}'p^4+\mathrm{R}'p^3+\mathrm{S}'p^2+\mathrm{T}'p+\mathrm{U}'=0.$$

Les six valeurs de p seront toujours

$$-z_1-z_2,\quad -z_1-z_3,\quad -z_1-z_4,$$
$$-z_2-z_3,\quad -z_2-z_4,\quad -z_3-z_4;$$

seulement, elles ne seront plus deux à deux égales et de signes contraires, puisque la condition $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ n'est plus satisfaite; P' sera alors la somme de ces six valeurs changées de signes (1080), de sorte qu'on aura

$$\mathrm{P}'=3(z_1+z_2+z_3+z_4).$$

Or, pour faire disparaître le second terme de l'équation complète du sixième degré en p, il faut (1110) diminuer toutes les racines de cette équation de la quantité $-\frac{\mathrm{P}'}{6}$ ou (1107) former la transformée en

$$\pi=p-\left(-\frac{\mathrm{P}'}{6}\right)\qquad \text{ou en}\qquad \pi=p+\frac{\mathrm{P}'}{6}.$$

Les racines de cette transformée seront donc, en désignant par $\Sigma=\frac{\mathrm{P}'}{3}$ la somme des quatre racines de l'équation com-

plète du quatrième degré,

$$
\begin{aligned}
-z_1-z_2+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_3+z_4-z_1-z_2),\\
-z_1-z_3+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_2+z_4-z_1-z_3),\\
-z_1-z_4+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_2+z_3-z_1-z_4),\\
-z_2-z_3+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_1+z_4-z_2-z_3),\\
-z_2-z_4+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_1+z_3-z_2-z_4),\\
-z_3-z_4+\tfrac{1}{2}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(z_1+z_2-z_3-z_4).
\end{aligned}
$$

Et l'on vérifie alors que les racines de la transformée sont deux à deux égales et de signes contraires, *ce qui exige que l'équation correspondante ne renferme que des termes de degré pair*. Il en résulte que, en faisant disparaître le deuxième terme en p^5 de l'équation (2), on fait *nécessairement* disparaître en même temps le quatrième terme en p^3 et le sixième terme en p, de sorte que *l'abaissement* du sixième degré au troisième degré a encore lieu.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Recherche du plus grand commun diviseur d'un polynôme et de sa dérivée.

1134. I. *Le plus grand commun diviseur d'un polynôme et de sa fonction dérivée est le produit des facteurs premiers multiples du polynôme proposé, pris chacun avec un exposant moindre d'une unité.*

Nous avons vu (1063) ce qu'on entend par racines multiples d'une équation algébrique ou par facteurs premiers multiples d'un polynôme.

Le polynôme donné, décomposé en facteurs premiers, étant

$$\varphi(z) = (z-a)^n (z-b)^p (z-c)(z-d),$$

par exemple, il s'agit de prouver que le plus grand commun diviseur de $\varphi(z)$ et de sa dérivée $\varphi'(z)$ est égal à

$$(z-a)^{n-1}(z-b)^{p-1}.$$

Admettons d'abord, sans faire apparaître les racines égales ou les facteurs multiples, que, le polynôme étant de degré m, on ait

$$\varphi(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_m).$$

Désignons par $\varphi'(z)$, comme à l'ordinaire, la dérivée de $\varphi(z)$. Nous avons démontré (1084), en appliquant simplement la règle de dérivation d'un produit (783), la formule fondamentale

$$(1)\qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \frac{1}{z-a_3} + \ldots + \frac{1}{z-a_m}.$$

Supposons maintenant que, parmi les racines considérées, il y en ait μ_1 qui soient égales à a_1, μ_2 qui soient égales à

$\alpha_2, \ldots, \mu_n$ qui soient égales à α_n. On aura

$$\varphi(z) = (z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\ldots(z-a_n)^{\mu_n},$$

et la formule (1) deviendra

$$(1\ bis)\quad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\mu_1}{z-a_1} + \frac{\mu_2}{z-a_2} + \frac{\mu_3}{z-a_3} + \ldots + \frac{\mu_n}{z-a_n}.$$

La somme $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_n$ est nécessairement égale à m, et les nombres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ sont égaux ou supérieurs à l'unité.

Si, dans la formule (1 *bis*), on réduit les fractions du second membre au même dénominateur et si on les ajoute, le dénominateur commun est

$$F(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n).$$

Quant au numérateur de la fraction résultante, il a pour expression

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & \mu_1(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n) \\ & + \mu_2(z-a_1)(z-a_3)\ldots(z-a_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mu_n(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1}); \end{aligned}$$

et il est clair que ce numérateur n'admet comme facteur premier aucun des facteurs linéaires de $\varphi(z)$, puisque $f(z)$ est composé de parties qui, toutes, *sauf une seule,* contiennent ce facteur quel qu'il soit. Ainsi le facteur $z-a_1$ se retrouve partout, excepté dans la première partie; le facteur $z-a_2$ appartient à toutes les parties, moins la seconde, etc.

La formule (1 *bis*) pouvant s'écrire

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi(z)}{F(z)}\ f(z),$$

et $f(z)$ n'admettant aucun des facteurs linéaires de $\varphi(z)$, les facteurs premiers de $\varphi(z)$ qui se retrouvent dans $\varphi'(z)$ et dont le produit constitue le plus grand commun diviseur des deux fonctions proviennent seulement du quotient $\frac{\varphi(z)}{F(z)}$. Le plus grand commun diviseur cherché a donc pour expression

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)} = (z-a_1)^{\mu_1-1}(z-a_2)^{\mu_2-1}\ldots(z-a_n)^{\mu_n-1};$$

ce qui justifie l'énoncé.

Le degré de ce plus grand commun diviseur est

$$(\mu_1 - 1) + (\mu_2 - 1) + \ldots + (\mu_n - 1) = m - n.$$

1135. II. *Toute racine multiple d'ordre n d'une équation algébrique quelconque,* $\varphi(z) = 0$, *annule* $\varphi(z)$ *et ses* $n - 1$ *premières dérivées, sans annuler la* $n^{\text{ième}}$; réciproquement, *toute quantité qui annule* $\varphi(z)$ *et ses* $n - 1$ *premières dérivées, sans annuler la* $n^{\text{ième}}$, *est racine multiple d'ordre n de l'équation* $\varphi(z) = 0$.

En effet, si a est une racine multiple d'ordre n de l'équation $\varphi(z) = 0$, $\varphi(z)$ admet le facteur multiple $(z-a)^n$. D'après le théorème précédent (1134) appliqué successivement, $\varphi'(z)$ admet alors le facteur $(z-a)^{n-1}$, $\varphi''(z)$ admet le facteur $(z-a)^{n-2}$, ...; $\varphi^{n-1}(z)$ admet seulement le facteur $z - a$, de sorte que ce facteur n'entre plus dans $\varphi^n(z)$.

Réciproquement, si la quantité a, n'annulant pas $\varphi^n(z)$, annule $\varphi^{n-1}(z)$, cette dérivée contient une seule fois le facteur $z - a$. En remontant, la dérivée $\varphi^{n-2}(z)$ contient alors deux fois ce facteur, la dérivée $\varphi^{n-3}(z)$ le contient trois fois, ..., la dérivée $\varphi'(z)$ le contient $n - 1$ fois et, enfin, la fonction $\varphi(z)$ le contient n fois, de sorte que cette quantité a est une racine multiple d'ordre n de l'équation $\varphi(z) = 0$.

Condition pour qu'une équation algébrique ait des racines égales.

1136. Pour reconnaître si une équation algébrique quelconque $\varphi(z) = 0$ a des racines égales, il suffit, d'après ce qui précède (1134, 1135), de chercher le plus grand commun diviseur de $\varphi(z)$ et de sa dérivée $\varphi'(z)$.

Si ces deux polynômes sont premiers entre eux (1123), l'équation proposée n'a pas de racines égales; si ces deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique, l'équation $\varphi(z) = 0$ a des racines égales.

Les racines de l'équation formée en égalant à zéro ce plus grand commun diviseur D, entrent dans l'équation donnée avec un exposant supérieur d'une unité. Ainsi les racines simples, les racines doubles, les racines triples, ..., de l'équation $D = 0$, sont racines doubles, racines triples, racines quadruples, ..., de l'équation $\varphi(z) = 0$.

1137. Exemples.

1° *Reconnaître si l'équation binôme* $z^m - 1 = 0$ *peut avoir des racines égales.*

La dérivée du premier membre de l'équation donnée est mz^{m-1}. Il faut chercher le plus grand commun diviseur de $z^m - 1$ et de mz^{m-1}.

$$\begin{array}{r|l} z^m - 1 & mz^{m-1} \\ mz^m - m & \overline{z} \\ \hline -m & \end{array}$$

La première division conduisant au reste constant $-m$, $z^m - 1$ et mz^{m-1} sont des fonctions premières entre elles, et l'équation proposée n'a pas de racines égales.

Ce résultat concorde avec ce que nous avons dit précédemment des racines de l'unité (121, 122).

2° *Condition pour que l'équation complète du troisième degré admette une racine double.*

Soit l'équation

$$\varphi(z) = z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Pour que cette équation ait une racine double, il faut que le premier membre $\varphi(z)$ et sa dérivée $\varphi'(z) = 3z^2 + 2pz + q$ admettent un plus grand commun diviseur du premier degré. Indiquons la série des opérations en nous conformant toujours, pour éviter les coefficients fractionnaires, à la remarque du n° 1124.

$$\begin{array}{r|l} z^3 + pz^2 + qz + r & z + p \\ 3z^3 + 3pz^2 + 3qz + 3r & \overline{3z^2 + 2pz + q} \\ -2pz^2 - qz & \\ \hline pz^2 + 2qz + 3r & \\ 3pz^2 + 6qz + 9r & \\ -2p^2z - pq & \\ \hline (6q - 2p^2)z + (9r - pq) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3z^2 + 2pz + q & 3z + (12pq - 4p^3 - 27r + 3pq) \\ (6q - 2p^2)z^2 + 2p(6q - 2p^2)z + q(6q - 2p^2) & \overline{(6q - 2p^2)z + (9r - pq)} \\ -3(9r - pq)z & \\ \hline (12pq - 4p^3 - 27r + 3pq)z + q(6q - 2p^2) & \\ (6q - 2p^2)(12pq - 4p^3 - 27r + 3pq)z + q(6q - 2p^2)^2 & \\ -(9r - pq)(12pq - 4p^3 - 27r + 3pq) & \end{array}$$

$$36q^3 - 24p^2q^2 + 4qp^4 - 108pqr + 36p^3r + 243r^2 - 27pqr + 12p^2q^2 - 4qp^4 - 27pqr + 3p^2q^2$$

Ce reste, égalé à zéro, représente l'*équation de condition* cherchée. En effectuant la réduction des termes semblables et en supprimant le facteur commun 9, on obtient finalement

$$(1) \qquad 4q^3 + 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 27r^2 = 0.$$

En égalant le plus grand commun diviseur du premier degré à zéro, on a, pour expression de la racine double z_2,

$$z_2 = \frac{pq - 9r}{6q - 2p^2}.$$

La racine simple z_1 est alors (1036)

$$z_1 = -p - 2z_2 = -p - \frac{pq - 9r}{3q - p^2} = \frac{p^3 - 4pq + 9r}{3q - p^2}.$$

Ces résultats concordent avec ceux trouvés précédemment. Nous avons vu, en effet (1097), que le *dernier terme* de l'équation qui a pour racine les *carrés des différences des racines* de l'équation

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

a précisément pour expression le premier membre de l'équation de condition (1). Or, si l'équation *complète* du troisième degré a une racine *double*, l'équation aux carrés des différences de ses racines doit admettre une racine *nulle*, ce qui exige bien que son dernier terme ou son terme constant soit lui-même égal à zéro.

De même, nous avons trouvé (1082, 2°) la condition pour que l'équation du troisième degré, *privée de son second terme*, ait une racine double, et nous avons obtenu en même temps les valeurs de cette racine double et de la racine simple qui lui est associée. En faisant dans ce qui précède $p = 0$, ce qui donne à l'équation du troisième degré considérée la forme $z^3 + qz + r = 0$, on retombe bien sur la condition

$$(1\,bis) \qquad 4q^3 + 27r^2 = 0$$

et sur les valeurs des racines

$$z_2 = -\frac{3r}{2q}, \qquad z_1 = \frac{3r}{q},$$

auxquelles on est parvenu dans le second exemple du n° 1082, avec des notations différentes.

Décomposition de toute équation qui a des racines égales en équations plus simples, faisant connaître chacune les racines des différents ordres de multiplicité, prises seulement une fois.

1138. Soit l'équation algébrique quelconque $\varphi(z) = 0$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que cette équation a des

racines doubles, des racines triples et des racines quadruples.

Nous désignerons respectivement par Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, les produits de facteurs binômes correspondant à ces racines des différents ordres de multiplicité, chacun de ces binômes étant pris seulement à la première puissance. On aura alors évidemment

$$\varphi(z) = Z_1 . Z_2^2 . Z_3^3 . Z_4^4; \tag{1}$$

et les équations

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = 0, \quad Z_4 = 0, \tag{2}$$

feront connaître les racines des différents ordres de multiplicité qui satisfont à l'équation proposée, indépendamment de cet ordre qu'on n'aura plus ensuite qu'à rétablir.

La question est donc de déterminer les premiers membres des équations (2), et nous allons voir qu'on peut y arriver par de simples divisions régulièrement effectuées.

Soit D, le plus grand commun diviseur du polynôme $\varphi(z)$ et de sa dérivée $\varphi'(z)$. Nous aurons (1134)

$$D = Z_2 . Z_3^2 . Z_4^3.$$

Soit D_1 le plus grand commun diviseur du polynôme D et de sa dérivée D'. Nous aurons de même

$$D_1 = Z_3 . Z_4^2.$$

Enfin, soit D_2 le plus grand commun diviseur du polynôme D_1 et de sa dérivée D_1'. Nous aurons

$$D_2 = Z_4.$$

Parvenu à ce dernier produit, par lequel nous sommes averti que le polynôme D_2 et sa dérivée sont premiers entre eux (1134) nous diviserons successivement $\varphi(z)$ par D, D par D_1, D_1 par D_2, et nous écrirons cette suite d'identités :

$$\frac{\varphi(z)}{D} = Q = Z_1 . Z_2 Z_3 . Z_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = Z_2 Z_3 . Z_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = Z_3 . Z_4,$$

$$D_2 = D_2 = Z_4.$$

Cela fait, nous diviserons de nouveau Q par Q_1, Q_1 par Q_2, Q_2 par D_2, et nous obtiendrons le résultat cherché, c'est-à-dire

$$Z_1 = \frac{Q}{Q_1}, \qquad Z_2 = \frac{Q_1}{Q_2}, \qquad Z_3 = \frac{Q_2}{D_2}, \qquad Z_4 = D_2.$$

La résolution de l'équation $\varphi(z) = 0$ est ainsi grandement facilitée, puisqu'elle est ramenée à la résolution d'une série d'équations de degrés inférieurs. La méthode est simple et élégante, et elle n'a contre elle que la longueur des calculs qu'elle exige.

1139. Supposons que l'équation $\varphi(z) = 0$ soit du quinzième degré, et qu'elle ait quatre racines simples, deux racines doubles, une racine triple et une racine quadruple. Z_1 sera alors du quatrième degré, Z_2 du second degré, Z_3 et Z_4 seront du premier degré.

1140. Comme on opère seulement par voie de division et sur des polynômes, les derniers quotients Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, ..., sont toujours des expressions rationnelles dont les coefficients sont formés avec ceux de l'équation donnée, et qui sont entières par rapport à z.

D'après cela, il est important de remarquer dès à présent que, lorsque l'équation $\varphi(z) = 0$ n'a qu'*une seule racine d'un certain ordre de multiplicité,* cette racine est nécessairement *commensurable,* puisqu'elle est donnée par une équation du premier degré à coefficients rationnels (1138), et elle est elle-même une *fonction rationnelle des coefficients de la proposée.*

1141. Si l'on voulait décomposer l'équation $\varphi(z) = 0$ en deux autres, l'une renfermant toutes ses racines *inégales,* l'autre toutes ses racines *égales,* mais prises seulement une fois, on opérerait comme il suit. Nous venons de trouver par la méthode générale (1138)

$$D = Z_2 Z_3^2 Z_4^3$$

et

$$\frac{\varphi(z)}{D} = Q = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur Δ de Q et de D.

Il aura pour valeur (1121)

$$\Delta = Z_2 Z_3 Z_4,$$

et, en divisant Q par Δ, il viendra

$$\frac{Q}{\Delta} = Z_1.$$

Les deux équations demandées sont ainsi

$$\Delta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{\Delta} = 0,$$

la première faisant connaître les racines égales prises chacune une fois, la seconde faisant connaître les racines inégales.

1142. Exemple. — Proposons-nous de *décomposer l'équation*

$$\varphi(z) = z^6 + 4z^5 - 3z^4 - 16z^3 + 11z^2 + 12z - 9 = 0,$$

au point de vue de la recherche de ses racines égales.

Nous aurons, pour la fonction dérivée,

$$\varphi'(z) = 6z^5 + 20z^4 - 12z^3 - 48z^2 + 22z + 12.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D de $\varphi(z)$ et de $\varphi'(z)$, en ayant soin de diviser d'avance $\varphi'(z)$ par 2 et d'appliquer les simplifications ordinaires.

Nous trouverons, après trois divisions,

$$D = z^3 + z^2 - 5z + 3,$$

nous en déduirons

$$D' = 3z^2 + 2z - 5.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D_1 de D et de D'. Nous trouverons, après deux divisions,

$$D_1 = z - 1.$$

D_1 n'ayant aucun facteur premier commun avec sa dérivée, on doit s'arrêter en posant (1138)

$$D_1 = Z_3.$$

On a ensuite

$$\frac{\varphi(z)}{D} = Q = Z_1 Z_2 Z_3 = z^3 + 3z^2 - z - 3,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = Z_2 Z_3 = z^2 + 2z - 3,$$

$$D_1 = D_1 = Z_3 = z - 1.$$

Il en résulte

$$\frac{Q}{Q_1} = Z_1 = z + 1,$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = Z_2 = z + 3,$$

$$D_1 = Z_3 = z - 1.$$

On arrive donc enfin à

$$\varphi(z) = (z+1)(z+3)^2(z-1)^3,$$

et l'équation proposée admet la racine simple -1, la racine double -3, et la racine triple $+1$.

Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algebrique ait une racine d'un certain ordre de multiplicité.

1143. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique $\varphi(z) = 0$ admette une racine multiple d'ordre n sont, d'après ce qui précède (1135), que cette racine, prise seulement une fois, annule $\varphi(z)$ et ses $n-1$ premières dérivées, sans annuler la $n^{\text{ième}}$. En d'autres termes, il faut exprimer que les n équations

$$(1) \quad \varphi(z) = 0, \quad \varphi'(z) = 0, \quad \varphi''(z) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{n-1}(z) = 0,$$

ont une racine commune.

Pour cela, on commence par écrire que $\varphi(z)$ et $\varphi'(z)$ ont un plus grand commun diviseur du premier degré. On trouve ainsi une première équation de condition entre les coefficients de la proposée. En égalant à zéro le plus grand commun diviseur calculé, on a l'expression de la racine multiple, et, en la substituant dans les $n-2$ autres équations (1), on obtient $n-2$ nouvelles équations de condition entre les coefficients de la proposée.

Ainsi, pour qu'une équation admette une racine multiple d'ordre n, il faut que ses coefficients satisfassent à $n-1$ équations de condition.

Nous avons déjà appliqué cette méthode (1137, 2°) à la recherche de la condition pour qu'une équation *complète* du troisième degré ait une racine *double*. Nous en donnerons ici un nouvel exemple.

1144. *Trouver les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du quatrième degré, privée de son second terme, ait une racine triple.*

On a ici à exprimer que les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(z) = z^4 + pz^2 + qz + r = 0, \\ \varphi'(z) = 4z^3 + 2pz + q = 0, \\ \varphi''(z) = 12z^2 + 2p = 0 \end{cases}$$

ont une racine commune. On a intérêt, en général, à opérer d'abord sur les équations de degré inférieur.

Nous exprimerons donc que les premiers membres des deux dernières équations (1) ont un plus grand commun diviseur du premier degré, en suivant toujours la même marche (1124). Nous aurons

$$\begin{array}{r|l|l} 4z^3+2pz+q & 2z & 3z-9q \\ 12z^3+6pz+3q & 6z^2+p & 4pz+3q \\ -2pz & \hline 12pz^2+2p^2 & \hline \\ \hline 4pz+3q & \quad -9qz & \\ \hline & -9qz+2p^2 & \\ & -36pqz+8p^3 & \\ & \quad +27q^2 & \\ \hline & 8p^3+27q^2 & \end{array}$$

La première condition cherchée est donc

$$(2)\qquad 8p^3 + 27q^2 = 0.$$

On obtient l'expression de la racine triple en égalant à zéro le plus grand commun diviseur du premier degré, c'est-à-dire en posant

$$(3)\qquad 4pz + 3q = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = -\frac{3q}{4p}.$$

En substituant cette valeur dans la première des équations (1), il vient

$$\frac{81q^4}{256p^4} + \frac{9q^2}{16p} - \frac{3q^2}{4p} + r = 0,$$

ou, en réduisant et en chassant les dénominateurs,

$$(4)\qquad 81q^4 - 48p^3q^2 + 256rp^4 = 0.$$

Telle est la seconde condition cherchée. On peut simplifier

son expression en tenant compte de la première condition. On déduit, en effet, de l'équation (2),

$$8p^3 = -27q^2,$$

de sorte que l'équation (4) se réduit à

$$9q^2 = 32rp. \tag{5}$$

En multipliant par 3 les deux membres de l'équation (5), on a

$$27q^2 = 96rp,$$

et l'on peut alors réunir les deux conditions trouvées sous la forme simple

$$27q^2 = 96rp = -8p^3$$

ou

$$\frac{27}{8}q^2 = 12rp = -p^3, \tag{6}$$

On peut simplifier notablement les calculs par l'emploi des *fonctions homogènes*. C'est ce que nous allons montrer.

Emploi des fonctions homogènes.

1145. — Cas d'une racine double. — Soit le polynôme entier

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m. \tag{1}$$

Remplaçons z par $\frac{z}{u}$ et multiplions ensuite par u^m, nous aurons

$$u^m \varphi\left(\frac{z}{u}\right) = A_0 z^m + A_1 u z^{m-1} + A_2 u^2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} u^{m-1} z + A_m u^m, \tag{2}$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons une fonction *homogène* (795) et de degré m des deux variables z et u. Nous pourrons la désigner par $\varphi(z, u)$, en convenant de remplacer $\varphi(z, 1)$ par $\varphi(z)$, puisque, lorsqu'on suppose $u = 1$, la relation (2) reproduit identiquement la relation (1). Il en sera de même pour la dérivée partielle $\varphi'_z(z, u)$ [738,779] qui, pour $u = 1$, reproduit simplement $\varphi'(z)$.

D'après le *théorème des fonctions homogènes* (793) appliqué à la fonction $\varphi(z, u)$, on a, d'une manière générale, l'identité

$$z\varphi'_z(z, u) + u\varphi'_u(z, u) = m\varphi(z, u). \tag{3}$$

Or, pour une racine *double* de l'équation $\varphi(z)=0$, les deux polynômes $\varphi(z,u)$ et $\varphi'_z(z,u)$ s'annulent quand on y remplace z par cette racine double et u par 1, puisqu'ils se réduisent, dans cette hypothèse, à $\varphi(z)$ et à $\varphi'(z)$. On a alors pour les mêmes valeurs, d'après l'identité (3),

$$\varphi'_u(z,u)=0.$$

Donc, toute racine double de $\varphi(z)=0$ est une racine commune des deux équations

$$\varphi'_z(z,u)=0, \qquad \varphi'_u(z,u)=0,$$

quand on y suppose $u=1$.

Réciproquement, toute racine commune des deux équations ainsi modifiées annule nécessairement $\varphi(z)$, d'après l'identité (3), et cette racine est alors une racine double de l'équation $\varphi(z)=0$, puisqu'elle annule à la fois $\varphi(z)$ et $\varphi'(z)$.

1146. Prenons, par exemple, l'équation du troisième degré privée de son second terme

$$z^3+pz+q=0. \tag{1}$$

Nous aurons immédiatement

$$\begin{cases} \varphi(z,u) = z^3+pu^2z+qu^3, \\ \varphi'_z(z,u) = 3z^2+pu^2, \\ \varphi'_u(z,u) = 2puz+3qu^2. \end{cases} \tag{2}$$

Égalons à zéro les deux dérivées partielles, après y avoir fait $u=1$. Il viendra

$$3z^2+p=0, \qquad 2pz+3q=0. \tag{3}$$

Si ces deux équations ont une racine commune, elle est nécessairement, puisque l'une des équations est du premier degré,

$$z=-\frac{3q}{2p}. \tag{4}$$

En la substituant alors dans le premier membre de l'autre équation (3), on obtient l'équation de condition qui doit lier les coefficients de l'équation (1) pour qu'elle ait une racine

double. On retrouve de la sorte, plus rapidement, le résultat connu (1082, 2°)

$$4p^3 + 27q^2 = 0. \tag{5}$$

1147. Cas d'une racine triple. — Pour que l'équation $\varphi(z) = 0$ ait une racine *triple,* il faut et il suffit (1143) que les équations

$$\varphi(z) = 0, \qquad \varphi'(z) = 0, \qquad \varphi''(z) = 0 \tag{1}$$

aient une racine commune.

Formons, comme précédemment (1145), l'équation homogène $\varphi(z, u)$. Nous avons démontré (794) que les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction homogène de degré m sont des fonctions homogènes de degré $m - 1$. *On peut donc leur appliquer aussi le théorème des fonctions homogènes* (793), de sorte qu'on a les trois équations suivantes, en se rappelant les notions données (863 et suiv.) sur les dérivées partielles des différents ordres :

$$\begin{cases} z\,\varphi'_z(z, u) + u\,\varphi'_u(z, u) = m\,\varphi(z, u) \\ z\,\varphi''_{z^2}(z, u) + u\,\varphi''_{z,u}(z, u) = (m-1)\,\varphi'_z(z, u), \\ z\,\varphi''_{u,z}(z, u) + u\,\varphi''_{u^2}(z, u) = (m-1)\,\varphi'_u(z, u). \end{cases} \tag{2}$$

Si l'équation $\varphi(z) = 0$ admet une racine triple, on a à la fois, pour la valeur correspondante de z et pour $u = 1$, $\varphi(z) = 0$, $\varphi'(z) = 0$, $\varphi''(z) = 0$. Pour les mêmes valeurs, la première des identités (2) donne alors $\varphi'_u(z, u) = 0$; à son tour, la deuxième de ces identités donne $\varphi''_{z,u}(z, u) = 0$; enfin, la troisième donne nécessairement $\varphi''_{u^2}(z, u) = 0$, puisque l'on a (863) $\varphi''_{u,z}(z, u) = \varphi''_{z,u}(z, u)$.

Il en résulte que, pour toute racine triple de $\varphi(z) = 0$, les relations ci-après (qui correspondent aux dérivées partielles du second ordre)

$$\varphi''_{z^2}(z, u) = 0, \qquad \varphi''_{z,u}(z, u) = 0, \qquad \varphi''_{u^2}(z, u) = 0 \tag{3}$$

sont satisfaites, quand on fait en même temps $u = 1$.

Réciproquement, si les équations (3) *ainsi modifiées* admettent une racine commune, pour cette racine et pour $u = 1$, la troisième des identités (2) donne $\varphi'_u(z, u) = 0$; la deuxième de ces identités donne $\varphi'_z(z, u) = 0$; enfin, la première donne à son tour $\varphi(z, u) = 0$. Par conséquent, la valeur correspon-

dante de z est une racine triple de l'équation $\varphi(z)=0$, puisqu'on a à la fois, pour cette valeur,

$$\varphi(z)=0, \qquad \varphi'(z)=0, \qquad \varphi''(z)=0. \tag{1}$$

On peut donc, dans la recherche poursuivie, substituer aux équations (1) les équations (3), qui sont nécessairement plus simples.

1148. Reprenons l'exemple déjà traité (1144), c'est-à-dire cherchons les *conditions pour que l'équation du quatrième degré, privée de son second terme,*

$$z^4+pz^2+qz+r=0 \tag{1}$$

ait une racine triple.

Nous aurons ici

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi(z,u) &= z^4+pu^2z^2+qu^3z+ru^4,\\
\varphi'_z(z,u) &= 4z^3+2pu^2z+qu^3,\\
\varphi'_u(z,u) &= 2puz^2+3qu^2z+4ru^3,\\
\varphi''_{z^2}(z,u) &= 12z^2+2pu^2,\\
\varphi''_{z,u}(z,u) &= 4puz+3qu^2=\varphi''_{u,z}(z,u),\\
\varphi''_{u^2}(z,u) &= 2pz^2+6quz+12ru^2.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Égalons à zéro les trois dérivées partielles du second ordre, en y faisant $u=1$. Nous obtiendrons les trois équations

$$\left\{\begin{aligned}
12z^2+2p&=0,\\
4pz+3q&=0,\\
2pz^2+6qz+12r&=0,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

et elles devront admettre une racine commune. La deuxième des équations (3) étant du premier degré, cette racine commune est nécessairement

$$z=-\frac{3q}{4p}; \tag{4}$$

et, en la substituant dans les deux autres équations (3), on retrouve, beaucoup plus rapidement, les mêmes équations de condition qu'au n° 1144, savoir

$$\frac{27}{8}q^2=12rp=-p^3.$$

1149. Cas général. — Les résultats qu'on vient d'obtenir (1145,1147), dans le cas d'une racine double et d'une racine triple, s'étendent sans peine à la recherche des racines d'ordre supérieur, quel que soit cet ordre.

En appliquant le *théorème des fonctions homogènes* à la fonction elle-même rendue homogène et à ses dérivées partielles du premier ordre, nous avons trouvé (1145.1147)

$$(1)\quad \begin{cases} z\,\varphi'_z(z,u) + u\,\varphi'_u(z,u) = m\,\varphi(z,u), \\ z\,\varphi''_{z^2}(z,u) + u\,\varphi''_{z,u}(z,u) = (m-1)\,\varphi'_z(z,u), \\ z\,\varphi''_{u,z}(z,u) + u\,\varphi''_{u^2}(z,u) = (m-1)\,\varphi'_u(z,u). \end{cases}$$

Les dérivées partielles du premier ordre étant des fonctions homogènes de degré $m-1$, les dérivées partielles du deuxième ordre sont des fonctions homogènes de degré $m-2$ (794), auxquelles on peut encore appliquer le même théorème. On obtient ainsi les relations suivantes, en remarquant que, puisque (865) $\varphi''_{z,u}(z,u) = \varphi''_{u,z}(z,u)$, on n'a besoin de considérer qu'une seule de ces deux fonctions :

$$(2)\quad \begin{cases} z\,\varphi'''_{z^3}(z,u) + u\,\varphi'''_{z^2,u}(z,u) = (m-2)\,\varphi''_{z^2}(z,u), \\ z\,\varphi'''_{z^2,u}(z,u) + u\,\varphi'''_{z,u^2}(z,u) = (m-2)\,\varphi''_{z,u}(z,u), \\ z\,\varphi'''_{u^2,z}(z,u) + u\,\varphi'''_{u^3}(z,u) = (m-2)\,\varphi''_{u^2}(z,u). \end{cases}$$

Cela posé, pour que l'équation $\varphi(z)=0$ ait une racine *quadruple*, il faut (1135) que les quatre équations

$$(\alpha)\quad \varphi(z)=0, \qquad \varphi'(z)=0, \qquad \varphi''(z)=0, \qquad \varphi'''(z)=0$$

aient une racine commune.

S'il en est ainsi, pour la valeur correspondante de z et pour $u=1$, *une racine quadruple étant racine double et racine triple*, les identités (1) sont satisfaites d'elles-mêmes et les seconds membres des identités (2) s'annulent tous les trois (1145,1147). A cause des équations (α), la première des identités (2) donne alors $\varphi'''_{z^3,u}(z,u)=0$; il en résulte, en vertu de la deuxième, $\varphi'''_{z,u^2}(z,u)=0$; et, par conséquent, la troisième donne enfin $\varphi'''_{u^3}(z,u)=0$, puisque l'on a (865)

$$\varphi'''_{u^2,z}(z,u) = \varphi'''_{z,u^2}(z,u).$$

Réciproquement, si, pour $u=1$, les quatre équations

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi'''_{z^3}(z,u)=0, \qquad \varphi'''_{z^2,u}(z,u)=0, \\ \varphi'''_{z,u^2}(z,u)=0, \qquad \varphi'''_{u^3}(z,u)=0, \end{cases}$$

qui correspondent aux dérivées partielles du troisième ordre, ont une racine commune, cette racine est une racine *quadruple* de l'équation $\varphi(z) = 0$.

En effet, elle annule alors les seconds membres des identités (2): par suite, elle annule ceux des deux dernières identités (1), et, finalement, elle annule le second membre de la première de ces identités, c'est-à-dire elle satisfait à l'équation $\varphi(z) = 0$. On a donc à la fois, pour cette racine commune et pour $u = 1$,

$$(\alpha) \quad \varphi(z) = 0, \qquad \varphi'(z) = 0, \qquad \varphi''(z) = 0, \qquad \varphi'''(z) = 0,$$

de sorte qu'elle est bien racine quadruple de la proposée.

On a donc le droit de substituer aux équations (α) les équations (β), nécessairement plus simples.

La loi est évidente. Lorsque l'ordre de la racine multiple croît d'une unité, l'ordre des dérivées partielles que l'emploi des fonctions homogènes conduit à considérer croît aussi d'une unité, en restant immédiatement inférieur à l'ordre de la racine.

En résumé, *toute racine multiple d'ordre* $n+1$ *de l'équation* $\varphi(z) = 0$ *est racine commune des* $n+1$ *équations*

$$\varphi^n_{z^n}(z, u) = 0, \qquad \varphi^n_{z^{n-1}, u}(z, u) = 0, \qquad \varphi^n_{z^{n-2}, u^2}(z, u) = 0, \qquad \ldots,$$
$$\varphi^n_{z, u^{n-1}}(z, u) = 0, \qquad \varphi^n_{u^n}(z, u) = 0,$$

lorsqu'on y fait $u = 1$.

En exprimant que les deux dernières dérivées partielles ont un plus grand commun diviseur du premier degré, on obtient, en égalant à zéro ce plus grand commun diviseur et le reste correspondant, l'expression de la racine multiple cherchée et une première équation de condition. En substituant la valeur trouvée pour la racine multiple dans les $n-1$ *premières équations, on a les* $n-1$ *autres équations de condition.*

Le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation $\varphi(z) = 0$ *admette une racine multiple d'un certain ordre est* donc *toujours inférieur d'une unité à l'ordre de multiplicité de la racine* (**1143**).

1150. Ce qui précède conduit facilement à la *généralisation du théorème des fonctions homogènes.*

Considérons dans le numéro ci-dessus les identités (1).

Multiplions les deux membres de la deuxième par z, les deux membres de la troisième par u, et ajoutons-les membre à membre en tenant compte de la première identité. Nous aurons

$$z^2\,\varphi''_{z^2}(z,u) + 2zu\,\varphi''_{z,u}(z,u) + u^2\,\varphi''_{u^2}(z,u) = m(m-1)\,\varphi(z,u).$$

Considérons de même les identités (2). Multiplions les deux membres de la première par z^2, les deux membres de la deuxième par $2zu$, les deux membres de la troisième par u^2, et ajoutons-les membre à membre en tenant compte du résultat précédent. Il viendra

$$\begin{aligned} z^3\,\varphi'''_{z^3}(z,u) &+ 3z^2u\,\varphi'''_{z^2,u}(z,u) \\ &+ 3zu^2\,\varphi'''_{z,u^2}(z,u) + u^3\,\varphi'''_{u^3}(z,u) \\ &= m(m-1)(m-2)\,\varphi(z,u). \end{aligned}$$

En continuant de la même manière, on voit que, *dans le premier membre de l'identité obtenue, les dérivées partielles de l'ordre auquel on parvient sont multipliées respectivement par les termes correspondants de la puissance égale du binôme* $(z+u)$, *tandis que, dans le second membre, la fonction* $\varphi(z,u)$ *est multipliée par le nombre d'arrangements de* m *objets, qui a pour exposant l'ordre des dérivées partielles.*

On aura ainsi, pour l'ordre n, la formule suivante, qui est l'expression du *théorème des fonctions homogènes généralisé :*

$$\begin{aligned} z^n\,\varphi^n_{z^n}(z,u) &+ nz^{n-1}u\,\varphi^n_{z^{n-1},u}(z,u) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\,z^{n-2}u^2\,\varphi^n_{z^{n-2},u^2}(z,u) + \dots \\ &+ nzu^{n-1}\,\varphi^n_{z,u^{n-1}}(z,u) + u^n\,\varphi^n_{u^n}(z,u) \\ &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\,\varphi(z,u). \end{aligned}$$

CHAPITRE VII.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES DÉRIVÉES DES POLYNOMES.

1151. Nous avons montré précédemment (933 et suiv.) comment le signe de la dérivée d'une fonction *quelconque* d'une seule variable était lié, d'une manière générale, avec la *croissance* et la *décroissance* de cette fonction, supposée réelle ainsi que la variable.

Nous allons rappeler succinctement cette importante propriété, en considérant un polynôme *réel*.

Soit $f(x)$ ce polynôme, à coefficients réels, et admettons que la variable x soit elle-même réelle.

On a, par définition (747),

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Par conséquent, avant de parvenir à la limite qui conduit à la dérivée ou avant de supposer Δx infiniment petit, on doit avoir

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

en désignant par α une certaine quantité, fonction de x et de Δx, qui tend vers zéro en même temps que Δx.

On déduit de là la relation

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x. \tag{1}$$

Supposons que, pour une valeur donnée de x, $f'(x)$ ait une valeur finie et bien déterminée, différente de zéro. Si l'on fait tendre Δx vers zéro, en le prenant pour infiniment petit principal (717), α tendra aussi vers zéro, et le produit $\alpha\Delta x$ disparaîtra devant $f'(x)\,\Delta x$ comme infiniment petit d'ordre su-

périeur (723, 2°). Par conséquent, d'après l'expression (1), l'accroissement $\Delta f(x)$ de la fonction aura le signe du produit $f'(x)\Delta x$ ou le signe de $f'(x)$, *si l'on convient de prendre l'accroissement* Δx *de la variable toujours positif*, c'est-à-dire si l'on convient de faire croître la variable réelle de $-\infty$ à $+\infty$.

Si la dérivée $f'(x)$ est positive, l'accroissement $\Delta f(x)$ est aussi positif, et la fonction va en croissant; si la dérivée $f'(x)$ est négative, l'accroissement $\Delta f(x)$ est aussi négatif, et la fonction va en décroissant.

Ainsi, *un polynôme* $f(x)$, *entier et réel, croît ou décroît à partir d'une valeur déterminée de la variable réelle* x, *supposée croissante, suivant que sa dérivée* $f'(x)$ *est, pour cette même valeur de* x, *positive ou négative.*

La réciproque de cette proposition est évidente.

1152. La dérivée $f'(x)$ est un polynôme entier et réel comme $f(x)$ [735, 795]. Si elle change de signe, en passant d'une valeur positive ou négative à une valeur négative ou positive, elle prend nécessairement la valeur zéro (1052). Pour la valeur correspondante de x, l'accroissement de la fonction $f(x)$ est donc nul, et la valeur de cette fonction demeure stationnaire dans un intervalle infiniment petit (934).

1153. Si, dans le cas d'un polynôme réel, la dérivée est constante (935), la fonction est du premier degré, et elle est alors constamment croissante ou décroissante, suivant que la dérivée constante est positive ou négative.

En effet, si l'on a

$$f'(x) = m \qquad \text{ou} \qquad f'(x)\,dx = m\,dx,$$

il vient, en intégrant (982),

$$f(x) = mx + C.$$

Si m est positif et qu'on fasse croître x de ∞ à $+\infty$, $f(x)$ croît elle-même de $-\infty$ à $+\infty$; si m est négatif, $f(x)$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$.

LIVRE TREIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

DE L'ÉLIMINATION.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLIMINATION PAR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Définitions et notions préliminaires.

1154. On appelle *polynôme entier à plusieurs variables* toute fonction qui est un polynôme par rapport à chaque variable considérée isolément. Tout polynôme à plusieurs variables égalé à zéro est une équation algébrique à plusieurs inconnues.

1155. Il est utile de connaître *le nombre de termes que peut contenir le polynôme le plus général d'un degré donné.*

Considérons d'abord un polynôme *homogène* de degré m, contenant $n+1$ variables

$$z_1,\quad z_2,\quad z_3,\quad \ldots,\quad z_n,\quad u.$$

Si cette fonction est la plus générale possible de son degré, si elle n'est pas *incomplète* par le manque de certains termes, elle devra renfermer tous les termes de la forme (sauf les coefficients constants)

$$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \ldots z_n^{\alpha_n} u^{\alpha_{n+1}},$$

la somme des exposants $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}$ devant toujours être égale à m.

Le nombre total des termes ainsi figurés est alors celui des combinaisons m à m de $n+1$ objets distincts, avec répétition permise de ces objets dans les combinaisons formées (259 et suiv.). Il en résulte que le nombre cherché est celui des combinaisons ordinaires (ou sans répétition) de $n+m$ objets pris m à m (260). On a donc, pour ce nombre,

$$(1) \qquad T = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}.$$

Si, dans le polynôme homogène considéré, on suppose maintenant la dernière variable $u=1$, on obtient le polynôme *non homogène* le plus général de degré m, contenant n variables, *sans que rien soit changé au nombre des termes.* La formule (1) fait donc connaître le nombre des termes du polynôme le plus général de degré m, à n variables.

S'il y a, par exemple, *deux variables*, on a, en faisant $n=2$,

$$T = \frac{3.4.5\ldots(2+m)}{1.2.3\ldots m} = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}.$$

S'il y a *trois variables*, on a, en faisant $n=3$,

$$T = \frac{4.5.6\ldots(3+m)}{1.2.3\ldots m} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

1156. *Lorsqu'un système d'équations algébriques contient autant d'inconnues que d'équations*, le nombre des valeurs associées des inconnues qui satisfont aux équations ou *le nombre des* SOLUTIONS *du système est*, en général, *déterminé.*

Supposons, pour fixer les idées, trois équations *générales* de degrés m, n, p, contenant trois inconnues x, y, z.

Prenons la première. Qu'on puisse ou non la résoudre effectivement par rapport à x, elle doit donner théoriquement pour cette inconnue (1061) m valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$, qui seront fonctions des autres inconnues y et z, regardées comme données. En substituant successivement ces valeurs de x dans les deux autres équations du système, on obtiendra un nouveau système composé de m groupes de deux équations à deux inconnues y et z, l'une de degré n, l'autre de degré p, et l'inconnue x se trouvera théoriquement *éliminée.*

En prenant la première équation de chacun de ces m groupes, laquelle est de degré n, et en la résolvant par rapport à y, z étant regardée comme donnée, on obtiendra chaque fois n valeurs de y, qu'on substituera successivement dans la seconde équation du même groupe, laquelle est de degré p, et l'inconnue y sera théoriquement *éliminée*.

Ayant trouvé mn valeurs de y en fonction de z, on parviendra ainsi à mn équations de degré p ne contenant plus que l'inconnue z. Chacune d'elles donnera théoriquement p valeurs pour z, de sorte que cette inconnue en admettra en tout mnp, c'est-à-dire *un nombre limité* (1). En remontant ensuite de proche en proche, on aura les valeurs correspondantes de y et de x, qui seront en même nombre, puisque les trois inconnues entrent de la même manière dans les équations données. On voit d'ailleurs que, dans chacune des mn valeurs de y en fonction de z, on doit substituer p valeurs de z, ce qui donnera mnp valeurs de y; et que, dans chacune des m valeurs de x en fonction de y et de z, on doit substituer n valeurs de y répondant chacune à p valeurs de z, ce qui donnera mnp valeurs pour x.

Il résulte de ce qui précède que *tout système renfermant autant d'inconnues que d'équations admet, en général, un nombre de solutions égal au produit des degrés des équations proposées.*

C'est, sous une forme un peu différente, le théorème important dû à Bezout, et sur lequel nous reviendrons.

1157. *Lorsqu'on a plus d'inconnues que d'équations, il y a indétermination.*

Car, si l'on a $n+p$ inconnues et n équations, on rentre dans le cas précédent (1156) en attribuant des valeurs arbitraires à p inconnues. Les n autres inconnues seront alors obtenues en fonctions de ces p inconnues, c'est-à-dire qu'elles seront indéterminées comme ces p inconnues elles-mêmes.

---

(1) Les cas d'impossibilité et d'indétermination que nous avons rencontrés en exposant la théorie des équations linéaires (387 et suiv.), *dans l'hypothèse où le nombre des inconnues est égal à celui des équations*, peuvent avoir lieu à plus forte raison pour les équations de degrés supérieurs; mais, seulement, pour les unes comme pour les autres, lorsque les coefficients des équations générales considérées satisfont à certaines relations spéciales.

1158. Enfin, *on peut avoir moins d'inconnues que d'équations,* par exemple, n inconnues et $n + p$ équations.

Dans ce cas, en choisissant n équations, on peut déterminer les n inconnues (1069), et les valeurs de ces inconnues doivent satisfaire aux p équations restantes. Ces équations ne contenant plus alors d'inconnues deviennent des *équations de condition*, c'est-à-dire des équations qui doivent être satisfaites d'elles-mêmes, pour que le système proposé soit *compatible* (*Alg. élém.*).

1159. Si l'on a, par exemple, n équations et $n - 1$ inconnues, il ne peut y avoir de solutions que si les coefficients des équations sont tels, que l'équation obtenue en *éliminant* les $n - 1$ inconnues entre les n équations données se trouve satisfaite d'elle-même.

L'ensemble des procédés employés alors pour arriver à cette *équation de condition* constitue la *méthode d'élimination* suivie; et cette équation elle-même, qui exprime que les équations sur lesquelles on opère sont compatibles, est dite *équation finale* ou *équation résultante*. Son premier membre, lorsque le second est égal à zéro, a été appelé par Bezout le *résultant* ou l'*éliminant* du système proposé.

1160. Soient deux équations du premier degré

$$ax + b = 0, \qquad a'x + b' = 0.$$

En éliminant x par voie d'addition et de soustraction (*Alg. élém.*) entre ces deux équations, on trouve immédiatement pour équation résultante

$$ab' - ba' = 0.$$

Le résultant des deux équations est donc $ab' - ba'$.

En opérant ainsi, on sous-entend que les deux équations sont *simultanées,* c'est-à-dire qu'elles admettent pour x une même valeur.

Ainsi, *l'équation résultante exprime la condition nécessaire pour que les équations dont elle est déduite aient une solution commune.*

Soient encore deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

On commence par éliminer x^2 de la même manière, ce qui conduit à l'équation

$$(ab' - ba')x + ac' - ca' = 0.$$

On en tire

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'};$$

et, en substituant cette valeur dans l'une des équations proposées, il vient, pour résultante du système,

$$(ca' - ac')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb').$$

C'est, comme on le sait (401 et *Alg. élém.*), la condition nécessaire pour que les équations proposées admettent une *racine commune.*

La méthode du plus grand commun diviseur (1079) pourrait être employée; mais elle serait beaucoup plus pénible.

Plus généralement, si l'on a n équations algébriques

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad \ldots,$$

contenant $n - 1$ inconnues, on ne peut les combiner de manière à obtenir une dernière équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots = 0,$$

ne renfermant plus aucune variable, que s'il est entendu que ces variables possèdent les mêmes valeurs dans toutes les équations. *Le résultant d'un système de n équations à n — 1 inconnues est donc une fonction des coefficients de ces équations, qui doit se réduire à zéro lorsqu'elles ont des racines communes, et seulement dans ce cas.*

1161. Ce qu'on vient de dire peut s'appliquer comme il suit, lorsqu'on a *autant d'inconnues que d'équations.*

Soient, par exemple, n équations algébriques et n inconnues $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$. Supposons que les n équations soient satisfaites par le groupe de valeurs

$$z_1 = a_1, \qquad z_2 = a_2, \qquad z_3 = a_3, \qquad \ldots, \qquad z_n = a_n.$$

Si l'on regarde z_1 comme une donnée, on n'aura plus que $n - 1$ inconnues entre n équations. En les éliminant, l'équation finale (1159) à laquelle on parviendra contiendra z_1 et les

coefficients des équations. Mais, lorsqu'on fait $z_1 = a_1$, les équations proposées admettent un système de solutions communes, de sorte que cette équation finale doit être satisfaite par cette même valeur $z_1 = a_1$. Il en résulte que, lorsqu'on élimine $n-1$ inconnues entre n équations qui en contiennent n, l'*équation finale* a précisément pour racines les valeurs de la $n^{\text{ième}}$ inconnue qui, associées avec des valeurs convenables des autres inconnues, forment les systèmes de solutions des équations proposées.

Élimination par les fonctions symétriques. Cas de deux équations à une ou plusieurs inconnues.

1162. Soient d'abord deux équations à une seule inconnue

$$\varphi(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots = 0, \tag{1}$$

$$\psi(z) = z^n + q_1 z^{n-1} + q_2 z^{n-2} + \ldots = 0. \tag{2}$$

Trouver la condition pour que ces deux équations, l'une de degré m, l'autre de degré n, aient une *racine commune*, c'est éliminer z entre les deux équations ou former leur résultant (1159, 1160). Nous y parviendrons de la manière suivante.

Désignons par α, β, γ, ..., les m racines de la première équation, et par α', β', γ', ..., les n racines de la seconde.

Si les équations (1) et (2) ont une racine commune, une certaine racine de l'équation (1) satisfera à l'équation (2), ou une certaine racine de l'équation (2) satisfera à l'équation (1). Supposons le premier cas. L'un des résultats $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, $\psi(\gamma)$, ..., devra être nul, et il en sera de même, par conséquent (93), du produit *de m facteurs*

$$\mathrm{P} = \psi(\alpha).\psi(\beta).\psi(\gamma)\ldots, \tag{3}$$

On a d'ailleurs (1017)

$$\psi(z) = (z-\alpha')(z-\beta')(z-\gamma')\ldots,$$

Le produit P est donc évidemment (1083) une fonction symétrique et entière des racines de l'équation (1) et, par suite, une fonction entière des coefficients de cette équation (1094). De plus, P est aussi une fonction entière et de degré m des coefficients de l'équation (2).

Supposons, inversement, qu'une certaine racine de l'équa-

tion (2) satisfasse à l'équation (1). L'un des résultats $\varphi(\alpha')$, $\varphi(\beta')$, $\varphi(\gamma')$, ..., devra être nul, et il en sera de même, par conséquent, du produit *de n facteurs*

$$Q = \varphi(\alpha').\varphi(\beta').\varphi(\gamma')\ldots, \tag{4}$$

On a d'ailleurs

$$\varphi(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots.$$

Le produit Q est donc, à son tour, une fonction symétrique et entière des racines de l'équation (2) et, par suite, une fonction entière des coefficients de cette équation. De plus, Q est aussi une fonction entière et de degré n des coefficients de l'équation (1).

La condition cherchée sera, d'après ce qui précède, exprimée par l'une ou l'autre des équations résultantes

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

On voit sans peine que les deux *résultants* P et Q sont égaux en valeur absolue et ne peuvent différer que par le signe.

En effet, P revient à

$$(\alpha-\alpha')(\alpha-\beta')(\alpha-\gamma')\ldots(\beta-\alpha')(\beta-\beta')(\beta-\gamma')\ldots \times(\gamma-\alpha')(\gamma-\beta')(\gamma-\gamma')\ldots,$$

et Q n'est autre chose que

$$(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\beta)(\alpha'-\gamma)\ldots(\beta'-\alpha)(\beta'-\beta)(\beta'-\gamma)\ldots \times(\gamma'-\alpha)(\gamma'-\beta)(\gamma'-\gamma)\ldots.$$

De part et d'autre, on a le produit des mn facteurs binômes formés en retranchant de toutes les manières possibles une racine de l'équation (2) d'une racine de l'équation (1), *ou* une racine de l'équation (1) d'une racine de l'équation (2). Les deux produits sont identiques, sauf le signe qui peut différer ou non, suivant que le produit mn des degrés des deux équations est impair ou pair. C'est ce qu'on exprime en posant

$$P = (-1)^{mn}.Q.$$

Ces deux fonctions entières des coefficients des deux équations étant identiques au signe près, il en résulte que P, qui est de degré m par rapport aux coefficients de l'équation (2),

sera, comme Q, de degré n par rapport aux coefficients de l'équation (1), et réciproquement.

Ainsi, dans le résultant P des équations (1) et (2), les degrés des coefficients de ces équations permutent avec ceux de ces équations elles-mêmes. P est de degré m par rapport aux coefficients de l'équation (2) qui est de degré n, et de degré n par rapport aux coefficients de l'équation (1) qui est de degré m.

Remarque. — Il est important de montrer que le *poids* (1084, *Remarque*) du résultant P, exprimé en fonction des coefficients des équations (1) et (2), est égal à mn, c'est-à-dire que, dans chaque terme de P, la somme des indices de ces coefficients est constante et égale à mn.

En effet, si l'on multiplie les racines des équations (1) et (2) par un même facteur λ, chacun des mn binômes dont le produit forme P sera multiplié par λ, de sorte que le résultant le sera par λ^{mn}.

D'ailleurs, pour multiplier les racines de l'équation (1) par λ, il suffit (1103) de remplacer p_1 par λp_1, p_2 par $\lambda^2 p_2$, p_3 par $\lambda^3 p_3$, ...; et, pour multiplier les racines de l'équation (2) par λ, il suffit de remplacer q_1, q_2, q_3, ..., par λq_1, $\lambda^2 q_2$, $\lambda^3 q_3$, ... Les indices répondent donc exactement aux puissances de λ.

Par conséquent, puisque, en opérant ainsi, tous les termes du résultant P se trouvent multipliés par λ^{mn}, c'est que, primitivement, dans chacun de ces termes, la somme des indices était mn.

1163. La méthode pratique à suivre est celle-ci :

On doit former le produit P à l'aide des m facteurs

$$\begin{aligned}
&\psi(\alpha) = \alpha^n + q_1\alpha^{n-1} + q_2\alpha^{n-2} + \dots,\\
&\psi(\beta) = \beta^n + q_1\beta^{n-1} + q_2\beta^{n-2} + \dots,\\
&\psi(\gamma) = \gamma^n + q_1\gamma^{n-1} + q_2\gamma^{n-2} + \dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

qui contiennent les racines de l'équation (1) et les coefficients de l'équation (2); puis, remplacer les fonctions symétriques des racines α, β, γ, ..., que l'opération fait apparaître, en fonction des coefficients de l'équation (1), d'après les résultats obtenus relativement aux fonctions symétriques.

1164. Appliquons cette marche aux deux équations du second degré

$$z^2+p_1z+p_2=0, \qquad z^2+q_1z+q_2=0.$$

En désignant par α et β les racines de la première, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=(\alpha^2+q_1\alpha+q_2)(\beta^2+q_1\beta+q_2)\\&=\alpha^2\beta^2+q_1\alpha\beta(\alpha+\beta)+q_2(\alpha^2+\beta^2)+q_1^2\alpha\beta+q_1q_2(\alpha+\beta)+q_2^2.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs (1096)

$$\alpha+\beta=-p_1, \qquad \alpha\beta=p_2, \qquad \alpha^2+\beta^2=p_1^2-2p_2.$$

Par suite, on a, en substituant et en rapprochant les termes,

$$\mathrm{P}=(p_2-q_2)^2-(p_1-q_1)(p_2q_1-p_1q_2),$$

résultat qui concorde avec celui du n° 1160, quand on suppose dans ce dernier $a=a'=1$.

1165. Si les équations (1) et (2) étaient de la forme

$$(1) \qquad \varphi(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\ldots+a_m=0,$$

$$(2) \qquad \psi(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\ldots+b_n=0,$$

on diviserait respectivement les deux membres de chacune d'elles par a_0 et b_0 pour ramener à l'unité les coefficients de leurs premiers termes. On aurait ainsi, en se reportant au n° 1162,

$$p_1=\frac{a_1}{a_0}, \qquad p_2=\frac{a_2}{a_0}, \qquad p_3=\frac{a_3}{a_0}, \qquad \ldots,$$

$$q_1=\frac{b_1}{b_0}, \qquad q_2=\frac{b_2}{b_0}, \qquad q_3=\frac{b_3}{b_0}, \qquad \ldots,$$

et il suffirait de substituer ces valeurs dans l'expression trouvée pour P, quand les premiers termes des deux équations ont pour coefficients l'unité.

Comme P est (1162) du degré m par rapport aux coefficients de l'équation (2) et du degré n par rapport aux coefficients de l'équation (1), on fera disparaître tous les dénominateurs en multipliant P par le produit $a_0^nb_0^m$. *Le nouveau résultant*

$$\mathrm{R}=a_0^nb_0^m\mathrm{P}$$

sera alors une fonction entière et homogène, du degré n par rapport aux coefficients de l'équation (1), *et du degré m par rapport aux coefficients de l'équation* (2).

D'une manière générale, la condition pour que les équations (1) et (2) aient *au moins* une racine commune est $R = 0$.

1166. Dans le cas de deux équations du second degré que nous venons d'examiner (1164), les deux équations étant prises sous la forme

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0,$$

on aura

$$R = a_0^2 b_0^2 P = a_0^2 b_0^2 \left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{b_2}{b_0}\right]^2 - a_0^2 b_0^2 \left[\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}\right]\left[\frac{a_2}{a_0}\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}\frac{b_2}{b_0}\right],$$

c'est-à-dire (1160)

$$R = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

1167. Le résultant R jouit de propriétés qu'il est utile de signaler.

Il ne change pas quand on diminue d'une même quantité h les racines des deux équations considérées (1165); car, les différences de ces racines n'étant pas modifiées, il en est de même des valeurs de P et de Q (1162). On peut donc remplacer z par $z + h$ (1107) dans les équations proposées, sans altérer leur résultant ou leur équation finale.

Le résultant R est multiplié par $(-1)^{mn}$, lorsqu'on remplace les équations données par leurs transformées en $\frac{1}{z}$ (1113).

En effet, au lieu de la différence $\alpha - \alpha'$ entre deux des racines des équations traitées, on a à considérer la différence

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\alpha'}.$$

Cela posé, si les équations sont de la forme indiquée au n° 1165, elles ont pour résultant

$$R = a_0^n b_0^m P.$$

Après leur transformation, le nouveau résultant sera évidemment

$$R' = a_m^n b_n^m P',$$

P' représentant le produit des nouvelles différences

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\alpha'}\,\frac{\beta' - \alpha}{\alpha\beta'}\,\frac{\gamma' - \alpha}{\alpha\gamma'} \cdots \frac{\alpha' - \beta}{\beta\alpha'}\,\frac{\beta' - \beta}{\beta\beta'}\,\frac{\gamma' - \beta}{\beta\gamma'} \cdots \frac{\alpha' - \gamma}{\gamma\alpha'}\,\frac{\beta' - \gamma}{\gamma\beta'}\,\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma\gamma'} \cdots,$$

c'est-à-dire (1162)

$$\frac{Q}{(\alpha\beta\gamma\ldots)^n(\alpha'\beta'\gamma'\ldots)^m}.$$

Mais on a (1080)

$$(\alpha\beta\gamma\ldots)^n=(-1)^{mn}\left(\frac{a_m}{a_0}\right)^n, \qquad (\alpha'\beta'\gamma'\ldots)^m=(-1)^{nm}\left(\frac{b_n}{b_0}\right)^m$$

et (1162)

$$Q=\frac{P}{(-1)^{mn}}.$$

Il en résulte

$$R'=a_m^n b_n^m \frac{P}{(-1)^{mn}} \frac{1}{(-1)^{2mn}} \frac{a_0^n b_0^m}{a_m^n b_n^m}.$$

La valeur de R′ aura le signe + ou le signe —, en supposant a_0 et b_0 positifs, suivant que l'un des degrés m, n sera ou non pair. On a donc, en simplifiant,

$$R'=(-1)^{mn}a_0^n b_0^m P=(-1)^{mn}R.$$

Le nouveau résultant ne peut donc différer que par le signe du résultant primitif, de sorte que l'équation finale reste la même.

1168. Au lieu de deux équations à une inconnue, on peut avoir deux équations à deux inconnues z et u. On doit alors procéder comme il a été dit au n° **1161**.

Les deux équations seront encore de la forme (1165)

$$(1) \qquad a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

$$(2) \qquad b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0.$$

Seulement, les coefficients a_0, a_2, a_3, ..., a_m sont ici des polynômes en u dont les degrés respectifs ne peuvent surpasser 0, 1, 2, ..., m, puisque l'équation (1) est supposée de degré m (1155); de même, les coefficients b_0, b_1, b_2, ..., b_n sont des polynômes en u dont les degrés respectifs ne peuvent surpasser 0, 1, 2, ..., n, puisque l'équation (2) est supposée de degré n.

Si l'on regarde u comme donnée, on n'a plus qu'une inconnue z et deux équations, et l'on peut opérer comme précédemment (1163). L'équation finale obtenue sera donc du

degré m par rapport aux coefficients de l'équation (2), qui sont au plus du degré n par rapport à u, et du degré n par rapport aux coefficients de l'équation (1), qui sont au plus du degré m par rapport à u. D'ailleurs (1162, *Remarque*), le poids du premier membre de cette équation finale est mn, c'est-à-dire que, dans chaque terme, la somme des indices des coefficients des équations (1) et (2) est constante et égale à mn; et cette somme répond précisément au degré *possible* de l'inconnue u dans chaque terme.

Il en résulte que l'équation finale obtenue sera *au plus* du degré mn par rapport à la seconde inconnue u.

Nous disons *au plus,* parce que l'abaissement du degré de cette équation finale peut toujours se produire par suite de réduction de termes. Mais, *si les équations considérées sont générales,* il ne peut y avoir de réduction, et *le degré de l'équation finale est exactement mn.*

Pour chacune des valeurs de u, les équations (1) et (2) auront une racine commune en z, qu'on pourra déterminer, puisque les deux équations ne renfermeront plus que z (1125); et l'on trouvera ainsi les valeurs de z, associées en général en même nombre aux valeurs de u.

En résumé, *dans le cas de deux équations à deux inconnues, le degré de l'équation finale ne peut pas surpasser le produit des degrés des équations données; et il est égal à ce produit lorsque les coefficients des deux équations, supposées générales, demeurent indéterminés.*

C'est le cas le plus simple du théorème dû à Bezout (1156), et qui est le principe fondamental de toute théorie de l'élimination.

1169. Soient, par exemple, les deux équations *incomplètes* du troisième degré

$$(1) \qquad (u-2)z^2 - 3z + 7u - 3 = 0,$$

$$(2) \qquad 2uz^2 - 5z + 4u - 1 = 0.$$

En regardant u comme donnée, désignons par α' et β' les racines de l'équation (2) et substituons-les successivement dans l'équation (1). En multipliant membre à membre les deux résultats, nous aurons l'équation finale (1163, 1165)

$$[(u-2)\alpha'^2 - 3\alpha' + 7u - 3][(u-2)\beta'^2 - 3\beta' + 7u - 3] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(u-2)^2\alpha'^2\beta'^2-3(u-2)(\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2)+(7u-3)(u-2)(\alpha'^2+\beta'^2)$$
$$+9\alpha'\beta'-3(7u-3)(\alpha'+\beta')+(7u-3)^2=0.$$

On a d'ailleurs, d'après l'équation (2),

$$\alpha'+\beta'=\frac{5}{2u},\qquad \alpha'\beta'=\frac{4u-1}{2u}.$$

Il en résulte, sans avoir besoin de recourir aux formules des fonctions symétriques (1084, 1087),

$$\alpha'^2+\beta'^2=[(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta']=\frac{25}{4u^2}-\frac{4u-1}{u}=\frac{25-16u^2+4u}{4u^2},$$

$$\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2=\alpha'\beta'(\alpha'+\beta')=\frac{20u-5}{4u^2}.$$

En substituant et en chassant les dénominateurs, l'équation finale devient donc, après simplifications,

$$100u^4+60u^3-54u^2-230u+124=0.$$

Cette équation admet, on le voit, la racine 1. Cette valeur de u doit assurer une racine commune aux équations (1) et (2), qui deviennent du second degré en z et qui sont alors

$$-z^2-3z+4=0,\qquad 2z^2-5z+3=0.$$

On voit immédiatement que cette racine commune est aussi égale à 1, et l'on a ainsi, pour les équations données, un premier groupe de solutions communes.

Si l'on débarrasse l'équation finale en u de sa racine égale à 1, il restera, pour obtenir les trois autres groupes de solutions communes, à résoudre l'équation du troisième degré

$$100u^3+160u^2+106u-124=0.$$

1170. Ce qui précède peut s'appliquer identiquement au cas où les deux équations données, au lieu de ne renfermer que deux variables z et u, en renferment un nombre quelconque z, u, v, w, ... Les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2, ..., au lieu de dépendre seulement de u, dépendent des variables u, v, w, ..., et il en est de même de l'équation finale. Quant au théorème de Bezout relatif à son degré, il n'est pas modifié, parce que le degré le plus élevé des coefficients par rapport aux variables qu'ils contiennent reste toujours le même, qu'il y en ait une seule ou plusieurs.

Fonctions symétriques et rationnelles des groupes de solutions communes à plusieurs équations.

1171. Soient d'abord les deux équations à deux inconnues

$$\varphi(z, u) = 0, \qquad \psi(z, u) = 0.$$

Nous supposons que ce sont des équations *générales*, c'est-à-dire dont les coefficients demeurent indéterminés ou ne sont soumis à aucune relation particulière. On peut représenter par

$$(z_1, u_1), \quad (z_2, u_2), \quad \ldots, \quad (z_n, u_n)$$

leurs systèmes de solutions communes, en admettant que le nombre de ces systèmes soit égal à n, et l'on nomme *fonction symétrique de ces solutions communes* toute fonction qui demeure invariable quand on y permute ces groupes de solutions.

En se reportant aux remarques faites au sujet des fonctions symétriques des racines d'une équation à une seule inconnue (1083), on voit immédiatement que la recherche d'une fonction symétrique et rationnelle des solutions communes à deux équations à deux inconnues peut toujours se ramener à celle de fonctions symétriques, entières et homogènes, dont les termes varient par les indices des lettres qui y entrent et non par les exposants de ces lettres. Une pareille fonction sera donc définie, quand on donnera un seul de ses termes, ainsi que toutes les lettres considérées.

La fonction symétrique est simple ou du premier ordre, quand ses termes ne renferment respectivement que les lettres d'un seul groupe de solutions communes. La forme générale des fonctions symétriques simples est donc

$$z_1^p u_1^q + z_2^p u_2^q + \ldots + z_n^p u_n^q,$$

et on peut les représenter par la notation

$$\Sigma z_1^p u_1^q.$$

La fonction symétrique est double ou du deuxième ordre, quand ses termes renferment respectivement les lettres de deux groupes de solutions communes. La forme générale des

fonctions symétriques doubles est donc

$$z_1^p u_1^q z_2^{p'} u_2^{q'} + z_1^p u_1^q z_3^{p'} u_3^{q'} + \ldots + z_n^p u_n^q z_{n-1}^{p'} u_{n-1}^{q'},$$

et on peut les représenter par la notation

$$\Sigma z_1^p u_1^q z_2^{p'} u_2^{q'}.$$

On continuera de la même manière.

1172. En partant des deux équations

$$\varphi(z, u) = 0, \qquad \psi(z, u) = 0,$$

nous allons appliquer la méthode indiquée par Poisson (1) au calcul de la fonction symétrique simple

$$\Sigma z_1^p u_1^q.$$

Désignons par t une nouvelle inconnue, par λ une indéterminée, et posons

$$(1) \qquad t = z + \lambda u, \qquad \text{d'où} \qquad z = t - \lambda u.$$

En substituant cette valeur de z dans les équations données, elles deviennent

$$\varphi(t - \lambda u, u) = 0, \qquad \psi(t - \lambda u, u) = 0.$$

En éliminant alors u entre ces nouvelles équations, on parvient à une équation finale en t, qui est

$$(2) \qquad \chi(t, \lambda) = 0.$$

D'après la valeur de t et les groupes de solutions communes supposées (1130), les racines de cette équation sont

$$z_1 + \lambda u_1, \quad z_2 + \lambda u_2, \quad \ldots, \quad z_n + \lambda u_n,$$

de sorte que son degré est égal à n.

Nous avons démontré (1084) que les sommes S des puissances semblables des racines de l'équation (2) sont des fonctions rationnelles des coefficients de cette équation, c'est-à-dire des coefficients des équations proposées et de l'indéterminée λ. On peut donc, en représentant par μ un exposant entier quelconque, et par M_0, M_1, M_2, ..., des fonctions ra-

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, XI^e^ Cahier.

tionnelles des coefficients des équations données [qu'on déduira de l'équation (2) d'après les formules du n° 1084] et en ordonnant par rapport à λ, poser à la fois

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} S_\mu &= (z_1+\lambda u_1)^\mu + (z_2+\lambda u_2)^\mu + \ldots + (z_n+\lambda u_n)^\mu \\ &= M_0 + M_1\lambda + M_2\lambda^2 + \ldots + M_\mu\lambda^\mu. \end{aligned}\right.$$

La dernière équation, ayant lieu quel que soit λ, est une identité (1067), et les coefficients des mêmes puissances de λ sont égaux dans les deux membres. En se reportant à la formule du binôme, on a ainsi les relations suivantes :

$$z_1^\mu + z_2^\mu + z_3^\mu + \ldots + z_n^\mu = M_0,$$

$$\frac{\mu}{1}(z_1^{\mu-1}u_1 + z_2^{\mu-1}u_2 + \ldots + z_n^{\mu-1}u_n) = M_1,$$

$$\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(z_1^{\mu-2}u_1^2 + z_2^{\mu-2}u_2^2 + \ldots + z_n^{\mu-2}u_n^2) = M_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{\mu}{1}(z_1u_1^{\mu-1} + z_2u_2^{\mu-1} + \ldots + z_nu_n^{\mu-1}) = M_{\mu-1},$$

$$u_1^\mu + u_2^\mu + u_3^\mu + \ldots + u_n^\mu = M_\mu.$$

Ces équations permettent, en isolant les parenthèses des premiers membres, de calculer les fonctions symétriques simples $\Sigma z_1^p u_1^q$ (1171), de degré $p+q=\mu$, p et q variant de o à μ, en restant *complémentaires* (251) par rapport à μ.

1173. Quant au calcul des fonctions symétriques d'ordre supérieur des groupes de solutions communes des deux équations proposées, il s'effectuera comme dans le cas des fonctions symétriques ordinaires (1087 et suiv.).

Cherchons, par exemple, la valeur de la fonction symétrique double

$$\Sigma z_1^p u_1^q z_2^{p'} u_2^{q'}.$$

Prenons les deux fonctions simples

$$\Sigma z_1^p u_1^q = z_1^p u_1^q + z_2^p u_2^q + z_3^p u_3^q + \ldots + z_n^p u_n^q,$$
$$\Sigma z_1^{p'} u_1^{q'} = z_1^{p'} u_1^{q'} + z_2^{p'} u_2^{q'} + z_3^{p'} u_3^{p'} + \ldots + z_n^{p'} u_n^{q'}.$$

En les multipliant l'une par l'autre, on a évidemment

$$\Sigma z_1^p u_1^q \Sigma z_1^{p'} u_1^{q'} = \Sigma z_1^{p+p'} u_1^{q+q'} + \Sigma z_1^p u_1^q z_2^{p'} u_2^{q'};$$

d'où l'on déduit, pour la fonction symétrique double cherchée,

$$\Sigma z_1^p u_1^q z_2^{p'} u_2^{q'} = \Sigma z_1^p u_1^q \Sigma z_1^{p'} u_1^{q'} - \Sigma z_1^{p+p'} u_1^{q+q'}.$$

Il est clair (1087) que, si l'on avait à la fois $p = p'$ et $q = q'$, il faudrait diviser par 2 le résultat précédent.

Les fonctions symétriques triples, quadruples, etc., se calculeront de la même manière, à l'aide des fonctions symétriques d'ordre inférieur.

1174. Il résulte de là (1172) que les fonctions symétriques et rationnelles des groupes de solutions communes à deux équations à deux inconnues sont des fonctions rationnelles des coefficients de ces équations. De plus, leur détermination est assurée par la simple élimination d'une inconnue entre deux équations; car tout revient à trouver l'équation finale $\chi(t, \lambda) = 0$, qui provient elle-même de l'élimination de u entre les deux équations $\varphi(t - \lambda u, u) = 0$ et $\psi(t - \lambda u, u) = 0$ (1168).

1175. La même marche peut être suivie pour un nombre quelconque d'équations contenant le même nombre d'inconnues en augmentant le nombre des indéterminées introduites, toujours inférieur d'une unité à celui des équations.

Si l'on a, par exemple, trois équations à trois inconnues

$$\varphi(z, u, v) = 0, \qquad \Phi(z, u, v) = 0, \qquad \psi(z, u, v) = 0,$$

et n groupes de solutions communes

$$(z_1, u_1, v_1), \quad (z_2, u_2, v_2), \quad \ldots, \quad (z_n, u_n, v_n),$$

on posera, en désignant par t une nouvelle inconnue et par λ et θ deux indéterminées,

(1) $\qquad t = z + \lambda u + \theta v, \qquad$ d'où $\qquad z = t - \lambda u - \theta v.$

En substituant cette valeur de z dans les équations données, on aura trois nouvelles équations

$$\varphi(t - \lambda u - \theta v, u, v) = 0,$$
$$\Phi(t - \lambda u - \theta v, u, v) = 0,$$
$$\psi(t - \lambda u - \theta v, u, v) = 0,$$

entre lesquelles on pourra éliminer u et v. On parviendra ainsi

à une équation finale en t, qui sera

$$\chi(t, \lambda, \theta) = 0. \tag{2}$$

Les racines de cette équation seront, d'après la valeur de t et les groupes de solutions communes supposées,

$$z_1 + \lambda u_1 + \theta v_1, \quad z_2 + \lambda u_2 + \theta v_2, \quad \ldots, \quad z_n + \lambda u_n + \theta v_n,$$

c'est-à-dire qu'elle sera de degré n.

Nous remarquerons alors, comme précédemment (1075), que les sommes S des puissances semblables des racines de l'équation (2) sont des fonctions rationnelles des coefficients de cette équation, c'est-à-dire des coefficients des équations proposées et des indéterminées λ et θ. On peut donc les exprimer, à l'aide des formules du n° 1084, en fonction des coefficients des équations considérées et en ordonnant suivant les puissances des indéterminées λ et θ.

D'autre part et en désignant par μ, pour fixer les idées, un exposant entier quelconque, on a

$$\begin{aligned} S_\mu = {} & (z_1 + \lambda u_1 + \theta v_1)^\mu \\ & + (z_2 + \lambda u_2 + \theta v_2)^\mu + \ldots + (z_n + \lambda u_n + \theta v_n)^\mu. \end{aligned}$$

Nous devrons donc nous reporter ici à la formule qui donne le développement de la puissance d'un polynôme (296 et suiv.). On développera suivant cette formule les termes du second membre de la relation précédente, et l'on ordonnera ensuite le résultat suivant les puissances des indéterminées λ et θ. Il ne restera plus qu'à identifier cette valeur de S_μ avec celle qui résulte de l'équation (2) et des formules rappelées plus haut, en égalant les coefficients des termes qui contiennent les mêmes puissances des indéterminées.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, des termes en $\lambda^q \theta^r$. Nous désignerons par $M_{q,r}$ le coefficient du terme correspondant dans la seconde valeur de S_μ, et nous aurons d'une manière générale (297), en posant $\mu = p + q + r$, d'où $p = \mu - q - r$,

$$\sum \frac{\mu!}{p!\, q!\, r!} z_1^p u_1^q v_1^r = M_{q,r}.$$

C'est cette formule, qu'on peut écrire

$$\Sigma z_1^p u_1^q v_1^r = \frac{p!\, q!\, r!}{\mu!} M_{q,r},$$

qui permettra de calculer les fonctions symétriques simples des solutions communes des trois équations données.

On doit toujours avoir $q + r \leqq \mu$ et, si $p = 0$, on doit remplacer $p!$ par 1 (298).

1176. Pour obtenir les valeurs des fonctions doubles, qui sont ici de la forme

$$\Sigma z_1^p u_1^q v_1^r z_2^{p'} u_2^{q'} v_2^{r'},$$

on opérera comme dans le cas de deux équations, et l'on vérifiera que ces fonctions doubles dépendent encore des fonctions symétriques simples, etc.

On peut donc dire, d'une manière générale, que les fonctions symétriques et rationnelles des groupes de solutions communes à plusieurs équations sont des fonctions rationnelles des coefficients de ces équations. C'est là le point que nous voulions établir.

Extension de la méthode d'élimination par les fonctions symétriques à un nombre quelconque d'équations.

1177. Considérons, avec Poisson (*loc. cit.*), quatre équations à quatre inconnues

$$(A) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = 0, \\ \Phi(x, y, z, u) = 0, \\ \psi(x, y, z, u) = 0, \\ \Psi(x, y, z, u) = 0. \end{cases}$$

Nous supposons que ces équations sont les plus générales des degrés correspondants, que nous désignerons par a, b, c pour les trois premières, et par m pour la quatrième. Elles sont donc *complètes*, c'est-à-dire que les inconnues y entrent toutes de la même manière. De plus, les coefficients de ces équations sont indéterminés ou indépendants, c'est-à-dire ne sont liés par aucune relation spéciale.

Considérons les trois premières équations du système (A) et admettons qu'on puisse éliminer successivement entre ces trois équations z et y, z et x, y et x. Nous obtiendrons trois nouvelles équations *qui seront toutes les trois de même degré*. En effet, les équations proposées étant générales, tout y est

identique par rapport aux quatre inconnues, de sorte que l'élimination de deux inconnues quelconques entre les trois premières équations doit donner, par rapport aux autres inconnues, des résultats de même degré. Nous désignerons par n ce degré commun.

Les trois équations générales de degré n, ainsi trouvées, remplaceront les trois premières du système (A) et formeront, avec la quatrième équation de ce système, un système équivalent. La première de ces équations générales contient x et u; la deuxième, y et u; la troisième, z et u. En regardant u comme donnée, admettons qu'on puisse les résoudre. Elles donneront, en fonction de u, n systèmes de valeurs pour x, y, z; et, en assemblant convenablement ces valeurs, on aura les n groupes de solutions communes aux trois premières équations

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, z_n).$$

En substituant chacun de ces groupes dans la quatrième équation du système, on aura des résultats de la forme

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, u), \quad \Psi(x_2, y_2, z_2, u), \quad \ldots, \quad \Psi(x_n, y_n, z_n, u).$$

Si V représente le produit de tous ces résultats, il est clair (1162) que

$$V = \Psi(x_1, y_1, z_1, u)\,\Psi(x_2, y_2, z_2, u)\ldots\Psi(x_n, y_n, z_n, u)$$

est le *résultant* obtenu par l'élimination de x, y, z, entre les quatre équations données, et que

$$V = 0$$

est l'*équation finale* correspondante. En effet, toute valeur de u, qui rend nul l'un des facteurs de V ou V lui-même, satisfait aux équations proposées en même temps que le groupe de valeurs de x, y, z, qui entre dans le même facteur; et, réciproquement, toute valeur de u qui satisfait aux équations proposées doit rendre nul l'un des facteurs de V ou V lui-même.

Tout est ramené, par conséquent, à la formation de l'équation finale à laquelle on parvient par l'élimination de x, y, z, entre les quatre équations données.

Or, V, étant évidemment une fonction symétrique et entière des solutions communes aux trois premières équations

du système, est aussi (1176) une fonction rationnelle des coefficients de ces équations; et, pour calculer les diverses fonctions symétriques des solutions communes aux trois premières équations, qui entrent dans V, on pourra employer le même procédé que précédemment (1175, 1172). λ et θ étant des indéterminées, on posera encore

$$(1) \qquad t = x + \lambda y + \theta z, \qquad \text{d'où} \qquad x = t - \lambda y - \theta z.$$

En substituant cette valeur de x dans les trois premières équations du système (A), elles deviennent

$$\varphi(t - \lambda y - \theta z, y, z, u) = 0,$$
$$\Phi(t - \lambda y - \theta z, y, z, u) = 0,$$
$$\psi(t - \lambda y - \theta z, y, z, u) = 0,$$

sans que leur degré soit modifié. Si l'on élimine y et z entre ces trois nouvelles équations, l'équation finale en t et en u à laquelle on parviendra sera donc encore du degré n, aussi bien par rapport à u que par rapport à t. Représentons cette équation finale par

$$(2) \qquad \chi(t, \lambda, \theta, u) = 0.$$

D'après la valeur (1) de t, les n racines de cette équation sont, en supposant u donnée,

$$x_1 + \lambda y_1 + \theta z_1, \quad x_2 + \lambda y_2 + \theta z_2, \quad \ldots, \quad x_n + \lambda y_n + \theta z_n.$$

Supposons l'équation (2) formée, et ordonnons son premier membre par rapport aux puissances décroissantes de t. Nous aurons ainsi

$$(3) \qquad t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \ldots + p_{n-1} t + p_n = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont des fonctions rationnelles de u et des indéterminées λ et θ, et les sommes de puissances semblables de ses racines pourront s'exprimer rationnellement en fonction de ces mêmes coefficients (1084). On pourra, par suite, en égalant les coefficients des termes qui, dans ces expressions et dans les développements *directs* des sommes considérées (1175), renferment les mêmes puissances des indéterminées λ et θ, calculer les diverses fonctions symétriques des solutions communes aux trois premières équations du système, qui entrent dans V, et déterminer

ainsi l'équation finale $V = 0$, qui ne contiendra plus que l'inconnue u.

1178. On voit que la méthode qu'on vient d'exposer permet d'éliminer trois inconnues entre quatre équations, quand on sait éliminer deux inconnues entre trois équations et, par conséquent, une inconnue entre deux équations. D'une manière générale, elle permet d'éliminer $n-1$ inconnues entre n équations, quand on sait en éliminer $n-2$ entre $n-1$ équations, de sorte qu'elle ramène tous les cas à l'élimination d'une inconnue entre deux équations.

1179. On doit remarquer que la méthode d'élimination par les fonctions symétriques conduit à une équation finale qui ne présente aucun facteur inutile. Cette résultante est, par suite, la véritable équation finale, *sans solution étrangère*. En outre, elle n'exige, pour être formée, la résolution effective d'aucune équation, de sorte que l'on peut toujours parvenir au résultat cherché.

La méthode dont il s'agit offre donc, au point de vue abstrait, la solution la plus directe et la plus satisfaisante du problème de l'élimination. Mais la longueur des calculs qu'il faut effectuer la rend, le plus souvent, impraticable au point de vue pratique. On a donc dû chercher d'autres procédés, inférieurs théoriquement, mais d'une application moins pénible.

Degré de l'équation finale, théorème de Bézout.

1180. Conservons les mêmes notations et faisons les mêmes hypothèses qu'au n° 1177. Nous démontrerons d'abord cette proposition :

Si n est le degré de l'équation finale en t et si m est le degré de la quatrième équation du système (A), *le degré de l'équation finale en u, $V = 0$, est égal au produit mn de ces deux degrés.*

La quatrième équation du système (A), ordonnée par rapport à u, est de la forme

$$(4) \qquad u^m + P_1 u^{m-1} + P_2 u^{m-2} + \ldots + P_{m-1} u + P'_m = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$, représentant des polynômes en x, y, z, qui

sont, respectivement, les plus généraux du premier, du deuxième, ..., du $m^{\text{ième}}$ degré (1155).

Le premier membre de l'équation $V = 0$ est le produit de n facteurs identiques au premier membre de l'équation (4), sauf la substitution des n groupes de solutions communes aux trois premières équations du système (A),

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2) \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, z_n),$$

à la place de x, y, z. Le premier terme de V sera donc u^{mn}; et, dans tous les autres termes, la somme des exposants de u et des valeurs particulières de x, y, z ne dépassera pas mn. Mais les coefficients des différentes puissances de u dans V sont des fonctions symétriques des groupes de solutions communes (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., lesquels dépendent de u. Pour déterminer le degré de l'équation $V = 0$ par rapport à u, il faut donc chercher quel est le degré des différentes fonctions symétriques des groupes de solutions communes par rapport à la même inconnue.

Pour cela, reprenons l'équation finale en t

$$t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \ldots + p_{n-1} t + p_n = 0. \tag{3}$$

Comme elle est aussi du degré n par rapport à u (1177), les coefficients p_1, p_2, ..., p_n sont respectivement du premier, du deuxième, etc., du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à u.

Or, si l'on considère la somme des puissances semblables de degré μ des racines de l'équation (3), qu'on peut représenter par

$$\sum (x_1 + \lambda y_1 + \theta z_1)^\mu,$$

elle s'exprimera sous forme entière, en fonction des coefficients p_1, p_2, p_3, ..., par une formule dont les différents termes ne pourront contenir u à une puissance supérieure à μ; car, en se reportant aux formules de Newton (1084), on vérifie que, dans chaque terme de S_μ, la somme des produits des indices des lettres p par leurs exposants est toujours égale à μ. Tel sera donc aussi le degré le plus élevé de S_μ par rapport à u, et celui de la fonction symétrique simple correspondante (1175)

$$\sum x_1^\alpha y_1^\beta z_1^\gamma,$$

pour laquelle on a $\alpha + \beta + \gamma = \mu$.

Les fonctions symétriques d'ordre supérieur des solutions communes considérées, se formant directement à l'aide des fonctions symétriques simples (1173), satisferont à la même condition ; c'est-à-dire que, si une fonction symétrique d'ordre supérieur est de degré μ, ses différents termes ne peuvent contenir u à une puissance plus élevée que μ.

Or, si un terme de V renferme explicitement u à la puissance k, le coefficient de u^k sera une fonction symétrique des solutions communes aux trois premières équations du système (A) dont le degré, d'après ce qui précède, devra être égal à $mn - k$, c'est-à-dire dont aucun terme ne pourra contenir u à une puissance plus élevée. Par conséquent, l'exposant de u dans les différents termes de V, en dehors du premier terme u^{mn}, ne pouvant surpasser mn, l'équation finale $V = 0$ est exactement du degré mn.

1181. En appliquant les mêmes raisonnements à un nombre quelconque K d'équations complètes à K inconnues, on voit d'une manière générale que, si n est le degré de l'équation finale en t qui répond aux $K - 1$ premières équations, et si m est le degré de la dernière équation du système, le degré de l'équation finale, résultante du système, est égal à mn.

1182. Le théorème de Bézout sur le degré de l'équation finale dans le cas le plus général découle immédiatement de cette proposition préliminaire.

Théorème de Bezout. — *Le degré de l'équation finale qu'on obtient par l'élimination de $n - 1$ inconnues entre n équations complètes est égal au produit des degrés respectifs des n équations données* (1156).

Supposons que les degrés de ces équations soient

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots, \quad m_n.$$

En éliminant une inconnue entre les deux premières équations, l'équation finale obtenue sera, comme on l'a démontré (1168, 1170), de degré $m_1 m_2$. Si l'on élimine deux inconnues entre les trois premières équations, il résulte de ce qui précède (1181) que le degré de l'équation finale obtenue sera égal au produit du degré de l'équation finale qui répond aux deux premières équations par le degré de la troisième équa-

tion, c'est-à-dire égal à $m_1 m_2 \times m_3$ ou à $m_1 m_2 m_3$. Si l'on élimine trois inconnues entre les quatre premières équations, le degré de l'équation finale obtenue sera, pour la même raison (1181), égal à $m_1 m_2 m_3 \times m_4$ ou à $m_1 m_2 m_3 m_4$. En continuant de proche en proche, on voit que le degré de l'équation finale obtenue après l'élimination de $n-1$ inconnues sera, par rapport à la $n^{\text{ième}}$ inconnue, égal au produit $m_1 m_2 m_3 m_4 \ldots m_n$ des degrés des n équations données.

Ce résultat, auquel conduit la première méthode d'élimination, devient un criterium important pour les autres méthodes, en permettant de vérifier si elles introduisent ou non des solutions étrangères.

1183. Nous avons supposé jusqu'à présent que les équations proposées étaient les plus générales de leur degré et que leurs coefficients étaient indéterminés. Quand il n'en est pas ainsi, les plus hautes puissances de l'inconnue dans l'équation finale peuvent avoir des coefficients nuls, en raison des valeurs particulières attribuées aux coefficients des équations considérées, de sorte que le degré de l'équation finale n'est plus alors égal au produit des degrés de ces équations; mais, dans ce cas, il est toujours inférieur.

CHAPITRE II.

ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

Remarques préliminaires.

1184. Toutes les méthodes d'élimination ramenant nécessairement la question (1178) à l'élimination d'une inconnue entre deux équations, nous devons considérer spécialement le cas de deux équations à deux inconnues. Pour les résoudre, il faut trouver tous les systèmes de valeurs des deux inconnues qui satisfont aux équations données et, pour cela, déterminer l'équation finale qui résulte de l'élimination de l'une des inconnues entre les deux équations. La méthode d'élimination est regardée comme *parfaite*, lorsque l'équation finale obtenue a pour racines toutes les valeurs admissibles de l'inconnue qu'elle renferme, sans complication d'aucune solution étrangère (1182).

1185. Avant d'indiquer successivement les méthodes qu'on peut préférer à celle des fonctions symétriques (1168), il n'est pas inutile de rappeler des procédés déjà connus et souvent applicables.

Soient les deux équations

$$(1) \qquad \varphi(z, u) = 0,$$

$$(2) \qquad \psi(z, u) = 0.$$

Admettons qu'on puisse résoudre l'une des équations par rapport à l'une des inconnues. On pourra alors opérer directement *par substitution* (*Alg. élém.*,).

Si, de l'équation (2), on peut tirer

$$z = f(u),$$

on n'aura qu'à mettre cette valeur à la place de z dans l'équation (1), pour obtenir l'équation finale qui fera connaître exactement (1161) toutes les valeurs de u et, par suite, toutes celles de z.

Les valeurs de u et de z qu'on doit associer sont d'ailleurs celles qui vérifient *ensemble* les équations (1) et (2).

1186. Lorsque les deux équations données sont *de même degré* par rapport à l'inconnue qu'on veut éliminer, on a intérêt à remplacer l'une de ces équations par celle qui résulte de leur soustraction (*Alg. élém.*), après qu'on a préalablement ramené au même coefficient les termes qui contiennent la plus haute puissance de l'inconnue considérée dans les deux équations. On abaisse ainsi le degré de cette inconnue, et l'on a, en général, des calculs plus simples.

C'est ce qu'il ne faut pas manquer de faire, en particulier, lorsque l'inconnue à éliminer entre au second degré dans les deux équations proposées. Comme on l'abaisse ainsi au premier degré, on évite toute difficulté à l'égard de la formation des groupes de solutions communes (1185).

1187. Les calculs peuvent encore se simplifier, lorsqu'on aperçoit, pour les premiers membres des équations données, une *décomposition en facteurs*.

On devra alors chercher les solutions communes aux équations obtenues en prenant deux à deux, de toutes les manières possibles, les facteurs qui composent les premiers membres des équations données.

Admettons, par exemple, qu'on ait pu ramener ces équations à la forme

$$AB = 0, \qquad A'B' = 0.$$

Au lieu du système primitif, on traitera les quatre systèmes plus simples

$$\begin{cases} A = 0, \\ A' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0, \\ B' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0, \\ A' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0, \\ B' = 0. \end{cases}$$

Élimination entre deux équations à deux inconnues par la méthode du plus grand commun diviseur.

1188. Considérons les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

Si l'une quelconque des solutions du système est représentée par $x = a$ et $y = b$, les deux équations

$$\varphi(a, y) = 0, \qquad \psi(a, y) = 0$$

devront admettre une racine commune b. Les premiers membres de ces équations auront alors un plus grand commun diviseur du premier degré en y (1125), et le reste correspondant, indépendant de y, sera nul.

Plus généralement, deux équations à deux inconnues étant données, toute valeur de l'une des inconnues qui fera acquérir à leurs premiers membres un plus grand commun diviseur fonction de l'autre inconnue constituera, avec les racines de ce plus grand commun diviseur égalé à zéro, autant de groupes de solutions communes aux deux équations.

La question est donc toujours d'obtenir l'équation finale qui a pour racines toutes les valeurs convenables de l'une des inconnues, et de pouvoir la résoudre.

Si cette équation finale renferme, en même temps que les valeurs cherchées de l'une des inconnues, *des valeurs étrangères*, on reconnaîtra ces dernières à ce qu'elles ne feront pas acquérir de plus grand commun diviseur fonction de l'autre inconnue aux premiers membres des équations données, et l'on aura soin de les rejeter.

Il peut arriver que l'une des racines de l'équation finale satisfasse aux équations proposées, indépendamment de toute valeur de l'autre inconnue. Cette racine, associée avec des valeurs arbitraires de l'autre inconnue, correspond alors à un nombre illimité de solutions communes.

1189. Cela posé, on commencera par débarrasser, s'il y a lieu, les premiers membres des équations données

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

des facteurs, fonction de x seule ou fonction de y seule, qu'ils peuvent admettre.

On ordonnera, par exemple, $\varphi(x, y)$ par rapport à y, et l'on cherchera, pour le mettre en évidence, le plus grand commun diviseur $\varphi_1(x)$ de tous les coefficients de ce polynôme, qui ne contiennent plus que x. Cette opération s'effectuera évidemment (1121, 1122) comme en Arithmétique (*Arithm.*, 119), en cherchant le plus grand commun diviseur des deux premiers coefficients, puis le plus grand commun diviseur entre ce premier plus grand commun diviseur et le troisième coefficient, et ainsi de suite jusqu'au dernier coefficient.

En ordonnant le quotient obtenu par rapport à x, et en cherchant le plus grand commun diviseur $\varphi_2(y)$ de tous les coefficients de ce polynôme, qui ne contiennent plus que y, on le mettra de même en évidence.

On répétera les mêmes calculs pour $\psi(x, y)$, et l'on pourra alors poser

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(x, y) = 0,$$
$$\psi(x, y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(x, y) = 0.$$

Les deux facteurs $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$, qui ne contiennent plus que x, peuvent admettre un plus grand commun diviseur D_1 tel, qu'on ait

$$\varphi_1(x) = D_1 F_1(x), \qquad \psi_1(x) = D_1 f_1(x).$$

Les deux facteurs $\varphi_2(y)$ et $\psi_2(y)$, qui ne contiennent plus que y, peuvent admettre un plus grand commun diviseur D_2 tel, qu'on ait

$$\varphi_2(y) = D_2 F_2(y), \qquad \psi_2(y) = D_2 f_2(y).$$

En dernier lieu, les deux facteurs $\varphi_3(x, y)$ et $\psi_3(x, y)$, qui contiennent à la fois x et y, peuvent admettre un plus grand commun diviseur [1] D_3 tel, qu'on ait

$$\varphi_3(x, y) = D_3 F_3(x, y), \qquad \psi_3(x, y) = D_3 f_3(x, y).$$

---

[1] La recherche du plus grand diviseur entre deux polynômes entiers en x et en y s'effectue de la même manière que pour deux polynômes entiers en x seulement (1122 et suiv.). On ordonne les deux polynômes en x et en y par rapport à x, en ayant soin de réunir en un seul terme tous ceux qui renferment une même puissance de x. Les coefficients *constants* sont remplacés par des coefficients *qui sont fonction de la seconde lettre y*; mais rien n'est changé aux précautions à prendre, aux simplifications permises et aux raisonnements.

On a donc, finalement,

$$\varphi(x,y) = D_1 D_2 D_3 F_1(x) F_2(y) F_3(x,y) = 0,$$
$$\psi(x,y) = D_1 D_2 D_3 f_1(x) f_2(y) f_3(x,y) = 0,$$

et l'on peut appliquer la remarque du n° 1187.

Il est clair que les racines de l'équation en x, $D_1 = 0$, en nombre limité, donneront, associées à des valeurs arbitraires de y, un nombre illimité de solutions.

De même, les racines de l'équation en y, $D_2 = 0$, en nombre limité, donneront, associées à des valeurs arbitraires de x, un nombre illimité de solutions.

De même encore, comme le premier membre de l'équation $D_3 = 0$ contient x et y, cette équation donnera un nombre limité de valeurs de y pour chaque valeur arbitraire donnée à x, c'est-à-dire un nombre illimité de solutions pour les équations proposées.

Les polynômes $F_1(x)$ et $f_1(x)$ sont premiers entre eux, comme les polynômes $F_2(y)$ et $f_2(y)$ [1123], et ne peuvent donner lieu à aucune combinaison.

Les autres combinaisons

$$\begin{cases} F_1(x) = 0, \\ f_2(y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1(x) = 0, \\ f_3(x,y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_2(y) = 0, \\ f_1(x) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_2(y) = 0, \\ f_3(x,y) = 0, \end{cases}$$

sont possibles; mais, comme elles comprennent toutes une équation à une seule inconnue, la seule difficulté est de résoudre cette équation dans chaque groupe.

Il ne reste donc plus à examiner que la combinaison

$$F_3(x,y) = 0, \qquad f_3(x,y) = 0,$$

et c'est à elle seule que s'applique à proprement parler la méthode d'élimination que nous voulons faire connaître et qui est fondée sur la théorie du plus grand commun diviseur.

1190. Pour plus de simplicité, désignons les deux polynômes $F_3(x,y)$ et $f_3(x,y)$ par A et B. Ces deux polynômes, par hypothèse et d'après ce qui précède, ne présentent plus aucun facteur ou diviseur commun de quelque nature que ce soit. Ordonnons-les par rapport aux puissances décroissantes de x et supposons que, par rapport à x, A soit de degré supérieur ou égal à celui de B. Divisons alors A par B, et poursui-

vons l'opération jusqu'à ce que nous parvenions à un reste qui soit, par rapport à x, de degré inférieur à celui de B. Désignons ce reste par R_1 et, le quotient correspondant, par Q_1. Nous aurons

$$A = BQ_1 + R_1.$$

Admettons que la division n'ait introduit aucun dénominateur fonction de y. Les polynômes Q_1 et R_1 seront des fonctions entières. Par suite, les groupes de valeurs de x et de y qui satisferont à l'équation $B = 0$ donneront en même temps $A = R_1$.

Il en résulte que les deux systèmes, dont le second est plus simple,

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B = 0 \\ R_1 = 0, \end{cases}$$

répondent réciproquement aux mêmes groupes de solutions, c'est-à-dire sont, à ce point de vue, *équivalents*.

On est ainsi conduit à opérer sur les polynômes A et B, *comme s'il s'agissait* (1125 et suiv.) *de trouver leur plus grand commun diviseur*. Puisqu'ils n'ont aucun diviseur commun (1189), les calculs se poursuivront jusqu'à ce qu'on arrive à un reste R_n indépendant de x. *En admettant toujours que les divisions successives n'introduisent aucun dénominateur fonction de y*, on aura donc cette suite d'égalités :

$$\begin{aligned} A &= BQ_1 + R_1, \\ B &= R_1Q_2 + R_2, \\ R_1 &= R_2Q_3 + R_3, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n. \end{aligned}$$

Les restes $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, sont des fonctions entières de x, dont le degré par rapport à x va successivement en diminuant, et le dernier reste R_n est indépendant de x, sans pouvoir être nul.

D'ailleurs, le système

$$R_{n-1} = 0, \qquad R_n = 0,$$

est, en remontant de proche en proche, équivalent au système proposé lui-même. Comme la dernière équation

$$R_n = 0$$

ne contient plus que y, c'est précisément l'équation finale en y qui résulte de l'élimination de x entre les équations données. En la résolvant, on aura toutes les valeurs de y qui font partie des groupes de solutions communes satisfaisant à ces équations. De l'équation

$$R_{n-1} = 0,$$

qui est en général du premier degré en x, on déduira ensuite la valeur de x qui doit être associée à chaque valeur de y.

Si le reste R_n se réduisait à une constante, on en conclurait que les équations proposées sont *incompatibles*.

Cette méthode très simple ne laisserait rien à désirer théoriquement, si les divisions se faisaient, comme on l'a supposé, sans introduction de dénominateurs fonctions de y; mais cela n'a lieu que dans des cas très particuliers. Nous devons donc maintenant supposer le contraire; ce qui fera apparaître le vice de la méthode.

1191. Reprenons les calculs précédents, en admettant que les divisions introduisent des dénominateurs fonctions de y. On obtiendra alors dans l'une d'elles, *la première si l'on veut*, un quotient Q_1 de la forme $\frac{\nu}{\delta}$, et le dénominateur δ sera une fonction entière de y. On aura, dans cette hypothèse,

$$A = \frac{B\nu}{\delta} + R_1;$$

et il est clair que les groupes de valeurs de x et de y qui donnent $B = 0$ ne donnent plus nécessairement (1190) $A = R_1$, parce que, le dénominateur δ pouvant s'annuler en même temps que B, on peut avoir

$$A = \frac{0}{0} + R_1.$$

Pratiquement, on peut toujours éviter les dénominateurs fonctions de y, en multipliant *d'avance* le dividende A par une fonction entière de y convenablement choisie, que nous désignerons par Y. Mais on a, dans ce cas, une égalité de la forme

$$YA = BQ_1 + R_1;$$

et les groupes de valeurs de x et de y qui rendent $B = 0$ rendent en même temps $YA = R_1$.

Par suite, le système $B = 0$, $R_1 = 0$ n'est plus équivalent au système $A = 0$ et $B = 0$, mais bien au système $YA = 0$ et $B = 0$, qui se décompose dans les deux systèmes (1187) : $A = 0$ et $B = 0$, d'une part; $Y = 0$ et $B = 0$, d'autre part.

En évitant ainsi les dénominateurs, on ne supprime donc aucune des vraies solutions; mais on ajoute toutes les solutions étrangères satisfaisant au système particulier $Y = 0$ et $B = 0$. Par conséquent, si l'on poursuit l'opération de cette manière, on ne sera pas, en général, conduit comme précédemment à une seule équation finale en y; mais bien à plusieurs, dont quelques-unes pourront donner des racines étrangères à la question, qu'on devra rejeter après vérification (1188).

Il y a là une véritable difficulté. Elle a été levée, en 1832, par M. Labatie, qui a montré comment on devait procéder, en employant la méthode du plus grand commun diviseur, pour former la véritable équation finale débarrassée de toute solution étrangère.

Nous ne croyons pas devoir nous arrêter au théorème de M. Labatie (qu'on trouvera reproduit dans les *Leçons d'Algèbre* de J.-A. Serret), parce qu'on préfère ordinairement, à l'emploi du plus grand commun diviseur, bien qu'on puisse toujours vérifier les solutions (1188), d'autres méthodes plus sûres et conduisant dans tous les cas à la véritable équation finale.

Néanmoins, nous donnerons ici une application intéressante de ce procédé, en nous réservant de la traiter plus simplement dans un autre Chapitre.

Équation aux carrés des différences des racines.

1192. *Étant donnée l'équation* $f(x) = 0$, *de degré* m, *on demande de former l'équation* $F(y) = 0$ *qui a pour racines les différences deux à deux des racines de la première équation.*

Soient x_1 et x_2 deux racines quelconques de la proposée, *supposée sans racines égales*. Nous aurons à la fois

$$(1) \qquad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 0, \quad y = x_1 - x_2.$$

Le véritable degré de l'équation $F(y) = 0$ est évidemment le nombre des arrangements de m objets pris 2 à 2, c'est-à-dire (240) $m(m-1)$. Mais, comme rien ne distingue les racines de l'équation $f(x) = 0$, rien n'indique non plus, si l'on ne prend aucune précaution, qu'on ne doit pas retrancher une racine d'elle-même; ce qui introduit forcément m valeurs de y égales à zéro ou m solutions étrangères. Le calcul conduit alors à une équation finale de degré $m(m-1) \div m$ ou de degré m^2.

Pour supprimer les solutions $y = 0$ ou l'hypothèse $x_1 = x_2$, on n'a qu'à remplacer le système (1) par le système équivalent

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_1) - f(x_2) = 0, \qquad y = x_1 - x_2,$$

en divisant le premier membre de la deuxième équation, qui est de la forme

$$A_0(x_1^m - x_2^m) + A_1(x_1^{m-1} - x_2^{m-1}) + \ldots + A_{m-1}(x_1 - x_2) = 0,$$

par le facteur $x_1 - x_2$. On supprime ainsi toutes les solutions qui répondent à $x_1 = x_2$, c'est-à-dire toutes les valeurs nulles de y.

Il ne reste donc, pour résoudre le problème, qu'à éliminer x_1 et x_2 entre les trois équations

$$(2) \qquad f(x_1) = 0, \qquad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0, \qquad y = x_1 - x_2.$$

D'ailleurs, si l'équation $F(y) = 0$ admet la racine $x_1 - x_2$, elle admet aussi la racine $x_2 - x_1$. Ses racines sont donc deux à deux égales et de signes contraires, de sorte que, si y_1 est racine, $-y_1$ l'est aussi. Il en résulte que le premier membre de l'équation finale cherchée ne doit contenir que des puissances paires de y, et qu'on peut l'abaisser à un degré moitié moindre, $\frac{m(m-1)}{2}$, en posant

$$y^2 = z \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{z}.$$

L'équation en z, $F(\sqrt{z}) = 0$, est alors dite l'*équation aux carrés des différences* des racines de l'équation proposée.

1193. Appliquons cette solution générale à l'équation complète du troisième degré,

$$(1) \qquad x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que, si l'on diminue les racines de l'équation (1) d'une même quantité, leurs différences resteront les mêmes, de sorte que la transformée cherchée, $F(y) = 0$, ne sera pas modifiée.

Nous pouvons donc, pour plus de simplicité dans les calculs, faire disparaître le second terme de l'équation (1) en diminuant ses racines de la quantité $-\frac{p}{3}$ (1110,1107), c'est-à-dire en formant sa transformée en $x - \frac{p}{3}$.

En effectuant le calcul directement, il vient, pour cette transformée,

$$x^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x + \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r = 0.$$

Nous poserons alors

$$a = q - \frac{p^2}{3}, \qquad b = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r,$$

et nous aurons à traiter l'équation

$$x^3 + ax + b = 0. \tag{2}$$

En désignant par x_1 et x_2 deux racines de cette équation, on doit (1192), pour obtenir l'équation finale $F(y) = 0$, éliminer x_1 et x_2 entre les trois équations

$$x_1^3 + ax_1 + b = 0,$$

$$\frac{x_1^3 - x_2^3 + a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 + a = 0,$$

$$y = x_1 - x_2.$$

La troisième équation donnant $x_2 = x_1 - y$, la deuxième devient

$$3x_1^2 - 3yx_1 + y^2 + a = 0,$$

et il ne reste plus qu'à éliminer x_1 entre cette dernière équation et la première,

$$x_1^3 + ax_1 + b = 0.$$

Nous emploierons pour cela la méthode du plus grand commun diviseur, avec les précautions indiquées (1191). Nous

croyons utile de donner ci-dessous la suite des opérations. Pour plus de commodité, nous remplacerons x_1 par x.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+ax+b & x+y \\
2x^3+3ax+3b & 3x^2-3yx+y^2+a \\
\quad +3yx^2-(y^2+a)x & \\
\hline
3yx^2+(2a-y^2)x+3b & \\
\quad +3y^2x-y(y^2+a) & \\
\hline
2(y^2+a)x-(y^3+ay-3b) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^2-3yx+y^2+a & 3x-3(y^3+ay+3b) \\
6(y^2+a)x^2-6y(y^2+a)x+2(y^2+a)^2 & 2(y^2+a)x-(y^3+ay-3b) \\
\quad +3(y^3+ay-3b)x & \\
\hline
-3(y^3+ay+3b)x+2(y^2+a)^2 & \\
-6(y^3+ay+3b)(y^2+a)x+4(y^2+a)^3 & \\
\quad -3[(y^3+ay)^2-9b^2] & \\
\hline
-3(y^3+ay)^2+4(y^2+a)^3+27b^2 &
\end{array}$$

Le dernier reste est indépendant de x. En l'égalant à zéro, on obtiendra l'équation finale en y (1190). Cette équation est, après simplifications,

$$(3) \qquad F(y)=y^6+6ay^4+9a^2y^2+4a^3+27b^2=0.$$

Elle ne renferme aucune solution étrangère (1191); car, dans la seconde division, nous avons multiplié deux fois de suite les dividendes successifs par y^2+a, c'est-à-dire le dividende primitif par $(y^2+a)^2$, et ce facteur (Y) égalé à zéro réduit le diviseur (B) à $3b$, qui n'est pas supposé nul.

On voit que l'équation (3), qui est l'*équation aux différences* des racines, ne renferme en effet (1192) que des puissances paires de y. En posant $y^2=z$, on a, pour la transformée $F(\sqrt{z})=0$,

$$(4) \qquad F(\sqrt{z})=z^3+6az^2+9a^2z+4a^3+27b^2=0.$$

Telle est l'*équation aux carrés des différences* des racines de l'équation du troisième degré, privée ou non de son second terme.

On peut, si l'on veut, remplacer a et b par leurs valeurs en fonction des coefficients de l'équation proposée. Nous n'effectuerons cette substitution que dans le terme constant $4a^3 + 27b^2$, afin d'obtenir une vérification. *Ce terme constant* deviendra alors

$$4q^3 - p^2q^2 + 4p^3r - 18pqr + 27r^2,$$

résultat qui concorde avec celui que nous avons trouvé au n° 1097.

CHAPITRE III.

AUTRES MÉTHODES D'ÉLIMINATION. EXPRESSION DES RÉSULTANTS SOUS FORME DE DÉTERMINANTS.

Méthode de Bézout et d'Euler.

1194. Cette méthode est fondée sur une remarque faite à la même date (1764) par Bézout et Euler.

Soient les deux équations

$$F(x) = 0, \qquad f(x) = 0,$$

dont les degrés respectifs sont m et n; admettons qu'elles aient une racine commune, et proposons-nous de trouver le *résultant* du système (1159).

Nous allons prouver d'abord que, dans l'hypothèse d'une racine commune $x = p$, il existe toujours deux polynômes entiers $F_1(x)$ et $f_1(x)$, de degrés respectifs $m-1$ et $n-1$, tels qu'on ait

$$F(x) f_1(x) - f(x) F_1(x) = 0. \tag{1}$$

En effet, on peut poser

$$F(x) = (x-p)\,\Phi(x), \qquad f(x) = (x-p)\,\varphi(x).$$

Si l'on désigne alors par λ une constante arbitraire, et si l'on prend

$$F_1(x) = \lambda\,\Phi(x), \qquad f_1(x) = \lambda\,\varphi(x),$$

l'équation (1) est satisfaite d'elle-même ou se réduit à une identité, de sorte que les coefficients des différentes puissances de x qu'elle renferme doivent être eux-mêmes identiquement nuls.

Si nous représentons maintenant, d'une manière générale,

les quatre polynômes considérés comme il suit :

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, \\
f(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n, \\
-F_1(x) &= \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \alpha_2 x^{m-3} + \ldots + \alpha_{m-1}, \\
f_1(x) &= \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1},
\end{aligned}$$

nous pourrons donc égaler à zéro les coefficients des différentes puissances décroissantes de x dans l'équation (1) qui est de degré $m+n-1$. Nous obtiendrons ainsi les $m+n$ équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll}
a_0\beta_0 & + b_0\alpha_0 & = 0, \\
a_0\beta_1 + a_1\beta_0 & + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 & = 0, \\
a_0\beta_2 + a_1\beta_1 + a_2\beta_0 & + b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, \\
a_{m-1}\beta_{n-1} + a_m\beta_{n-2} & + b_{n-1}\alpha_{m-1} + b_n\alpha_{m-2} & = 0, \\
a_m\beta_{n-1} & + b_n\alpha_{m-1} & = 0.
\end{array}\right.$$

Ces $m+n$ équations sont des *équations homogènes du premier degré* entre les $m+n$ inconnues

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}.$$

Ces inconnues, en raison de la constante arbitraire λ qui y entre, sont *indéterminées*. Par suite, d'après le *théorème de* M. Rouché, appliqué aux équations homogènes (403,404), le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations du système (2) doit être égal à zéro.

Or ce déterminant est précisément (1160) le *résultant* des deux équations proposées $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$, et, en l'égalant à zéro, on obtient l'équation finale qui résulte de l'élimination de x entre ces équations.

Remarque. — On peut rapprocher ce qui précède du théorème démontré au n° 1126.

Si l'on cherche le plus grand commun diviseur de deux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ de degrés m et n, et si l'on poursuit l'opération aussi loin que possible, nous avons vu (1126) qu'on arrive nécessairement à une identité de la forme

$$F(x)M - f(x)N = \pm R_n.$$

Si les deux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ sont premiers entre

eux absolument, $\pm R_n$ est une constante qui doit diviser le premier membre de l'identité ci-dessus, c'est-à-dire M et N. Si les deux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ ont un facteur premier commun, ou si les deux équations $F(x)=0$ et $f(x)=0$ admettent une racine commune, R_n est nul. Les deux polynômes M et N, comme il est facile de le vérifier en suivant les calculs indiqués au n° 1126, sont d'ailleurs respectivement des degrés $n-1$ et $m-1$.

On peut donc toujours trouver deux polynômes $F_1(x)$ et $f_1(x)$ de degrés $m-1$ et $n-1$, tels qu'on ait

$$F(x)f_1(x)-f(x)F_1(x)=1$$

ou

$$F(x)f_1(x)-f(x)F_1(x)=0,$$

suivant que les deux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ sont eux-mêmes premiers entre eux ou admettent un facteur premier commun.

1195. Appliquons la méthode très ingénieuse et très élégante que nous venons d'exposer, et qui ramène le problème à la recherche de la résultante d'un système d'équations linéaires, au cas de deux équations du second degré, telles que

$$F(x)=a_0x^2+a_1x+a_2=0, \quad f(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0.$$

Nous aurons ici

$$-F_1(x)=\alpha_0x+\alpha_1, \qquad f_1(x)=\beta_0x+\beta_1,$$

et l'équation (1) du numéro précédent prendra la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} (\beta_0x+\beta_1)(a_0x^2+a_1x+a_2) \\ +(\alpha_0x+\alpha_1)(b_0x^2+b_1x+b_2)=0. \end{cases}$$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x dans cette équation, nous obtiendrons le système des quatre équations linéaires

$$(2) \qquad \begin{cases} a_0\beta_0 \qquad\quad +b_0\alpha_0 \qquad\quad =0, \\ a_1\beta_0+a_0\beta_1+b_1\alpha_0+b_0\alpha_1=0, \\ a_2\beta_0+a_1\beta_1+b_2\alpha_0+b_1\alpha_1=0, \\ \quad +a_2\beta_1 \qquad\quad +b_2\alpha_1=0. \end{cases}$$

L'équation résultante des deux équations données sera le

déterminant Δ, égalé à zéro, des coefficients des quatre inconnues β_0, β_1, α_0, α_1, dans le système (2), c'est-à-dire

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons, comme vérification, la valeur de ce résultant R ou de ce déterminant Δ. On a (362), en l'ordonnant suivant les éléments de la première ligne,

$$\Delta = a_0 \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

En ordonnant aussi chacun des déterminants mineurs du troisième ordre suivant les éléments de leur première ligne, nous aurons, pour le premier,

$$a_0 \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= a_0 b_2^2 - b_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) - b_0 a_2 b_2;$$

et, pour le second,

$$a_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_0 a_2 b_2 + b_0 a_2^2.$$

Par suite,

$$\Delta = a_0^2 b_2^2 - a_0 b_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_0 b_0 a_2 b_2$$
$$+ a_1 b_0(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_0 b_0 a_2 b_2 + b_0^2 a_2^2.$$

On a donc finalement, comme résultante,

$$\Delta = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

résultat conforme à ce qui précède (1160, 1164, 1166).

1196. On peut remarquer que, dans le déterminant fourni par la méthode qu'on vient d'exposer (1194), n colonnes sont formées avec les coefficients de la première équation donnée qui est de degré m, tandis que les m autres colonnes sont

formées avec les coefficients de la seconde équation qui est de degré n.

On retrouve ainsi immédiatement la règle concernant le degré de l'équation finale par rapport aux coefficients des deux équations considérées (1162,1165); car, chaque terme du déterminant Δ renferme, avec possibilité de répétition, n coefficients de la première équation et m coefficients de la seconde.

Seconde méthode de Bézout.

1197. La première méthode que Bézout a proposée en même temps qu'Euler, très simple en théorie, est très pénible dans les applications.

Si l'on voulait seulement l'appliquer à deux équations du quatrième degré, le déterminant à calculer serait (1196) du huitième degré (36), c'est-à-dire qu'il contiendrait (340) un nombre de termes égal au produit

$$1.2.3.4.5.6.7.8$$

ou 40320 termes.

Bézout a donc été conduit à imaginer la seconde méthode que nous allons développer.

Comme nous généraliserons ensuite cette seconde méthode, en indiquant le perfectionnement que Cauchy y a apporté, nous nous contenterons de l'expliquer ici sur des exemples particuliers.

Nous distinguerons le cas où les deux équations proposées sont de même degré et celui où elles sont de degrés différents.

1198. I. *Les équations données sont de même degré.* — Soient d'abord les deux équations du troisième degré

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0. \end{cases}$$

On sait qu'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre a pour expression (341)

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \dots l_n$$

ou, encore, le terme principal mis simplement entre deux

parenthèses, c'est-à-dire

$$(a_1 b_2 c_3 \ldots l_n).$$

Cela posé, admettons que les équations (1) aient une racine commune représentée par x. Multiplions-les alors respectivement par b_0 et par a_0, et retranchons-les membre à membre, la première de la seconde. Nous éliminerons x^3, et nous aurons l'équation

$$(\alpha) \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x + (a_0 b_3 - a_3 b_0) = 0.$$

Mettons maintenant x^2 en facteur commun dans les deux premiers termes des équations (1); elles deviendront

$$(a_0 x + a_1) x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$
$$(b_0 x + b_1) x^2 + b_2 x + b_3 = 0.$$

Si l'on élimine x^2 entre ces deux équations comme on vient d'éliminer x^3, on trouve

$$[(a_0 x + a_1) b_2 - (b_0 x + b_1) a_2] x + (a_0 x + a_1) b_3 - (b_0 x + b_1) a_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta) \quad (a_0 b_2 - a_2 b_0) x^2 + [(a_0 b_3 - a_3 b_0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)] x + (a_1 b_3 - a_3 b_1) = 0.$$

Enfin, on peut mettre x en facteur commun dans les trois premiers termes des équations (1), en les écrivant

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) x + a_3 = 0,$$
$$(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) x + b_3 = 0,$$

et éliminer x entre elles, en suivant toujours la même marche. On obtient ainsi

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) b_3 - (b_0 x^2 + b_1 x + b_2) a_3 = 0$$

ou

$$(\gamma) \quad (a_0 b_3 - a_3 b_0) x^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x + (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0.$$

Les trois équations (α), (β), (γ) doivent être satisfaites par la valeur de la racine commune qu'on suppose exister entre les équations (1). On peut d'ailleurs les regarder comme contenant les deux inconnues x^2 et x. L'équation obtenue en éliminant entre elles ces deux inconnues n'est alors autre chose (405) que le déterminant des coefficients des trois

équations (α), (β), (γ), égalé à zéro, et c'est en même temps l'équation finale qu'on trouverait en éliminant directement l'inconnue x entre les deux équations (1).

Si l'on remarque que les coefficients des équations (α), (β), (γ) sont constitués par des déterminants du deuxième ordre, et si l'on emploie pour représenter ces déterminants la notation abrégée rappelée au commencement de ce paragraphe, on peut mettre ces équations sous la forme

$$(\alpha) \qquad (a_0 b_1)x^2 + (a_0 b_2)x + (a_0 b_3) = 0,$$

$$(\beta) \qquad (a_0 b_2)x^2 + [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)]x + (a_1 b_3) = 0,$$

$$(\gamma) \qquad (a_0 b_3)x^2 + (a_1 b_3)x + (a_2 b_3) = 0,$$

et l'équation finale cherchée est à son tour

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) \\ (a_0 b_2) & (a_0 b_3) + (a_1 b_2) & (a_1 b_3) \\ (a_0 b_3) & (a_1 b_3) & (a_2 b_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant Δ est un déterminant *symétrique* (363), et l'on voit qu'il est respectivement du troisième degré par rapport aux coefficients des deux équations (1).

1199. La marche suivie conduit à autant d'équations auxiliaires qu'il y a d'unités dans le degré commun m des deux équations considérées, le degré de ces équations auxiliaires étant moindre d'une unité, c'est-à-dire étant $m - 1$.

Par conséquent, si l'on avait eu à traiter deux équations du quatrième degré, on serait arrivé à quatre équations auxiliaires du troisième degré, conduisant à un déterminant du quatrième degré *renfermant* 24 *termes*, tandis que la première méthode de Bézout et d'Euler donne lieu, dans le même cas (1197), à un déterminant du huitième degré *renfermant* 40320 *termes*.

1200. II. *Les équations données sont de degrés différents.* — Soient, par exemple, les deux équations

$$(1) \qquad a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

$$(2) \qquad b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0,$$

dont la première est du quatrième degré et, la seconde, du

deuxième. On suppose qu'elles admettent une racine commune représentée par x.

En multipliant par x^2 les deux termes de la seconde équation, elle devient

$$b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2=0. \tag{3}$$

On peut alors traiter les équations (1) et (3) comme précédemment. On élimine d'abord x^4 entre elles, en les multipliant respectivement par b_0 et par a_0 et en retranchant la première de la seconde. Il vient

$$(a_0b_1-a_1b_0)x^3+(a_0b_2-a_2b_0)x^2-a_3b_0x-a_4b_0=0. \tag{α}$$

En mettant maintenant x^3 en facteur commun dans les deux premiers termes des équations (1) et (3), on a

$$(a_0x+a_1)x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,$$
$$(b_0x+b_1)x^3+b_2x^2=0.$$

Si l'on élimine x^3 entre ces deux équations, comme on vient d'éliminer x^4 entre les équations (1) et (3), on trouve

$$[(a_0x+a_1)b_2-(b_0x+b_1)a_2]x^2-(a_2x+a_4)(b_0x+b_1)=0$$

ou

$$(a_0b_2-a_2b_0)x^3+[(a_1b_2-a_2b_1)-a_3b_0]x^2-(a_3b_1+a_4b_0)x-a_4b_1=0. \tag{β}$$

Nous ne pouvons pas aller plus loin en appliquant le même procédé; mais nous pouvons adjoindre aux deux équations (α) et (β) l'équation obtenue en multipliant par x l'équation (2) et cette équation elle-même, c'est-à-dire les deux équations

$$b_0x^3+b_1x^2+b_2x=0, \tag{γ}$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0. \tag{δ}$$

Les quatre équations (α), (β), (γ), (δ) pouvant être regardées comme contenant les trois inconnues x^3, x^2 et x, l'équation finale correspondant aux équations (1) et (2) sera (405) le déterminant Δ, égalé à zéro, des coefficients de ces quatre

équations qu'on peut mettre sous la forme

$$(\alpha)\quad (a_0b_1)x^3+\quad (a_0b_2)x^2\quad -\quad a_3b_0x\quad -a_4b_0=0,$$

$$(\beta)\quad (a_0b_2)x^3+[(a_1b_2)-a_3b_0]x^2-(a_3b_1+a_4b_0)x-a_4b_1=0,$$

$$(\gamma)\quad b_0x^3\ +\quad b_1x^2\quad +\quad b_2x\quad =0,$$

$$(\delta)\quad b_0x^2\quad +\quad b_1x\quad +\quad b_2=0.$$

L'équation finale sera donc, en changeant les signes des deux dernières colonnes, ce qui ne modifie pas le déterminant (356),

$$\Delta=\begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & a_3b_0 & a_4b_0 \\ (a_0b_2) & (a_1b_2)-a_3b_0 & a_3b_1+a_4b_0 & a_4b_1 \\ b_0 & b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & -b_1 & -b_2 \end{vmatrix}=0$$

Conformément à la remarque qui termine le n° 1198, ce déterminant est encore respectivement du second degré par rapport aux coefficients de l'équation (1) qui est du quatrième degré et, du quatrième degré, par rapport aux coefficients de l'équation (2) qui est du second degré.

Méthode de Cauchy.

1201. Cette méthode a été appelée par Cauchy lui-même : *Méthode abrégée de* Bézout, et il l'a indiquée dans ses *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (t. I, 1840).

Le perfectionnement dû à Cauchy consiste en un algorithme ingénieux ; mais, dans des questions délicates et lorsqu'il s'agit de calculs pénibles, on doit compter pour beaucoup tout procédé qui, en les simplifiant, guide et soulage l'esprit.

1202. I. *Les équations données sont de même degré.* — Soient les deux équations algébriques du $m^{\text{ième}}$ degré

$$(1)\quad \begin{cases} F(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0, \\ f(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0, \end{cases}$$

qu'on suppose avoir une racine commune représentée par x.

Isolons successivement, dans le premier membre de chacune d'elles, le premier, les deux premiers, les trois premiers, ..., les m premiers termes. On obtiendra de la sorte m groupes de deux équations qu'on pourra aussi diviser successivement l'une par l'autre; ce qui conduira enfin à m équations se présentant sous forme fractionnaire. En supprimant d'ailleurs dans les deux termes de chaque fraction de gauche la puissance de x qu'on peut y mettre en facteur commun, ces m équations seront

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_2 x^{m-2} + b_3 x^{m-3} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{b_0 x^2 + b_1 x + b_2} = \frac{a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_3 x^{m-3} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}}{b_0 x^{m-2} + b_1 x^{m-3} + \ldots + b_{m-2}} = \frac{a_{m-1} x + a_m}{b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}} = \frac{a_m}{b_m}.$$

En chassant les dénominateurs, on mettra ces m équations sous forme entière, et les coefficients des différentes puissances de x seront entiers et du premier degré par rapport aux coefficients respectifs des deux équations (1).

Nous représenterons alors le système des m équations entières ainsi obtenues, et qui sont du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, par

$$(2)\quad \begin{cases} A_1^1 x^{m-1} + A_1^2 x^{m-2} + A_1^3 x^{m-3} + \ldots + A_1^{m-1} x + A_1^m = 0, \\ A_2^1 x^{m-1} + A_2^2 x^{m-2} + A_2^3 x^{m-3} + \ldots + A_2^{m-1} x + A_2^m = 0, \\ A_3^1 x^{m-1} + A_3^2 x^{m-2} + A_3^3 x^{m-3} + \ldots + A_3^{m-1} x + A_3^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m-1}^1 x^{m-1} + A_{m-1}^2 x^{m-2} + A_{m-1}^3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}^{m-1} x + A_{m-1}^m = 0, \\ A_m^1 x^{m-1} + A_m^2 x^{m-2} + A_m^3 x^{m-3} + \ldots + A_m^{m-1} x + A_m^m = 0. \end{cases}$$

en posant, d'après la notation rappelée (1198),

$$A_1^1=(a_0b_1),\qquad A_1^2=(a_0b_2),\qquad A_1^3=(a_0b_3),\qquad \ldots,$$
$$A_1^{m-1}=(a_0b_{m-1}),\qquad A_1^m=(a_0b_m),$$

$$A_2^1=(a_0b_2),\qquad A_2^2=(a_0b_3)+(a_1b_2),\qquad \ldots,$$
$$A_2^{m-1}=(a_0b_m)+(a_1b_{m-1}),\qquad A_2^m=(a_1b_m),$$

$$A_3^1=(a_0b_3),\qquad A_3^2=(a_0b_4)+(a_1b_3),\qquad \ldots,$$
$$A_3^{m-1}=(a_1b_m)+(a_2b_{m-1}),\qquad A_3^m=(a_2b_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots

Il est clair que le procédé de Cauchy conserve le même avantage que la seconde méthode de Bézout (1199). Si l'on a à traiter deux équations du $m^{ième}$ degré, il suffit de calculer un déterminant du $m^{ième}$ ordre.

1203. Le *déterminant* Δ se confond avec le *résultant* ou l'*éliminant* R (1159) auquel conduirait, par exemple, la méthode d'élimination par les fonctions symétriques (1162, 1165).

En effet, Δ est, comme R lui-même, du $m^{ième}$ degré par rapport aux coefficients respectifs des deux équations (1), qui sont des fonctions symétriques de leurs racines (1080, 1083). Il s'annule aussi comme R toutes les fois que ces équations ont une racine commune. Par conséquent, les quantités R et Δ ne peuvent différer que par un facteur constant, et la condition nécessaire et suffisante (1160) pour que les deux équations (1) aient une racine commune s'exprime indifféremment en posant $\Delta = 0$ ou $R = 0$.

Les nouvelles méthodes exposées dans ce Chapitre n'introduisent donc non plus aucunes solutions étrangères.

1204. Cherchons encore, à l'aide du procédé de Cauchy, la condition pour que les deux équations du second degré

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$
$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

aient une racine commune.

Nous devrons ici écrire les deux équations du premier degré

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2}, \qquad \frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

c'est-à-dire

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) x + (a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0,$$
$$(a_0 b_2 - a_2 b_0) x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

En égalant à zéro le déterminant des coefficients de ces deux équations, on retrouve immédiatement la condition connue

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 = 0.$$

1205. II. *Les équations données sont de degrés différents.* — Soient les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, \\ f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n. \end{cases}$$

La première est de degré m, la seconde de degré n, et l'on a $m > n$; on suppose qu'elles ont une racine commune représentée par x.

On peut distinguer deux cas, suivant que le coefficient b_0 du premier terme de la seconde équation est ou non numérique.

1° *Si b_0 est un nombre*, on peut remplacer facilement les équations données par deux équations de même degré.

Divisons, en effet, $F(x)$ par $f(x)$, en ordonnant les deux polynômes suivant les puissances décroissantes de x, et en poursuivant l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste $\psi(x)$ de degré n. Si Q est à ce moment le polynôme écrit au quotient, on a

$$F(x) = f(x)Q + \psi(x).$$

Cette identité montre qu'il revient au même de chercher les racines communes des équations (1) ou des équations $f(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$, qui sont de même degré n, et auxquelles on n'aura qu'à appliquer la méthode précédente (1202).

2° *Si b_0 n'est pas un nombre*, il faut modifier cette méthode comme il suit.

Reprenons les équations (1) et multiplions les deux membres de la seconde par x^{m-n}. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n+1} + b_n x^{m-n} = 0.$$

Les deux équations $F(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ admettront toujours la racine commune x et, comme elles sont maintenant de même degré m, on peut leur appliquer la méthode exposée au n° 1202. Mais, comme la seconde équation $\varphi(x) = 0$ ne comprend ici que $n + 1$ termes, après avoir isolé successivement dans le premier membre des deux équations considérées le premier, les deux premiers, les trois premiers, ..., les n premiers termes, nous ne pourrons plus continuer à cause de la forme particulière de la seconde équation. Le

procédé employé nous fournira donc seulement les n équations

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n+1} + b_n x^{m-n}}$$

$$\frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_2 x^{m-2} + b_3 x^{m-3} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n+1} + b_n x^{m-n}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1}}{x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}} = \frac{a_n x^{m-n} + a_{n+1} x^{m-n-1} + \ldots + a_m}{b_n x^{m-n}}.$$

En ramenant ces n équations à la forme entière, on aura un premier groupe (α) de n équations de degré $m-1$, que nous représenterons par

$$(\alpha)\quad \begin{cases} A_1^1 x^{m-1} + A_1^2 x^{m-2} + A_1^3 x^{m-3} + \ldots + A_1^{m-1} x + A_1^m = 0, \\ A_2^1 x^{m-1} + A_2^2 x^{m-2} + A_2^3 x^{m-3} + \ldots + A_2^{m-1} x + A_2^m = 0, \\ A_3^1 x^{m-1} + A_3^2 x^{m-2} + A_3^3 x^{m-3} + \ldots + A_3^{m-1} x + A_3^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n^1 x^{m-1} + A_n^2 x^{m-2} + A_n^3 x^{m-3} + \ldots + A_n^{m-1} x + A_n^m = 0. \end{cases}$$

Les coefficients de ces n équations seront encore, comme précédemment (1202), du premier degré par rapport aux coefficients respectifs des équations (1).

Aux n équations du groupe (α), qui peuvent être regardées comme renfermant les $m-1$ inconnues x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x^2, x, nous adjoindrons $m-n$ équations formant un second groupe (β). On les obtiendra en multipliant successivement les deux membres de la seconde équation $f(x) = 0$ par les $m-n$ quantités x^{m-n-1}, x^{m-n-2}, x^{m-n-3}, ..., x, 1. Le groupe (β) sera ainsi

$$(\beta)\quad \begin{cases} b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + b_2 x^{m-3} + \ldots + b_n x^{m-n-1} = 0, \\ b_0 x^{m-2} + b_1 x^{m-3} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n-1} + b_n x^{m-n-2} = 0, \\ b_0 x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + b_{n-1} x^{m-n-2} + b_n x^{m-n-3} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0. \end{cases}$$

En réunissant les deux groupes (α) et (β), on a $n + m - n$ ou m équations renfermant les $m-1$ inconnues x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x^2, x. Comme ces m équations doivent être compatibles à cause de la racine commune supposée entre les deux équations (1), le déterminant Δ du $m^{\text{ième}}$ ordre formé

par leurs coefficients devra être égal à zéro (405). L'équation finale cherchée aura donc pour expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & \dots & A_1^n & \dots & \dots & \dots & \dots & A_1^{m-1} & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & \dots & A_2^n & \dots & \dots & \dots & \dots & A_2^{m-1} & A_2^m \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & \dots & A_3^n & \dots & \dots & \dots & \dots & A_3^{m-1} & A_3^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^3 & \dots & A_n^n & \dots & \dots & \dots & \dots & A_n^{m-1} & A_n^m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} =$$

1206. On voit encore (1203) que ce déterminant Δ est de degré n par rapport aux coefficients de l'équation $F(x) = 0$ qui est de degré m, et de degré m par rapport aux coefficients de l'équation $f(x) = 0$ qui est de degré n. Il s'annule d'ailleurs pour toute racine commune aux deux équations proposées; Δ se confond donc avec le résultant R (1165), sauf un facteur constant

1207. La méthode de Cauchy permet de retrouver le théorème de Bézout sur le degré de l'équation finale (1168, 1182).

Supposons que les équations (1) données contiennent deux inconnues x et y, et cherchons à évaluer le degré de l'équation finale en y, quand on élimine x.

1° Considérons d'abord le cas où les équations (1) sont de même degré m (1202), et reportons-nous à l'expression du déterminant Δ. Le terme principal de ce déterminant est

$$A_1^1 A_2^2 A_3^3 \dots A_{m-1}^{m-1} A_m^m.$$

Mais A_1^1, c'est-à-dire $(a_0 b_1)$, est (1168) du premier degré en y; A_2^2, c'est-à-dire $(a_0 b_3) + (a_1 b_2)$, est du troisième degré en y, ou du degré $2 + 1$; A_3^3, c'est-à-dire $(a_0 b_5) + (a_1 b_4) + (a_2 b_3)$, est du cinquième degré en y, ou du degré $3 + 2$; ...; A_{m-1}^{m-1}, c'est-à-dire $(a_{m-3} b_m) + (a_{m-2} b_{m-1})$, est du degré $2m - 3$ en y, ou du degré $(m-1) + (m-2)$; enfin, A_m^m, c'est-à-dire $(a_{m-1} b_m)$, est du degré $2m - 1$ en y, ou du degré $m + (m-1)$.

Le degré en y du déterminant Δ, ou celui de l'équation finale, est, par conséquent,

$$1+(2+1)+(3+2)+\ldots+[(m-1)+(m-2)]+[m+(m-1)],$$

ce qu'on peut écrire

$$[1+2+3+\ldots+(m-1)+m]$$
$$+[1+2+3+\ldots(m-2)+(m-1)].$$

Ce degré est donc égal (284) à

$$\frac{m(m+1)}{2}+\frac{(m-1)m}{2}=m^2,$$

c'est-à-dire au produit des degrés des deux équations proposées.

2° Considérons maintenant le cas où les équations (1) données sont de degrés différents, l'une de degré m, l'autre de degré n, et reportons-nous à l'expression du déterminant Δ (1205). Le terme principal de ce déterminant est évidemment

$$A_1^1 A_2^2 A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n b_n b_n \ldots b_n,$$

le facteur b_n étant répété $m-n$ fois.

Or, d'après ce qu'on vient de voir (1°), le degré en y du produit des n premiers facteurs

$$A_1^1 A_2^2 A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n$$

est égal à n^2.

Quant au facteur b_n, il contient y à la puissance n et, par suite, le produit des $(m-n)$ facteurs b_n est du degré $(m-n)n$ en y. Le degré du déterminant Δ ou de l'équation finale en y est donc

$$n^2+(m-n)n=mn,$$

c'est-à-dire égal encore au produit des degrés des deux équations proposées, supposées complètes et à coefficients arbitraires.

Calcul de la racine commune.

1208. Une fois qu'on s'est assuré de l'existence de la racine commune, on peut, *en supposant qu'il n'y en ait qu'une*, la calculer en cherchant le plus grand commun diviseur du premier degré admis alors par les deux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ [1125].

Mais on peut l'obtenir aussi comme il suit, en continuant à se servir des déterminants.

Reprenons (1205) les équations qui composent les deux groupes (α) et (β) et constituent un système de m équations linéaires à $m-1$ inconnues x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x^2, x, puissances successives de la racine commune depuis l'exposant $m-1$ jusqu'à l'exposant 1.

En supprimant l'une des m équations, les $m-1$ autres devront être satisfaites par les $m-1$ inconnues. On pourra donc calculer spécialement x, en appliquant la *règle de* CRAMER (382) à ces $m-1$ équations.

Si l'on supprime, par exemple, la première équation, on a évidemment

$$x = \begin{vmatrix} A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & \dots & A_2^n & \dots & A_2^{m-2} & -A_2^m \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & \dots & A_3^n & \dots & A_3^{m-2} & -A_3^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^3 & \dots & A_n^n & \dots & A_n^{m-2} & -A_n^m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_{n-2} & -b_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_2^1 & A_2^2 & A_n^3 & \dots & A_2^n & \dots & A_2^{m-2} & A \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & \dots & A_3^n & \dots & A_3^{m-2} & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^3 & \dots & A_n^n & \dots & A_n^{m-2} & A \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & \dots & 0 & \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_{n-2} & b \end{vmatrix}$$

1209. EXEMPLE. — Soient les deux équations numériques

$$x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + x - 6 = 0, \tag{2}$$

qui ont évidemment une racine commune, *et une seule*, égale à 2. Nous allons vérifier l'existence de cette racine commune et la calculer, en appliquant d'abord la méthode générale (1205, 2°), puisque nous n'avons ici pour but qu'une vérification.

Multiplions donc par x les deux membres de la seconde équation; elle deviendra

$$x^3 + x^2 - 6x = 0. \tag{3}$$

Les équations (1) et (3) nous donneront alors

$$\frac{1}{1} = \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2 - 6x},$$

$$\frac{1}{1} = \frac{7x - 2}{6x},$$

et nous adjoindrons l'équation (2) aux équations entières qu'on peut déduire de ces résultats. Nous aurons ainsi les trois équations

$$(4) \qquad \begin{cases} x-2=0, \\ x-2=0, \\ x^2+x-6=0. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients de ces trois équations est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (1) et (2) admettent donc bien une racine commune. On a ensuite, pour cette racine, en supprimant la première équation du système (4),

$$x = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Application de la méthode de Cauchy à la recherche de l'équation aux différences des racines.

1210. Nous avons déjà traité cette question par la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur (1192). Nous allons arriver plus rapidement et plus sûrement au résultat en faisant usage de la méthode d'élimination de Cauchy.

Nous considérerons l'équation du troisième degré et nous la supposerons immédiatement privée de son second terme (1193), c'est-à-dire que nous la prendrons sous la forme

$$(1) \qquad x^3+ax+b=0.$$

Nous devons, comme précédemment (1193), éliminer x entre l'équation (1) et l'équation

$$(2) \qquad 3x^2-3yx+y^2+a=0,$$

où y représente la différence de deux racines quelconques, non identiques, de l'équation (1).

Le coefficient du premier terme de l'équation (2) étant *numérique*, nous commencerons par ramener le système proposé à un système où les deux équations traitées soient *de même degré* (1203, 1°). Il suffit, pour cela, de diviser le premier membre de l'équation (1) par le premier membre de l'équation (2), jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste de même degré que l'équation (2) ou du second degré. Ce reste, égalé à

zéro, pourra alors, dans la recherche poursuivie, être substitué à l'équation (1).

On a ainsi, en évitant les coefficients fractionnaires,

$$\begin{array}{r|l} x^3+ax+b & 3x^2-3yx+y^2+a \\ 3x^3+3ax+3b & \overline{} \\ +3yx^2-(y^2+a)x & x \\ \hline 3yx^2-(y^2-2a)x+3b & \end{array}$$

Le système donné sera donc remplacé par le système

$$3x^2-3yx+y^2+a=0, \tag{2}$$

$$3yx^2-(y^2-2a)x+3b=0. \tag{3}$$

Nous poserons alors, en appliquant l'algorithme de Cauchy (1202, I),

$$\frac{3}{3y}=\frac{3yx-y^2-a}{(y^2-2a)x-3b},$$

$$\frac{3x-3y}{3yx-y^2+2a}=\frac{y^2+a}{3b}.$$

Il en résulte, sous forme entière,

$$(y^2-2a)x-3b=y(3yx-y^2-a),$$

$$9b(x-y)=(y^2+a)(3yx-y^2+2a)$$

ou, en effectuant et en simplifiant,

$$\begin{cases} 2(y^2+a)x-(y^3+ay-3b)=0, \\ 3(y^3+ay-3b)x-(y^4-ay^2-9by-2a^2)=0. \end{cases} \tag{4}$$

L'équation finale en y s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant des coefficients des deux équations (4) qui sont du premier degré en x. Cette équation finale est donc

$$3(y^3+ay-3b)^2-2(y^2+a)(y^4-ay^2-9by-2a^2)=0,$$

c'est-à-dire, en développant et en simplifiant,

$$y^6+6ay^4+9a^2y^2+4a^3+27b^2=0,$$

comme précédemment (1193).

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

Indications préliminaires.

1211. Les méthodes d'élimination exposées dans le Chapitre précédent nous ont conduit en même temps à la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations algébriques aient *au moins* une racine commune.

Cette condition consiste en ce que le déterminant Δ, tel que nous l'avons établi au n° **1202** (dans le cas de deux équations de même degré) et au n° **1205** (dans le cas de deux équations de degrés différents), doit être égal à zéro (sans être identiquement nul).

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de généraliser la question et de trouver les conditions pour que deux équations algébriques aient *exactement p* racines communes.

Lagrange s'est occupé de ce problème dans un travail célèbre qui fait partie des *Mémoires de l'Académie de Berlin* (1770, 1771). Tout récemment, plusieurs géomètres, en employant la Théorie des déterminants, ont publié sur le même sujet de remarquables études.

Nous citerons principalement : Zeuthen (1874), qui a généralisé la méthode primitive de Bézout et d'Euler (**1194**),

Darboux (1), qui a considéré le déterminant de Cauchy; Rouché (2), qui a, le premier, fait connaître le théorème fondamental auquel il fallait parvenir, sous une forme simple et élégante, et indiqué les équations aux racines non communes.

1212. Avant de passer à la recherche des racines communes, nous présenterons la méthode d'élimination de M. Sylvester (3), qu'il est utile de posséder et dont nous ferons usage dans cette recherche. Cette méthode conduit d'ailleurs aux mêmes résultats que celle de Bézout et d'Euler (1194) et semble moins simple, par conséquent, *au point de vue des calculs d'élimination*, que celle de Bézout et de Cauchy (1198, ..., 1201, ...). Ajoutons que l'auteur a donné à sa méthode le nom de *méthode dialytique*, parce qu'il y traite les puissances de la variable comme des variables indépendantes (ainsi que cela a lieu, du reste, dans la méthode de Bézout et de Cauchy), et qu'il *dissout* pour ainsi dire de cette manière les relations qui unissent ces puissances.

Méthode de M. Sylvester.

1213. Soient les deux équations algébriques de degrés différents

$$(1)\quad F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2)\quad f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (1) par les n quantités $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^2, x, 1$, et les deux membres de l'équation (2) par les m quantités $x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, \ldots, x^2, x, 1$,

(1) Darboux, Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. X et XII, 1876 et 1877.

(2) Eug. Rouché, Sur l'élimination, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVI, 1877.

(3) *Philosophical Magazine*, 1840.

on obtient les $n + m$ équations

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + a_2 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
a_0 x^{m+n-2} + a_1 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
a_0 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a_0 x^m + \ldots\ldots\ldots + a_m &= 0,\\
b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + b_2 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
b_0 x^{m+n-2} + b_1 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
b_0 x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
b_0 x^n + \ldots + b_n &= 0.
\end{aligned}
\right. \qquad (3)
$$

On peut regarder ces $m + n$ équations comme des équations du premier degré renfermant $m + n - 1$ inconnues x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, x^{m+n-3}, ..., x^2, x. D'ailleurs, si les équations (1) et (2) admettent une racine commune x, cette valeur de x et ses différentes puissances (depuis 1 jusqu'à $m + n - 1$) doivent vérifier les équations du système (3). Ces équations étant alors compatibles, le déterminant Δ formé par leurs coefficients sera égal à zéro (405), et l'on aura

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots\ldots & 0 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots\ldots & 0 & 0\\
0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & \ldots\ldots & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_{m-1} & a_m\\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \ldots\ldots & 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_n & \ldots\ldots & 0 & 0\\
0 & 0 & b_0 & \ldots & \ldots & b_n & \ldots\ldots & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_n & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1} & b_n &
\end{vmatrix} = 0.
$$

Δ se confond avec le résultant R des équations (1) et (2), quand elles ont une racine commune.

En effet, Δ n'est pas identiquement nul, puisque son terme principal est $a_0^n b_n^m$. De plus, dans ce déterminant, n lignes sont formées avec les coefficients de l'équation (1), qui est de degré m et m lignes, avec les coefficients de l'équation (2),

qui est de degré n. Δ est donc respectivement, comme R (1165), une fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ et du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coefficients des équations (1) et (2), coefficients qui sont, respectivement, des fonctions symétriques des racines de ces équations (1180, 1183). Enfin, Δ s'annule, comme R, toutes les fois que les équations proposées ont une racine commune; il ne peut donc différer de R que par un facteur constant et, par suite, le résultat de l'élimination de x entre les équations (1) et (2) est indifféremment $R = 0$ ou $\Delta = 0$ (1203).

1214. La condition $\Delta = 0$ est *nécessaire* pour que les équations (1) et (2) aient une racine commune, puisque, dans cette hypothèse, elle a toujours lieu. Elle est aussi *suffisante* (1160); c'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier comme il suit.

Supposons $\Delta = 0$: il existera alors (406) une certaine relation linéaire et homogène entre les éléments respectifs des différentes lignes ou des différentes colonnes du déterminant. En désignant par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$, des constantes qui ne soient pas toutes nulles, on pourra donc poser, en multipliant les différentes lignes par ces constantes et en considérant ensuite les colonnes du déterminant,

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 a_0 && && +\mu_0 b_0 && && && = 0,\\
&\lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_0 && && +\mu_0 b_1 + \mu_1 b_0 && && && = 0,\\
&\lambda_0 a_2 + \lambda_1 a_1 && + \lambda_2 a_0 && +\mu_0 b_2 + \mu_1 b_1 && + \mu_2 b_0 && && = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots

Si l'une des quantités (λ) n'est pas nulle, il en sera de même au moins de l'une des quantités (μ), et réciproquement; car, sans cela, on aurait $F(x) = 0$ ou $f(x) = 0$ pour toute valeur de x, et l'on n'admet pas qu'aucune des équations données soit identiquement nulle.

Aucun des quatre polynômes qui entrent dans la relation (4) n'étant identiquement nul, on voit que $f(x)$, qui est du $n^{\text{ième}}$ degré, doit diviser exactement le produit de $F(x)$ qui est du $m^{\text{ième}}$ degré, par un polynôme de degré $n-1$; ce qui exige que $f(x)$ et $F(x)$ aient, *au moins*, un facteur commun du premier degré, c'est-à-dire que les équations $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$ aient *au moins* une racine commune.

Recherche des racines communes, théorème fondamental.

1215. Pour arriver plus simplement au théorème que nous voulons établir, nous opérerons sur deux équations de degrés déterminés, l'une du cinquième degré et l'autre du troisième, par exemple. Cette spécialisation n'altérera en rien la généralité de nos raisonnements. De plus, nous ordonnerons les deux équations considérées suivant les puissances croissantes de x, et nous les écrirons en faisant correspondre les indices et les exposants. Nous aurons ainsi

$$(1)\quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 = 0,$$
$$(2)\quad f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0.$$

En appliquant la méthode de M. Sylvester (1213), nous multiplierons alors successivement la première équation ($n-1$ étant ici égal à 2) par x^2, x, 1; et, la seconde équation ($m-1$ étant ici égal à 4), par 1, x, x^2, x^3, x^4. Nous obtiendrons de cette manière les huit relations (α)

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + a_4 x^6 + a_5 x^7 &= 0,\\
a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + a_5 x^6 &= 0,\\
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 &= 0,\\
b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 &= 0,\\
b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 &= 0,\\
b_0 x^2 + b_1 x^3 + b_2 x^4 + b_3 x^5 &= 0,\\
b_0 x^3 + b_1 x^4 + b_2 x^5 + b_3 x^6 &= 0,\\
b_0 x^4 + b_1 x^5 + b_2 x^6 + b_3 x^7 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Il est clair, sans avoir besoin de répéter les mêmes raisonnements (1213), que les équations (1) et (2) admettront *au moins* une racine commune, si le déterminant S des coefficients des équations ci-dessus est égal à zéro. On a pour ce déterminant

$$(3)\qquad \mathrm{S}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Il est évident et il est facile de vérifier que S n'est autre chose que le déterminant Δ obtenu précédemment (1213), en remarquant seulement que, dans ce cas, les équations proposées étaient écrites de cette manière :

$$\mathrm{F}(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0,$$
$$f(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0.$$

Pour comparer S à Δ, on doit donc échanger d'abord a_0 et a_5, a_1 et a_4, a_2 et a_3; puis, b_0 et b_3, b_1 et b_2. On a ainsi

$$\mathrm{S}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix},$$

et l'on voit que ce déterminant renferme, *dans un autre*

ordre, les mêmes lignes et les mêmes colonnes que Δ qui a pour expression (1213)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

S ne peut donc différer de Δ que par le signe (348). Or, dans la recherche que nous poursuivons, on n'a pas à se préoccuper d'un changement de signe, puisque le déterminant considéré doit être nul dès que les équations données admettent *au moins* une racine commune. Nous confondrons, par conséquent, dans ce qui suit, les deux notations S et Δ, et nous emploierons le déterminant Δ de M. Sylvester sous la forme (3), en nous rappelant que l'ordre de ce déterminant est toujours la somme des degrés des équations proposées.

1216. Supposons maintenant que les équations (1) et (2) admettent *au moins* deux racines communes p_1 et p_2. Nous pourrons poser

$$F(x) = (x - p_1)\,\Phi(x), \qquad f(x) = (x - p_1)\,\varphi(x),$$

et les deux équations

$$\Phi(x) = 0, \qquad \varphi(x) = 0,$$

admettront elles-mêmes *au moins* la racine commune p_2. Exprimons ce fait d'après ce qui précède.

$F(x)$ et $f(x)$ étant du cinquième et du troisième degré, $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ seront du quatrième et du deuxième, et nous aurons

$$(4) \qquad \Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 = 0,$$

$$(5) \qquad \varphi(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 = 0.$$

Or, pour que les équations (4) et (5) aient *au moins* une raison commune p_2, il faut et il suffit (1214) que le déterminant Δ' de Sylvester qui leur correspond soit égal à zéro, c'est-à-dire qu'on ait, en appliquant l'équation (3) du numéro précédent,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, d'après les relations connues entre les racines d'une équation algébrique et ses coefficients (1068, 1080), on a, en rapprochant l'équation (4) de l'équation (1) et l'équation (5) de l'équation (2),

$$a_5 = c_4,$$

$$\frac{a_4}{a_5} = \frac{c_3}{c_4} - p_1, \qquad \text{d'où} \qquad a_4 = c_3 - p_1 c_4,$$

$$\frac{a_3}{a_5} = \frac{c_2}{c_4} - \frac{c_3}{c_4} p_1, \qquad \text{d'où} \qquad a_3 = c_2 - p_1 c_3,$$

$$\frac{a_2}{a_5} = \frac{c_1}{c_4} - \frac{c_2}{c_4} p_1, \qquad \text{d'où} \qquad a_2 = c_1 - p_1 c_2,$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{c_0}{c_4} - \frac{c_1}{c_4} p_1, \qquad \text{d'où} \qquad a_1 = c_0 - p_1 c_1,$$

$$\frac{a_0}{a_5} = -\frac{c_0}{c_4} p_1, \qquad \text{d'où} \qquad a_0 = -p_1 c_0.$$

On trouvera de même

$$b_3 = d_2,$$

$$b_2 = d_1 - p_1 d_2, \qquad b_1 = d_0 - p_1 d_1, \qquad b_0 = -p_1 d_0.$$

Si, dans le déterminant Δ', nous retranchons alors de chaque colonne la colonne qui la suit multipliée par p_1, et si nous tenons compte ensuite des relations qui lient les coefficients des équations (4) et (5) à ceux des équations (1)

et (2), il vient, sans que la valeur de Δ' soit modifiée (359),

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -p_1c_0 & c_0-p_1c_1 & c_1-p_1c_2 & c_2-p_1c_3 & c_3-p_1c_4 & c_4 \\ c_0-p_1c_1 & c_1-p_1c_2 & c_2-p_1c_3 & c_3-p_1c_4 & c_4 & 0 \\ d_0-p_1d_1 & d_1-p_1d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1d_0 & d_0-p_1d_1 & d_1-p_1d_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1d_0 & d_0-p_1d_1 & d_1-p_1d_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1d_0 & d_0-p_1d_1 & d_1-p_1d_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Prenons maintenant le déterminant S ou Δ [1215, équation (3)] et écrivons les mineurs successifs qu'on en déduit, en supprimant d'abord la première et la dernière ligne ainsi que la première et la dernière colonne; puis, les deux premières et les deux dernières lignes ainsi que les deux premières et les deux dernières colonnes, etc. Ces mineurs sont dits les *mineurs principaux* successifs du déterminant Δ, et nous les représenterons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, ...

On voit que, si l'on encadre les éléments du déterminant Δ, comme nous l'indiquons ci-dessous en reprenant la valeur (3) [1215],

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

on obtient les différents mineurs principaux Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., en

supprimant successivement les éléments compris entre les différentes enceintes. Ainsi, on a, *comme premier mineur principal,*

$$(7)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

et il en résulte, en rapprochant (6) et (7),

$$\Delta_1 = \Delta'.$$

Or, si les équations (4) et (5) admettent *au moins* une racine commune, on a $\Delta' = 0$ et, par conséquent, $\Delta_1 = 0$. Si ces équations n'admettent aucune racine commune, on n'a pas $\Delta' = 0$ (1214) et, par conséquent, on n'a pas $\Delta_1 = 0$.

On voit donc que, si les équations données (1) et (2) admettent *au moins* deux racines communes, on a à la fois

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0;$$

mais que, si elles n'en admettent qu'une seule, auquel cas les équations (4) et (5) n'ont aucune racine commune, on a, en même temps que $\Delta = 0$, Δ' ou Δ_1 *différent de zéro.*

1217. Le résultat que nous venons de trouver conduit aux conditions cherchées.

Si les équations (4) et (5) ont *au moins* deux racines communes, le premier mineur principal de leur déterminant Δ' est égal à zéro (1216); mais, comme $\Delta' = \Delta_1$, le premier mineur principal de Δ' est celui de Δ_1, c'est-à-dire le second mineur principal de Δ ou Δ_2.

Par conséquent, si les équations données (1) et (2) admettent *au moins* trois racines communes, on a à la fois

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0.$$

Mais, si elles n'en admettent que deux, les équations (4) et (5) ne peuvent en admettre qu'une seule, et l'on a, en même temps que $\Delta = 0$ et $\Delta_1 = 0$, Δ_1' ou Δ_2 *différent de zéro.*

On peut poursuivre indéfiniment le même raisonnement.

D'une manière générale, *pour que les équations* (1) *et* (2)

aient EXACTEMENT p *racines communes, il faut et il suffit que le déterminant* Δ *qui leur correspond et ses* $p-1$ *premiers mineurs principaux* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{p-1}$, *soient nuls, en même temps que le* $p^{\text{ième}}$ *mineur principal* Δ_p DIFFÉRENT DE ZÉRO.

Tel est le théorème fondamental énoncé pour la première fois par M. Eug. Rouché, et démontré par lui en partant du déterminant de Cauchy. L'intime liaison qui existe entre les méthodes d'élimination que nous avons exposées pouvait faire prévoir que ce théorème s'appliquerait également au déterminant primitif de Bézout et d'Euler, c'est-à-dire à celui de M. Sylvester, sauf les mineurs *considérés* comme principaux.

Équation aux racines communes.

1218. Reprenons les deux équations

$$(1)\quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 = 0,$$

$$(2)\quad f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0.$$

Si elles admettent une seule racine commune, on a (1217), en formant le déterminant de M. Sylvester qui leur correspond et en marquant ses mineurs principaux $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, comme on l'a indiqué (1216),

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 \gtrless 0;$$

si elles ont deux racines communes, on a

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 \gtrless 0;$$

si elles ont trois racines communes, on a

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0, \qquad \Delta_3 \gtrless 0;$$

et ainsi de suite.

On peut donc savoir d'avance combien les équations proposées admettent exactement de racines communes; et, par conséquent, former l'*équation aux racines communes* en employant la méthode du plus grand commun diviseur (1125).

Si ces équations admettent, par exemple, p racines communes, leurs premiers membres auront un plus grand commun diviseur du $p^{\text{ième}}$ degré et, en l'égalant à zéro, on obtiendra l'équation aux racines communes.

Mais on peut aussi trouver cette équation, en continuant à se servir des déterminants.

1219. Pour fixer les idées, supposons que *les équations* (1) *et* (2) du numéro précédent *aient exactement deux racines communes*. Les huit relations (α) établies au n° 1215 seront satisfaites par ces racines communes. Le premier mineur principal différent de zéro étant alors Δ_2 *qui est du quatrième ordre* (1216), considérons seulement parmi les huit relations (α) les quatre équations

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5&=0,\\ b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3&=0,\\ b_0x+b_1x^2+b_2x^3+b_3x^4&=0,\\ b_0x^2+b_1x^3+b_2x^4+b_3x^5&=0, \end{aligned}$$

et éliminons entre elles les trois inconnues x^3, x^4, x^5. Le résultat de l'élimination devra être égal à zéro, et l'on aura (405)

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1x+a_2x^2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_0+b_1x+b_2x^2 & b_3 & 0 & 0\\ 0+b_0x+b_1x^2 & b_2 & b_3 & 0\\ 0+0+b_0x^2 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

Telle est l'*équation aux racines communes* sous forme de déterminant. On peut l'écrire immédiatement de la manière suivante (360, 356), comme équation du second degré :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_0 & b_3 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_3 & 0\\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_3 & 0 & 0\\ b_0 & b_2 & b_3 & 0\\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_2 & b_3 & 0 & 0\\ b_1 & b_2 & b_3 & 0\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}x^2=0$$

Le coefficient de x^2 n'est autre chose que Δ_2 (1216) qui a dû être préalablement calculé et qui, par hypothèse, est différent de zéro. Quant aux autres coefficients de l'équation, on passe immédiatement du coefficient de x^2 à celui de x et au terme constant, en remplaçant les éléments de la première colonne de Δ_2 par ceux qui les précèdent immédiatement, dans la valeur de Δ_1 d'abord, puis dans celle de Δ (1216).

Cette règle est générale.

Après avoir vérifié que les équations proposées ont exactement p racines communes, on forme le premier membre de l'équation qui les a pour racines en prenant pour premier terme

$$\Delta_p x^p;$$

on obtient ensuite les coefficients des termes en x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x^0, *en substituant aux éléments de la première colonne de* Δ_p *ceux qui leur correspondent, immédiatement et successivement, dans* Δ_{p-1}, Δ_{p-2}, ..., Δ, *le déterminant* Δ *étant écrit comme nous l'avons indiqué* (1216).

Applications.

1220. 1° *Exprimer les conditions qui doivent être remplies pour que les équations*

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = 0,$$

$$(2) \qquad b_0 + b_1 x + x^2 = 0,$$

aient deux racines communes.

$n - 1$ étant ici égal à 1, nous multiplierons successivement l'équation (1) par x, 1; $m - 1$ étant égal à 2, nous multiplierons successivement l'équation (2) par 1, x, x^2. Il viendra, pour le système (α) [1215],

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + x^4 = 0, \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = 0, \\ b_0 + b_1 x + x^2 = 0, \\ b_0 x + b_1 x^2 + x^3 = 0, \\ b_0 x^2 + b_1 x^3 + x^4 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant Δ est, par suite,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a en même temps, pour les mineurs principaux,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = 1.$$

L'équation (2) étant du second degré, les équations données ne peuvent admettre plus de deux racines communes, et Δ_2 est de lui-même différent de zéro (1217).

L'équation aux racines communes est d'ailleurs, d'après la règle générale (1219),

$$x^2 + b_1 x + b_0 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (2) elle-même, résultat évident.

Δ_2 étant nécessairement différent de zéro, les conditions cherchées se réduisent à

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0.$$

Si l'on ordonne Δ suivant les éléments de la première colonne, on a (361)

$$\Delta = -a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En ordonnant encore respectivement les deux déterminants du second membre suivant les éléments de leur première colonne, il vient

$$\begin{aligned} \Delta = -a_0^2 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} + a_0 b_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} - a_0 b_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} \\ & + a_0 b_0 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} - a_1 b_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix} + b_0^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Comme Δ_1 doit être égal à zéro, le deuxième et l'avant-dernier déterminant du second membre disparaissent, et l'on a, en ordonnant toujours les déterminants restants suivant les éléments de leur première colonne (361), et en remarquant que le premier d'entre eux se réduit à 1 (355),

$$\Delta = -a_0^2 + a_0 b_0 (a_2 - b_1) + a_0 a_2 b_0 - a_0 b_0 b_1 + a_1 b_0^2 - a_2 b_0^2 (a_2 - b_1) - b_0^3 = 0$$

c'est-à-dire

$$a_0^2 = (a_2 - b_1)(2 a_0 b_0 - a_2 b_0^2) + b_0^2 (a_1 - b_0).$$

Δ_1 devant être nul, on a aussi, en développant toujours de la même manière,

$$\Delta_1 = a_1 - b_1(a_2 - b_1) - b_0 = 0$$

ou

$$a_1 - b_0 = b_1(a_2 - b_1).$$

Il vient donc, en substituant dans la relation précédente,

$$a_0^2 = (a_2 - b_1)(2a_0 b_0 - a_0 b_0^2 + b_0^3 b_1)$$

ou

$$a_0^2 = b_0(a_2 - b_1)[2a_0 - b_0(a^2 - b_1)];$$

ce qui revient à

$$[a_0 - b_0(a_2 - b_1)]^2 = 0.$$

Les conditions cherchées sont, par conséquent, exprimées par la seule égalité

$$a_0 = b_0(a_2 - b_1).$$

On peut vérifier facilement ce résultat en divisant directement

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{par} \quad x^2 + b_1 x + b_0,$$

et en écrivant que le reste du premier degré auquel il faut s'arrêter est identiquement nul.

1221. 2° *Chercher les racines communes aux deux équations*

$$-9 - 11x^2 + 2x^5 = 0, \tag{1}$$

$$81 + 11x^4 + 4x^5 = 0. \tag{2}$$

Pour former le déterminant Δ, nous opérerons comme il suit (1215). Les équations données étant de même degré, $n - 1$ et $m - 1$ sont ici tous deux égaux à 4. Nous multiplierons donc l'équation (1) par x^4, x^3, x^2, x, 1 et, l'équation (2), par 1, x, x^2, x^3, x^4. Nous obtiendrons ainsi les dix relations (2) que nous écrirons de cette manière :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & & -9x^4 & & -11x^6 & & & +2x^9 & = 0, \\
 & & -9x^3 & & -11x^5 & & & +2x^8 & & = 0, \\
 & -9x^2 & & -11x^4 & & & +2x^7 & & & = 0, \\
-9x & & -11x^3 & & & +2x^6 & & & & = 0, \\
-9 & -11x^2 & & & +2x^5 & & & & & = 0, \\
81 & & & +11x^4 & +4x^5 & & & & & = 0, \\
 & 81x & & & +11x^5 & +4x^6 & & & & = 0, \\
 & & 81x^2 & & & +11x^6 & +4x^7 & & & = 0, \\
 & & & 81x^3 & & & +11x^7 & +4x^8 & & = 0, \\
 & & & & 81x^4 & & & +11x^8 & +4x^9 & = 0.
\end{array}$$

Le déterminant Δ a donc pour expression

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	λ	μ
	0	0	0	0	−9	0	−11	0	0	2
	0	0	0	−9	0	−11	0	0	2	0
	0	0	−9	0	−11	0	0	2	0	0
	0	−9	0	−11	0	0	2	0	0	0
	−9	0	−11	0	0	2	0	0	0	0
Δ =	81	0	0	0	11	4	0	0	0	0
	0	81	0	0	0	11	4	0	0	0
	0	0	81	0	0	0	11	4	0	0
	0	0	0	81	0	0	0	11	4	0
	0	0	0	0	81	0	0	0	11	4

Ce déterminant étant du dixième ordre, son développement devient pénible. Nous remarquerons alors que, si nous pouvions le ramener à présenter une colonne d'éléments nuls, sa nullité serait démontrée (354).

On peut essayer d'y arriver de la manière suivante.

Multiplions les différentes colonnes du déterminant par les indéterminées α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, λ, μ, et égalons ensuite à zéro les sommes obtenues en ajoutant les éléments ainsi modifiés des différentes lignes. Nous aurons à considérer le système

$$
\begin{aligned}
-9\varepsilon \quad -11\eta \quad +2\mu &= 0,\\
-9\delta \quad -11\zeta \quad +2\lambda &= 0,\\
-9\gamma \quad -11\varepsilon \quad +2\theta &= 0,\\
-9\beta \quad -11\delta \quad +2\eta &= 0,\\
-9\alpha \quad -11\gamma \quad +2\zeta &= 0,\\
81\alpha \quad +11\varepsilon +4\zeta &= 0,\\
81\beta \quad +11\zeta +4\eta &= 0,\\
81\gamma \quad +11\eta +4\theta &= 0,\\
81\delta \quad +11\theta +4\lambda &= 0,\\
81\varepsilon \quad +11\lambda +4\mu &= 0.
\end{aligned}
$$

Ces équations linéaires homogènes sont toujours compatibles; mais suivant qu'elles admettent une solution unique $\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \mu = 0$ (qui ne peut convenir à la question), ou suivant qu'elles sont indéterminées, le déterminant de leurs coefficients, c'est-à-dire Δ, est différent de zéro ou est égal à zéro (403, 404). Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces équations.

Tout calcul effectué, on parvient à exprimer toutes les inconnues en fonction de α, et l'on trouve

$$\beta = -\frac{15}{7}\alpha, \qquad \gamma = \frac{9}{7}\alpha, \qquad \delta = \frac{27}{7}\alpha,$$

$$\varepsilon = -\frac{81}{7}\alpha, \qquad \zeta = \frac{81}{7}\alpha, \qquad \eta = \frac{81}{7}\alpha,$$

$$\theta = -\frac{405}{7}\alpha, \qquad \lambda = 81\alpha, \qquad \mu = \frac{81}{7}\alpha.$$

Ces valeurs satisfont aux équations posées quel que soit α (qu'on peut faire égal à l'unité). On a donc bien $\Delta = 0$ et, par conséquent, les équations (1) et (2) admettent *au moins* une racine commune.

Il faut maintenant considérer le premier mineur principal Δ_1, et lui appliquer le même procédé.

On vérifie qu'on a encore $\Delta_1 = 0$; et, par conséquent, les équations (1) et (2) admettent *au moins* deux racines communes.

Nous devons à présent consulter le deuxième mineur principal Δ_2, en suivant toujours la même marche.

On a

$$\Delta_2 = \begin{array}{c|cccccc} & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \hline & -9 & 0 & -11 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & -11 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & -11 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 11 & 4 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 & 0 \\ & 81 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \end{array}.$$

On a donc à résoudre le système

$$\begin{aligned} -9\alpha \qquad -11\gamma \qquad\qquad +2\zeta &= 0, \\ -11\beta \qquad\qquad +2\varepsilon \qquad &= 0, \\ -11\alpha \qquad +2\delta \qquad &= 0, \\ 11\gamma + 4\delta \qquad &= 0, \\ 11\delta + 4\varepsilon \qquad &= 0, \\ 81\alpha \qquad\qquad +11\varepsilon + 4\zeta &= 0. \end{aligned}$$

On obtient facilement

$$\beta = -\frac{11}{4}\alpha, \quad \gamma = -2\alpha, \quad \delta = \frac{11}{2}\alpha, \quad \varepsilon = -\frac{121}{8}\alpha, \quad \zeta = -\frac{13}{2}\alpha.$$

Ces valeurs satisfont aux cinq premières équations, quel que soit α; mais elles ne satisfont à la sixième que si $\alpha = 0$. Le système admet donc une solution unique, et Δ_2 est différent de zéro.

Par suite, il est établi que les équations (1) et (2) ont exactement deux racines communes.

Il ne reste donc plus, pour avoir les coefficients de l'équation aux racines communes (1219), qu'à calculer les valeurs numériques de Δ_2 et des deux déterminants qu'on en déduit en substituant aux éléments de la première colonne ceux qui les précèdent dans Δ_1 et dans Δ.

En développant suivant la règle ordinaire (361), on trouve successivement

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 0 & -11 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -11 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 4 & 0 \\ 81 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 215622,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 2 \\ -9 & -11 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 0 & 0 \\ 81 & 0 & 0 & 11 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2\Delta_2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 81 & 0 & 11 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 3\Delta_2$$

L'équation aux racines communes est donc finalement

$$\Delta_2 x^2 + 2\Delta_2 x + 3\Delta_2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Les racines communes sont, par conséquent,

$$x = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2};$$

et le plus grand commun diviseur des polynômes

$$4x^5 + 11x^4 + 81 \quad \text{et} \quad 2x^5 - 11x^2 - 9$$

est $x^2 + 2x + 3$, comme il est facile de le vérifier (1122).

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION.

Transformation des équations.

1222. Nous avons déjà indiqué le but qu'on se propose dans la transformation des équations (1100), et nous avons fait connaître les transformations les plus élémentaires et les plus usuelles. Nous nous proposons de généraliser et d'étendre ces premières notions.

Le problème à résoudre est celui-ci (1100) :

On donne une équation

$$\Phi(z) = 0, \tag{1}$$

de degré m et dont les racines sont $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$. *Il s'agit d'en déduire une nouvelle équation* $\Psi(u) = 0$, TRANSFORMÉE *de la première, dont chaque racine u soit exprimée par une fonction déterminée*

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

de n racines de la proposée.

Il faut qu'on ait à la fois, *quelles que soient les racines* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *considérées,*

$$\Phi(z_1) = 0, \quad \Phi(z_2) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi(z_n) = 0,$$

$$u = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n). \tag{2}$$

Par conséquent, si l'on élimine les n quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entre les $n+1$ équations ci-dessus, l'équation finale en u aura nécessairement pour racines les valeurs correspondant à toutes les combinaisons qui, *sous la forme assignée par la*

relation (2), peuvent exister entre n racines de l'équation (1). Cette équation finale sera donc l'équation cherchée

$$\Psi(u) = 0.$$

En opérant de cette manière, chacune des racines z_1, z_2, ..., z_n, est regardée comme pouvant recevoir respectivement les valeurs des m racines de l'équation $\Phi(z) = 0$. Le nombre des valeurs de u est alors égal au nombre des *arrangements avec répétition* de m objets pris n à n, c'est-à-dire (257) à m^n. Tel sera donc le degré de l'équation finale.

Mais, si, en laissant de côté le cas où l'équation donnée $\Phi(z) = 0$ aurait des racines égales, on s'impose la condition que les valeurs attribuées à z_1, z_2, ..., z_n, soient *distinctes*, on voit que la transformée

$$\Psi(u) = 0,$$

obtenue par l'élimination indiquée, présentera des *solutions étrangères*: et l'on devra diriger les calculs, de manière à éviter ces solutions.

Nous allons appliquer ces explications à quelques exemples, où les racines de la transformée dépendent seulement de *deux* des racines de l'équation proposée, suivant une loi déterminée.

1223. Supposons d'abord, d'une manière générale, que chaque racine u de la transformée doive être égale à une fonction rationnelle quelconque $\varphi(z_1, z_2)$ de deux racines de la proposée. Nous traiterons ensuite quelques cas particuliers.

Pour obtenir la transformée, on devra éliminer z_1 et z_2 entre les trois équations

$$(\alpha) \qquad \Phi(z_1) = 0, \qquad \Phi(z_2) = 0, \qquad u = \varphi(z_1, z_2).$$

Si m est le degré de $\Phi(z) = 0$, le nombre des valeurs de u sera égal au nombre des arrangements avec répétition de m objets pris 2 à 2, c'est-à-dire égal à m^2. Mais, si les deux racines z_1 et z_2 doivent rester distinctes, le nombre des valeurs de u se réduira au nombre des arrangements sans répétition de m objets pris 2 à 2, ou sera égal à $m(m-1)$. Il y aura donc

$$m^2 - m(m-1)$$

ou m solutions étrangères.

Pour éviter ces solutions, on n'a qu'à remplacer dans le système (α) ce qui est permis (*Alg. élém.*), la deuxième équation, $\Phi(z_2)=0$, par l'équation

$$\Phi(z_2)-\Phi(z_1)=0,$$

en divisant en même temps celle-ci par la différence z_2-z_1; ce qui supprime nécessairement les m solutions répondant à $z_2=z_1$.

Pour obtenir immédiatement le quotient de cette division, on remarque qu'on peut écrire, en regardant z_2-z_1 comme un accroissement donné à z_1 et d'après la formule de Taylor (735, 887),

$$\begin{aligned}\Phi(z_2)&=\Phi\big(z_1+\overline{z_2-z_1}\big)\\&=\Phi(z_1)+\Phi'(z_1)\frac{z_2-z_1}{1}\\&\quad+\Phi''(z_1)\frac{(z_2-z_1)^2}{1.2}+\ldots+\Phi^{(m)}(z_1)\frac{(z_2-z_1)^m}{1.2.3\ldots m}=0.\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant passer $\Phi(z_1)$ dans le premier membre et en divisant par z_2-z_1,

$$\frac{\Phi(z_2)-\Phi(z_1)}{z_2-z_1}=\Phi'(z_1)+\Phi''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+\ldots+\Phi^{(m)}(z_1)\frac{(z_2-z_1)^{m-1}}{1.2.3\ldots m}=0.$$

En substituant dans les applications cette équation à la deuxième équation du système (α), on n'aura plus à tenir compte d'aucune solution étrangère.

1224. Il peut arriver que la fonction $\varphi(z_1,z_2)$ soit *symétrique* par rapport aux racines z_1 et z_2 qu'on associe. Le nombre des valeurs distinctes de u est alors égal au nombre des combinaisons de m objets pris deux à deux, c'est-à-dire que le degré de l'équation finale doit devenir en réalité $\frac{m(m-1)}{2}$ au lieu de $m(m-1)$.

1225. 1° ÉQUATION AUX SOMMES DES RACINES PRISES DEUX A DEUX. Les trois équations du système (α) [1223] sont ici :

$$\Phi(z_1)=0,$$

$$\Phi'(z_1)+\Phi''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+\Phi'''(z_1)\frac{(z_2-z_1)^2}{1.2.3}+\ldots=0,$$

$$u=z_1+z_2.$$

La dernière relation étant symétrique par rapport aux racines associées, le degré de l'équation finale doit devenir $\frac{m(m-1)}{2}$ (1224), si le degré de l'équation donnée est m.

Or, le degré de cette équation finale sera d'abord $m(m-1)$ [1223]; mais, comme elle admet la racine z_2+z_1 aussi bien que la racine z_1+z_2, toutes ses racines seront égales deux à deux, et son premier membre sera nécessairement (1061) *un carré parfait*. En en extrayant la racine carrée, l'équation qui donnera toutes les valeurs distinctes de u sera donc bien du degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

Prenons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$z^3+pz+q=0.$$

Nous aurons à traiter les trois équations

$$z_1^3+pz_1+q=0, \tag{1}$$

$$3z_1^2+p+3z_1(z_2-z_1)+(z_1-z_2)^2=0, \tag{2}$$

$$u=z_1+z_2. \tag{3}$$

Nous éliminerons d'abord z_2 entre les deux dernières équations, en substituant $u-z_1$ à la place de z_2 dans l'équation (2). Cette équation deviendra alors, en développant et en simplifiant,

$$z_1^2-uz_1+u^2+p=0. \tag{2 bis}$$

Il ne restera plus qu'à éliminer z_1 entre les équations (1) et (2 *bis*). Pour plus de simplicité, nous écrirons z au lieu de z_1, et nous appliquerons la méthode de Cauchy aux deux équations

$$z^3+pz+q=0, \qquad z^2-uz+u^2+p=0.$$

Nous diviserons les premiers membres de ces équations l'un par l'autre, et nous remplacerons la première équation par le reste du second degré, égalé à zéro, auquel nous nous arrêterons (1205, 1°). Nous aurons ainsi à considérer en dernier lieu les deux équations de même degré

$$z^2-uz+u^2+p=0, \qquad uz^2-u^2z+q=0.$$

Nous en déduirons

$$\frac{1}{u} = \frac{uz - (u^2 + p)}{u^2 z - q}, \quad \frac{z - u}{uz - u^2} = \frac{u^2 + p}{q},$$

c'est-à-dire, sous forme entière,

$$0.z + (u^3 + pu - q) = 0,$$

$$(u^3 + pu - q)z - u(u^3 + pu - q) = 0.$$

L'équation finale, déterminant des coefficients de ces deux équations égalé à zéro (1202), est donc

$$(u^3 + pu - q)^2 = 0$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$u^3 + pu - q = 0,$$

équation de degré $\frac{m(m-1)}{2} = 3$.

L'équation finale ainsi obtenue se confond, sauf u mis à la place de z, avec la transformée en $-z$ (1105) de la proposée. Et, en effet, la condition (1080)

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entraîne

$$u = z_1 + z_2 = -z_3.$$

Remarque. — Supposons que l'équation du troisième degré considérée ne soit pas privée de son second terme. Elle sera de la forme

$$\Phi(z) = z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

En désignant les trois racines par z_1, z_2, z_3, on aura à la fois, d'une manière générale,

$$u = z_1 + z_2, \qquad a = -(z_1 + z_2 + z_3),$$

c'est-à-dire

$$z_3 = -u - a.$$

La transformée cherchée est donc alors immédiatement

$$\Phi(-u - a) = 0$$

ou

$$u^3 + 2au^2 + (a^2 + b)u + (ba - c) = 0.$$

1226. 2° Équation aux différences des racines prises deux a deux.

Les trois équations du système (α) [1223] sont ici

$$\Phi(z_1) = 0,$$

$$\Phi'(z_1) + \Phi''(z_1)\frac{z_2 - z_1}{1.2} + \Phi'''(z_1)\frac{(z_2 - z_1)^2}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

$$u = z_2 - z_1.$$

On éliminera d'abord z_2 entre les deux dernières équations, en remplaçant dans la deuxième équation la différence $z_2 - z_1$ par u; et, en écrivant ensuite z à la place de z_1, il ne restera plus qu'à éliminer z entre les deux équations

$$\Phi(z) = 0, \qquad \Phi'(z) + \Phi''(z)\frac{u}{1.2} + \Phi'''(z)\frac{u^2}{1.2.3} + \ldots = 0.$$

L'équation finale doit être de degré $m(m-1)$ [1223]; mais, comme elle a pour racines aussi bien $z_2 - z_1$ que $z_1 - z_2$, toutes ses racines sont nécessairement deux à deux égales et de signes contraires. *Il n'y entre donc que des puissances paires de u*, et on peut l'abaisser au degré moitié $\frac{m(m-1)}{2}$ en posant $u^2 = V$. L'équation en V est alors *l'équation aux carrés des différences des racines.*

Nous avons déjà traité cette question (1192), et nous avons appliqué la solution trouvée, de deux manières différentes, à l'équation du troisième degré (1193, 1210).

1227. 3° Équation aux produits des racines prises deux a deux.

Les trois équations du système (α) sont ici

$$\Phi(z_1) = 0,$$

$$\Phi'(z_1) + \Phi''(z_1)\frac{z_2 - z_1}{1.2} + \Phi'''(z_1)\frac{(z_2 - z_1)^2}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

$$u = z_1 z_2.$$

L'équation finale doit être de degré $m(m-1)$; mais, puisqu'elle a pour racines aussi bien $z_2 z_1$ que $z_1 z_2$, toutes ses racines sont nécessairement égales deux à deux, et son premier membre est nécessairement un carré parfait, comme dans le cas de l'équation aux sommes (1225). En en ex-

trayant la racine carrée, en trouvera donc une équation de degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

Appliquons encore ce qui précède à l'équation du troisième degré. Les équations ci-dessus deviendront (1225)

$$z_1^3 + pz_1 + q = 0, \tag{1}$$

$$3z_1^2 + 3z_1(z_2 - z_1) + (z_2 - z_1)^2 + p = 0, \tag{2}$$

$$u = z_1 z_2. \tag{3}$$

Nous éliminerons d'abord z_2 en remplaçant z_2 par $\frac{u}{z_1}$ dans l'équation (2) qui, en développant et en chassant les dénominateurs, prendra la forme

$$z_1^4 + (u+p)z_1^2 + u^2 = 0. \tag{2 bis}$$

En écrivant z au lieu de z_1, nous avons donc maintenant à éliminer z entre les équations (1) et (2 *bis*).

Pour simplifier les calculs, sans cela assez pénibles, nous commencerons par multiplier l'équation (1) par z, et nous la retrancherons de l'équation (2 *bis*). Il viendra

$$uz^2 - qz + u^2 = 0. \tag{3}$$

Cette équation (3) pourra remplacer l'équation (1). Nous diviserons alors l'un par l'autre les premiers membres des équations (2 *bis*) et (3), et le reste du second degré auquel nous nous arrêterons pourra, égalé à zéro, être substitué à l'équation (2 *bis*). Nous aurons ainsi à éliminer z entre les deux équations de même degré

$$uz^2 - qz + u^2 = 0,$$
$$(pu^2 + q^2)z^2 - qu^2 z + u^4 = 0.$$

En appliquant alors la méthode de Cauchy, nous trouverons les relations

$$\frac{u}{pu^2 + q^2} = \frac{qz - u^2}{qu^2 z - u^4},$$

$$\frac{uz - q}{(pu^2 + q^2)z - qu^2} = \frac{1}{u^2},$$

qui, ramenées à la forme entière, conduisent au système

$$q(u^3 - pu^2 - q^2)z - u^2(u^3 - pu^2 - q^2) = 0,$$
$$(u^3 - pu^2 - q^2)z + 0 \quad . \quad = 0.$$

Le déterminant des coefficients de ces équations égalé à zéro est

l'équation finale cherchée. On a donc pour cette équation

$$u^2(u^3 - pu^2 - q^2)^2 = 0$$

ou, en extrayant la racine carrée et en supprimant le facteur u qui ne peut pas être nul,

$$u^3 - pu^2 - q^2 = 0.$$

1228. 4° Équation aux rapports des racines prises deux a deux.

Les trois équations du système (α) sont ici

$$\Phi(z_1) = 0,$$

$$\Phi'(z_1) + \Phi''(z_1)\frac{z_2 - z_1}{1.2} + \Phi'''(z_1)\frac{(z_2 - z_1)^2}{1.2.3} + \ldots = 0,$$

$$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

L'équation finale doit être du degré $m(m-1)$; mais, puisqu'elle admet pour racines aussi bien $\frac{z_1}{z_2}$ que $\frac{z_2}{z_1}$, elle est *réciproque* (1116), et l'on pourra toujours abaisser son degré au degré moitié $\frac{m(m-1)}{2}$ (1119).

Pour l'équation du troisième degré, les équations ci-dessus deviendront (1186)

(1) $$z_1^3 + pz_1 + q = 0,$$

(2) $$3z_1^2 + 3z_1(z_2 - z_1) + (z_2 - z_1)^2 + p = 0,$$

(3) $$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

On éliminera d'abord z_2 en remplaçant z_2 par uz_1 dans l'équation (2) qui, en développant et en simplifiant, prendra la forme

(2 *bis*) $$(u^2 + u + 1)z_1^2 + p = 0.$$

En écrivant z au lieu de z_1, il restera à éliminer z entre les équations (1) et (2 *bis*).

Nous simplifierons les calculs en divisant l'un par l'autre les premiers membres de ces équations. Nous ne pourrons pas obtenir un reste du second degré; mais nous nous arrêterons au reste du premier degré qui, égalé à zéro, nous donnera l'équation (1 *bis*) par laquelle nous aurons le droit de remplacer l'équation (1). Cette équation (1 *bis*) a pour expression

(1 *bis*) $$p(u^2 + u)z + q(u^2 + u + 1) = 0.$$

En divisant alors l'un par l'autre les premiers membres des équations (2 *bis*) et (1 *bis*), nous parviendrons à un reste du premier degré qui, égalé à zéro, nous fournira à son tour une équation (2 *ter*) par laquelle il nous sera permis de remplacer l'équation (2 *bis*).

Nous aurons donc enfin à exprimer que les deux équations

$$(1\,bis) \qquad p(u^2+u)z+q(u^2+u+1)=0,$$

$$(2\,ter) \qquad -q(u^2+u+1)^2z+p^2(u^2+u)=0$$

ont une racine commune. Le déterminant des coefficients de ces équations, égalé à zéro, nous conduira à l'équation finale

$$p^3(u^2+u)^2+q^2(u^2+u+1)^3=0$$

ou, en développant et en réduisant, à l'équation

$$q^2u^6+3q^2u^5+(6q^2+p^3)u^4 \\ +(7q^2+2p^3)u^3+(6q^2+p^3)u^2+3q^2u+q^2=0,$$

qui est bien *réciproque* (1119).

En divisant ses deux membres par u^3 et en posant

$$u+\frac{1}{u}=V,$$

on la ramène facilement (1119) à l'équation de degré moitié moindre, $\frac{m(m-1)}{2}=3$,

$$q^2V^3+3q^2V^2+(3q^2+p^3)V+q^2+2p^3=0.$$

1229. Nous démontrerons encore ce théorème important :

Toute transformation rationnelle peut être ramenée à une transformation entière.

Soit, sous forme entière, l'équation

$$F(z)=0,$$

supposée de degré m, et désignons par φ et ψ des fonctions entières; considérons la fonction rationnelle correspondante de ses racines

$$u=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

On obtiendra la transformée en u en éliminant z entre les équations

$$F(z)=0, \qquad u=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

A chaque racine de l'équation $F(z) = 0$ répond une seule valeur de u. Il en résulte que, si les polynômes $F(z)$ et $\psi(z)$ sont *premiers entre eux*, la transformée en u a m racines finies et est aussi de degré m. Mais, si $F(z)$ et $\psi(z)$ ont un plus grand commun diviseur de degré p, la transformée en u a p racines infinies et s'abaisse, par conséquent (1114), au degré $m - p$. Mais, dans ce cas, rien n'empêche de diviser $F(z)$ par ce même plus grand commun diviseur, afin d'abaisser aussi l'équation $F(z) = 0$ au degré $m - p$. Nous pouvons donc regarder les deux polynômes $F(z)$ et $\psi(z)$ comme étant *premiers entre eux*, c'est-à-dire l'équation donnée et sa transformée comme étant de même degré.

Cela posé, nous avons prouvé (1194, *Remarque*) que, lorsque deux polynômes $F(z)$ et $\psi(z)$, de degrés m et n, sont premiers entre eux, on peut toujours déterminer deux autres polynômes $F_1(z)$ et $\psi_1(z)$, de degrés $m-1$ et $n-1$, tels qu'on ait

$$F(z)\psi_1(z) - \psi(z)F_1(z) = 1. \tag{1}$$

Pour toute racine de l'équation donnée, on a $F(z) = 0$, et la relation (1) devient

$$-\psi(z)F_1(z) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \psi(z) = -\frac{1}{F_1(z)}.$$

On a alors

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = -\varphi(z)F_1(z),$$

et la fonction rationnelle considérée se trouve ramenée à la forme entière.

$F_1(z)$ est de degré $m-1$, $\varphi(z)$ est au moins du premier degré. On peut donc diviser $-\varphi(z)F_1(z)$ par $F(z)$. Si Q est le quotient et $f(z)$ le reste obtenus, on a

$$-\varphi(z)F_1(z) = F(z)Q + f(z)$$

ou, pour toute racine de $F(z) = 0$,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = -\varphi(z)F_1(z) = f(z).$$

Comme $f(z)$ est de degré inférieur à $F(z)$, la fonction rationnelle ramenée à la forme entière est de degré inférieur à $F(z)$, c'est-à-dire *au plus* du degré $m-1$.

On peut donc ajouter que la fonction rationnelle la plus générale d'une racine d'une équation algébrique de degré m est, par rapport à cette racine, une fonction entière de degré $m-1$.

1230. Ce théorème peut s'étendre immédiatement au cas où l'on a affaire à une fonction rationnelle de plusieurs racines de l'équation proposée.

En effet, admettons que la fonction rationnelle

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

renferme, avec la racine z, d'autres racines $z_1, z_2, z_3, \ldots$, de l'équation $F(z)=0$. D'après ce qu'on vient de voir (1229), on aura au plus

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{m-1} z^{m-1},$$

et, dans cette relation, $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ seront des *fonctions rationnelles* des autres racines $z_1, z_2, z_3, \ldots$, qu'on pourra, respectivement et d'après ce qui précède, rendre *entières* relativement à la deuxième racine z_1, puis par rapport à la troisième z_2, et ainsi de suite; de sorte que, finalement, *toute fonction rationnelle de plusieurs racines d'une équation algébrique peut être ramenée à une fonction entière de ces mêmes racines.*

De l'abaissement des équations.

1231. On dit qu'on *abaisse* une équation toutes les fois qu'on peut diminuer son degré ou ramener sa résolution à celle d'autres équations de degrés plus simples.

1232. Toute équation $F(z)=0$, dont les termes ne renferment que des puissances de z dont les exposants soient multiples d'un même nombre p, est susceptible d'abaissement.

En effet, si le degré de l'équation est mp et si l'on pose $u=z^p$, il est clair que l'équation $F(z)=0$ de degré mp sera remplacée par une équation $F(\sqrt[p]{u})=0$ ou $\varphi(u)=0$ de degré m.

Toute équation *réciproque*, de première ou de seconde espèce (1119, 1120), peut s'abaisser à un degré moitié moindre.

D'une manière générale, l'abaissement d'une équation a lieu toutes les fois qu'on parvient, par un procédé quelconque, à décomposer son premier membre en deux ou plusieurs facteurs (1065). Toute équation qui a des racines égales est susceptible d'abaissement (1138).

1233. Dans l'ensemble des nombres mesurables, on peut, si l'on veut, regarder les uns comme *connus*, les autres comme *inconnus*. On peut, par exemple, admettre cette distinction entre les nombres commensurables ou *rationnels* et les nombres incommensurables ou *irrationnels* (*Arithm.*, 281, 283).

Si l'on a une équation algébrique à une seule variable $F(z) = 0$, ses coefficients peuvent être des *fonctions rationnelles* des quantités, quelles qu'elles soient, qu'on regarde comme *connues*.

On appelle alors *diviseur rationnel* du premier membre $F(z)$ tout diviseur, fonction entière de z, dont les coefficients sont aussi des fonctions rationnelles des quantités regardées comme *connues*.

D'une manière générale, toute fonction rationnelle de ces quantités est elle-même une quantité rationnelle.

Ces définitions s'étendent immédiatement aux fonctions entières de plusieurs variables.

1234. Cela posé, et conventionnellement, *toute fonction entière* $F(z)$ *est dite* IRRÉDUCTIBLE, *lorsqu'elle n'admet*, dans le sens indiqué, *aucun diviseur rationnel. L'équation correspondante*, $F(z) = 0$, *est, à son tour, une équation irréductible.*

Il est clair qu'une fonction entière et l'équation correspondante sont réductibles ou irréductibles, suivant qu'on regarde comme connue telle ou telle classe de quantités.

Par exemple, l'équation

$$z^2 - 3 = 0$$

est *irréductible*, si les quantités *connues* sont les seuls nombres rationnels. Mais, si les quantités connues comprennent aussi les nombres irrationnels, racines carrées des nombres rationnels, la même équation devient *réductible*, puisque son pre-

mier membre est le produit des deux facteurs *rationnels* (1233) $z-\sqrt{3}$ et $z+\sqrt{3}$.

De même, l'équation

$$z^2+3=0$$

est *irréductible,* si les quantités *connues* sont les seuls nombres réels. Mais, si les quantités connues comprennent aussi les nombres imaginaires, tels que nous les avons considérés (80) et suiv.), la même équation devient *réductible,* puisque son premier membre est le produit des deux facteurs rationnels $z-i\sqrt{3}$ et $z+i\sqrt{3}$.

1235. Une équation irréductible à coefficients *connus ou rationnels* (1233) ne peut avoir que des racines *simples;* car, d'après la théorie des racines égales (1138), les racines multiples d'une équation algébrique sont données par des équations de degrés moindres, à coefficients rationnels, dont les premiers membres sont alors des diviseurs rationnels du premier membre de l'équation proposée.

1236. F (z) *étant un polynôme entier* z *à coefficients rationnels et* $F(z)=0$ *étant une équation irréductible en raison du choix des quantités connues,* $\Phi(z)$ *étant à son tour une fonction rationnelle en raison du même choix, il suffit que l'équation* $\Phi(z)=0$ *admette une seule racine* z_1 *de l'équation* $F(z)=0$, *pour qu'elle admette toutes les autres.*

Soit, en effet, en désignant par φ et ψ des fonctions entières,

$$\Phi(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

On en déduit

$$\Phi(z)\psi(z)=\varphi(z),$$

et l'on voit que z_1, annulant $\Phi(z)$, annule aussi $\varphi(z)$. Par conséquent, z_1 est une racine commune à $F(z)=0$ et à $\varphi(z)=0$. Il existe donc (1125) un plus grand commun diviseur D, au moins du premier degré, entre les deux polynômes $\varphi(z)$ et $F(z)$, et ce plus grand commun diviseur, obtenu par divisions successives, est nécessairement rationnel dans le sens indiqué.

Comme le polynôme F (z) ne peut pas, par hypothèse, admettre de diviseur rationnel autre qu'elle-même, il

faut alors que, sauf un facteur constant qu'on peut toujours supprimer dans l'équation correspondante, $F(z)$ se confonde avec D. Par conséquent, $\varphi(z)$ est le produit de D ou de $F(z)$ par un autre polynôme $\chi(z)$, et l'on peut écrire

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{\psi(z)} F(z),$$

de sorte que l'équation $\Phi(z) = 0$ est bien satisfaite par toutes les racines de l'équation $F(z) = 0$; car $\psi(z)$ est premier avec $F(z)$.

1237. Lorsque deux racines d'une équation algébrique sont liées par une relation donnée, on peut, dans certains cas, *abaisser* l'équation, en opérant par voie d'élimination.

Soit l'équation de degré m

$$F(z) = 0, \tag{1}$$

dont deux des racines, z et z_1, sont liées par la relation entière

$$\varphi(z, z_1) = 0. \tag{2}$$

On pourra éliminer z_1 entre cette équation et l'équation $F(z_1) = 0$, et l'on sera ainsi conduit à l'équation finale en z

$$\Phi(z) = 0. \tag{3}$$

Or, si l'équation donnée (1) est *irréductible*, $\Phi(z)$ devra être divisible exactement par $F(z)$ [1236]. Par conséquent, l'équation (3) sera plus compliquée ou aussi compliquée que l'équation (1) dont la résolution, en général, n'aura pas fait un pas. Mais, si l'équation (1) est *réductible*, elle ne rentre pas forcément dans l'équation (3). Le plus grand commun diviseur entre $\Phi(z)$ et $F(z)$ peut être alors différent de $F(z)$ et, dans cette hypothèse, l'abaissement de l'équation donnée a lieu.

1238. Pour le montrer, nous traiterons la question suivante :

On suppose que deux des racines z et z_1 de l'équation réductible $F(z) = 0$ sont liées par la relation $z + z_1 = a$, et l'on demande d'abaisser l'équation.

On devra (1237) éliminer z_1 entre les deux équations

$$F(z_1) = 0, \tag{1}$$

$$z + z_1 = a. \tag{2}$$

L'équation finale en z sera donc

$$F(a - z) = 0. \tag{3}$$

Les deux polynômes $F(z)$ et $F(a - z)$ auront alors un plus grand commun diviseur D, au moins du deuxième degré, et l'on pourra décomposer $F(z)$ en facteurs plus simples.

Le plus grand commun diviseur D sera évidemment du deuxième degré, s'il n'y a que deux racines z et z_1 dont la somme soit égale à a, l'équation finale (3) étant satisfaite aussi bien par z_1 que par z, en raison de la symétrie résultant de l'équation (2). D sera de degré supérieur au deuxième, s'il existe plusieurs couples de racines de l'équation donnée dont la somme soit a. Il sera enfin du premier degré, si l'équation donnée a seulement une racine égale à $\frac{a}{2}$.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$F(z) = z^3 - 8z^2 + 17z - 10 = 0,$$

dont deux racines ont une somme égale à 3. L'équation finale est ici

$$F(3 - z) = -z^3 + z^2 + 4z - 4 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des deux polynômes $F(z)$ et $F(3 - z)$ est égal à

$$-z^2 + 3z - 2.$$

On peut donc décomposer $F(z)$ en deux facteurs

$$-z^2 + 3z - 2 \quad \text{et} \quad -z + 5,$$

c'est-à-dire abaisser l'équation proposée en ramenant sa résolution à celle des deux équations

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad z - 5 = 0,$$

qui donnent les trois racines 1, 2, 5, dont les deux premières ont une somme égale à 3.

Recherche des racines imaginaires.

1239. Comme complément du principe fondamental de la théorie des équations (1053), nous avons indiqué précédemment (1060) le procédé géométrique qu'on peut suivre pour trouver *graphiquement* les racines réelles ou imaginaires d'une équation.

Si l'on veut opérer *algébriquement*, on a recours à l'élimination.

L'équation proposée étant

$$F(z) = 0,$$

la variable z est, pour toute racine imaginaire, de la forme $x + yi$, x et y représentant des quantités réelles. Si l'on substitue ce binôme à la place de z, l'équation, comme on le sait (99), prend la forme

$$(1) \qquad F(z) = F(x + yi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = 0.$$

Toutes les fois qu'on atteint une racine de l'équation, le module de $F(z)$ ou

$$\sqrt{[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2}$$

s'annule, et réciproquement (91, 131). Les deux équations

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

sont donc satisfaites à la fois.

La question revient, par suite, à éliminer x entre ces deux équations et à déterminer les racines réelles de l'équation finale en y. On trouve les valeurs réelles correspondantes de x, en cherchant, pour chaque valeur de y, les racines communes aux équations (2) [1215 et suiv.].

L'équation finale en y admettant, par exemple, la racine réelle $y = b$, et les deux équations

$$\varphi(x, b) = 0, \qquad \psi(x, b) = 0,$$

admettant alors la racine réelle $x = a$, l'équation $F(z) = 0$ est satisfaite à son tour par la racine imaginaire $z = a + bi$. Si ses coefficients sont réels, elle admet en même temps, sans calcul, la racine imaginaire conjuguée $a - bi$ (1075).

1240. Soit, par exemple, l'équation

$$F(z) = z^3 - 4z^2 + z + 26 = 0, \tag{1}$$

on écrira immédiatement

$$\varphi(x, y) = x^3 - 4x^2 + x + 26 - (6x - 8)\frac{y^2}{1.2} = 0,$$

$$\psi(x, y) = 3x^2 - 8x + 1 - 6\frac{y^2}{1.2.3} = 0,$$

ou

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = x^3 - 4x^2 - (3y^2 - 1)x + 2(2y^2 + 13) = 0, \\ \psi(x, y) = 3x^2 - 8x - (y^2 - 1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

En éliminant x entre ces deux équations par la méthode de Cauchy, on trouvera facilement l'équation finale

$$48y^6 + 312y^4 + 507y^2 - 10092 = 0$$

et, en posant $y^2 = u$, tout sera ramené à la résolution de l'équation du troisième degré

$$48u^3 + 312u^2 + 507u - 10092 = 0.$$

Disparition des radicaux.

1241. On a souvent à considérer des équations contenant des radicaux. Les procédés qu'on emploie pour calculer les racines d'une équation supposant que l'inconnue n'est engagée sous aucun radical, il est important de pouvoir remplacer une équation compliquée de radicaux par une autre ne renfermant que des termes rationnels. D'une manière générale, la disparition ou, comme on dit aussi, l'évanouissement des radicaux d'une équation revient à une question d'élimination.

En effet, étant donnée une équation compliquée de n radicaux, on peut égaler chacun d'eux à une inconnue auxiliaire. On obtient ainsi n équations, qu'on rendra immédiatement rationnelles en élevant les deux membres de chacune d'elles à la puissance marquée par l'indice du radical qu'elle contient. A ces n équations, on joindra l'équation primitive devenue également rationnelle par la substitution des inconnues auxiliaires aux différents radicaux qu'elles représentent. On constituera de cette manière un système de $n + 1$ équations

rationnelles dont on déduira, par l'élimination des n inconnues auxiliaires, l'équation finale débarrassée de tous radicaux; car les méthodes d'élimination n'en introduisent aucun.

1242. Il faut remarquer avec soin que l'équation finale conduit à toutes les valeurs de l'inconnue qui satisfont à l'équation primitive, quand on tient compte des valeurs multiples des différents radicaux qu'elle contient (117), ou des équations diverses qui y sont ainsi renfermées. Cela tient à ce que, lorsqu'on égale un radical à une inconnue auxiliaire et qu'on élève ensuite les deux membres de l'égalité à la puissance marquée par l'indice du radical, l'équation obtenue reste la même, quelle que soit la détermination choisie parmi toutes celles dont le radical est susceptible (121).

1243. Soit, par exemple, l'équation

$$x + \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+2} = 0.$$

Nous poserons

$$\sqrt{x+1} = y, \qquad \sqrt[3]{x+2} = z,$$

et nous en déduirons les trois équations rationnelles

$$x + y - z = 0, \qquad x + 1 = y^2, \qquad x + 2 = z^3.$$

Il faut éliminer entre ces équations les deux inconnues auxiliaires y et z.

La première équation donnant $y = z - x$, la deuxième devient

$$z^2 - 2xz + x^2 - x - 1 = 0.$$

Il reste donc à éliminer z entre cette dernière équation et la troisième du système, qui est

$$z^3 - x - 2 = 0.$$

En divisant l'un par l'autre les premiers membres de ces équations, on pourra remplacer l'équation en z^3 par le reste du second degré, égalé à zéro, auquel on s'arrêtera. On aura donc à traiter les deux équations

$$z^2 - 2xz + x^2 - x - 1 = 0,$$

$$2xz^2 - (x^2 - x - 1)z - x - 2 = 0;$$

et, en leur appliquant la méthode de Cauchy, on parviendra facilement à l'équation finale

$$x^6 - 3x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 - 11x + 3 = 0.$$

1244. Toutes les fois qu'un artifice quelconque permet d'éviter l'emploi, toujours assez pénible, des méthodes d'élimination, il ne faut pas manquer d'y avoir recours.

Nous allons indiquer les cas les plus simples où l'élimination peut être éludée.

1245. Lorsque l'équation proposée ne renferme qu'un seul radical, on l'isole dans l'un des membres, et l'on élève ensuite l'équation à la puissance marquée par l'indice du radical.

1246. Lorsque l'équation proposée renferme plusieurs radicaux, il est bien clair qu'on ne peut pas, en général, faire évanouir successivement chacun d'eux par la règle qu'on vient de rappeler; car, en supposant seulement l'existence de deux radicaux, l'évanouissement du premier fait nécessairement apparaître dans l'équation d'autres radicaux qui ne s'y trouvaient pas primitivement.

Si l'on a, par exemple,

$$x+\sqrt[5]{x+1}=\sqrt[4]{x+3},$$

il viendra, en élevant les deux membres à la quatrième puissance,

$$x^4+4x^3\sqrt[5]{x+1}+6x^2\sqrt[5]{(x+1)^2}+4x\sqrt[5]{(x+1)^3}+\sqrt[5]{(x+1)^4}=x+3.$$

1247. Lorsque l'équation proposée renferme seulement deux radicaux, *dont l'un est du second degré*, on peut, par l'application répétée de la règle du n° 1245, les faire évanouir successivement, pourvu qu'on commence par faire disparaître celui dont l'indice est le plus élevé. Cela tient à ce que les puissances d'un radical carré ne peuvent pas donner naissance à de nouvelles quantités radicales.

Si l'on a, par exemple,

$$x+\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{x+5},$$

il viendra successivement, en élevant d'abord au cube et ensuite au carré,

$$(x+\sqrt{x+1})^3=x+5,$$

$$x^3+3x^2\sqrt{x+1}+3x(x+1)+(x+1)\sqrt{x+1}=x+5,$$

$$x^3+3x^2+2x-5=-(3x^2+x+1)\sqrt{x+1},$$

$$(x^3+3x^2+2x-5)^2=(3x^2+x+1)^2(x+1).$$

1248. Lorsque l'équation proposée ne renferme que deux radicaux du second degré, on peut les isoler dans un membre et élever l'équation deux fois de suite au carré.

Si l'on a, par exemple,

$$x - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-5},$$

on écrira successivement

$$x = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-5},$$

$$x^2 = x - 1 + x - 5 + 2\sqrt{(x-1)(x-5)},$$

$$x^2 - 2x + 6 = 2\sqrt{(x-1)(x-5)},$$

$$(x^2 - 2x + 6)^2 = 4(x-1)(x-5).$$

1249. Enfin, si l'équation proposée ne renferme que deux radicaux cubiques, on peut encore les faire disparaître très simplement en les isolant d'abord dans un même membre.

Si l'on a, par exemple,

$$x + \sqrt[3]{x+b} = \sqrt[3]{x+a},$$

on en déduira

$$x = \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b},$$

et l'on élèvera d'abord au cube les deux membres de l'équation. On aura

$$x^3 = (x+a) - 3\sqrt[3]{(x+a)^2(x+b)} + 3\sqrt[3]{(x+a)(x+b)^2} - (x+b).$$

Il en résulte

$$x^3 - (a-b) = -3\sqrt[3]{(x+a)(x+b)}\left[\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b}\right].$$

On peut alors remplacer par x la parenthèse du second membre et, en élevant encore au cube, on a, comme équation finale sans radicaux, l'équation du neuvième degré

$$[x^3 - (a-b)]^3 = -27x^3(x+a)(x+b).$$

LIVRE QUATORZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES DE LA QUESTION.

1250. Nous avons indiqué précédemment (1041) la distinction qu'on doit faire entre les équations *numériques* et les équations *algébriques*, au point de vue de leur résolution. Ce Livre est consacré à la résolution des équations numériques.

Le problème est celui-ci : *Étant donnée une équation numérique quelconque* (c'est-à-dire dont les coefficients sont des nombres connus et dont les racines ne présentent aucune relation spéciale), *trouver les valeurs numériques des racines de cette équation, exactement si cela est possible, avec une approximation fixée d'avance dans le cas contraire.*

Ce problème se divise ordinairement en deux parties : il faut d'abord *séparer* les racines, il faut ensuite les *calculer*.

La séparation des racines consiste à déterminer pour toute racine réelle deux nombres qui la comprennent et qui ne comprennent qu'elle.

Si l'équation proposée a des racines multiples, il faut en outre marquer le degré de multiplicité de chacune d'elles; mais, dans la pratique, on peut toujours ramener la résolution d'une pareille équation à celle d'équations de degrés inférieurs et n'ayant que des racines simples (1138).

Nous nous occuperons, en premier lieu, de la séparation des racines. Nous démontrerons, à ce sujet, plusieurs théorèmes très importants, qui s'y rapportent directement ou

indirectement en éclairant sur le nombre possible des racines de chaque espèce, et qui font suite, en quelque sorte, aux propriétés générales des polynômes établies précédemment (1043 et suiv.), propriétés dont nous ferons aussi un fréquent usage.

Nous traiterons en second lieu du calcul numérique des racines séparées, en distinguant entre les racines commensurables et les racines incommensurables.

Nous supposerons, sauf avertissement contraire, *qu'il s'agit d'équations à coefficients réels.*

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈME DE DESCARTES.

Définitions.

1251. Quand deux termes d'un polynôme à coefficients réels sont de *signes contraires*, on dit qu'ils présentent une *variation*; quand ils sont *de même signe*, ils présentent une *permanence*.

Le premier membre de l'équation

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

offre trois variations et deux permanences.

Quand une équation (dont le second membre est zéro) est *complète*, c'est-à-dire quand il n'existe aucune *lacune* entre ses termes, la somme des nombres de variations et de permanences de son premier membre reproduit évidemment son degré.

Propositions préliminaires.

1252. 1° *Dans un polynôme, entre deux termes de signes contraires, il y a toujours un nombre impair de variations; entre deux termes de même signe, il y a toujours un nombre pair de variations* (zéro est un nombre pair).

Cette remarque est évidente.

1253. 2° *Lorsqu'une équation algébrique* $f(x) = 0$, *dont le premier terme a été rendu positif, n'admet que des racines négatives et des racines imaginaires, le dernier terme de son premier membre est nécessairement positif.*

En effet, si ce dernier terme était *négatif*, l'équation aurait au moins, contre l'hypothèse, *une racine positive* (1054, 1055).

1254. 3° *a étant un nombre positif, si l'on multiplie le polynôme $f(x)$ par un binôme de la forme $x-a$, le nombre des variations du produit surpasse toujours d'un nombre impair (qui peut être égal à 1) le nombre des variations du multiplicande.*

Pour démontrer ce lemme, mettons en évidence les variations du multiplicande, en le partageant en groupes de termes de même signe.

Le premier groupe se compose du premier terme $\mathrm{M}x^m$ de $f(x)$, supposé positif, et des termes suivants qui ont le même signe. Un nouveau groupe commence au premier terme négatif $-\mathrm{N}x^n$, et est formé de ce terme et de tous les termes négatifs qui le suivent. Le troisième groupe commence au nouveau terme positif $+\mathrm{P}x^p$ qui apparaît, et comprend ce terme et tous les termes positifs qui lui succèdent. Et ainsi de suite. Chaque groupe peut ne contenir qu'un seul terme.

On peut alors écrire le polynôme $f(x)$ en n'indiquant que le premier terme de chaque groupe, sauf pour le dernier groupe dont on indiquera les deux termes extrêmes $\pm \mathrm{U}x^u$ et $\pm \mathrm{V}$. La multiplication sera alors représentée comme ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
\mathrm{M}x^m + \ldots - \mathrm{N}x^n \quad - \ldots + \mathrm{P}x^p \quad + \ldots - \mathrm{Q}x^q \quad - \ldots \pm \mathrm{U}x^u \quad \pm \ldots \pm \mathrm{V} \\
x - a \\
\hline
\mathrm{M}x^{m+1} + \ldots - \mathrm{N}x^{n+1} - \ldots + \mathrm{P}x^{p+1} + \ldots - \mathrm{Q}x^{q+1} - \ldots \pm \mathrm{U}x^{u+1} \pm \ldots \pm \mathrm{V}x \\
\quad - \ldots - \mathrm{N}'x^{n+1} + \ldots + \mathrm{P}'x^{p+1} - \ldots - \mathrm{Q}'x^{q+1} + \ldots \pm \mathrm{U}'x^{u+1} \mp \ldots\ldots \mp \\
\hline
\mathrm{M}x^{m+1} \ldots - (\mathrm{N}+\mathrm{N}')x^{n+1} \ldots + (\mathrm{P}+\mathrm{P}')x^{p+1} \ldots - (\mathrm{Q}+\mathrm{Q}')x^{q+1} \ldots \pm (\mathrm{U}+\mathrm{U}')x^{u+1} \ldots\ldots \mp
\end{array}$$

Le premier produit partiel $f(x)x$ n'exige aucune remarque.

Le second produit partiel commence au terme négatif $-\mathrm{M}ax^m$, et les termes suivants sont négatifs jusqu'au terme en x^{n+1} inclusivement. Ce terme $-\mathrm{N}'x^{n+1}$ est le produit par $-a$ du terme positif du multiplicande qui précède $-\mathrm{N}x^n$. Le terme suivant du second produit partiel, qui est $+\mathrm{N}ax^n$, commence une série de termes positifs, puisque ces termes proviennent du produit par $-a$ de termes négatifs du multiplicande. Le dernier terme de cette série est $+\mathrm{P}'x^{p+1}$ et provient du produit par $-a$ du terme qui précède au multiplicande le terme $+\mathrm{P}x^p$. Au delà, les termes du multiplicande devenant positifs, c'est une série de termes négatifs qu'on a à écrire au second produit partiel.... On continue ainsi, jus-

qu'à ce qu'on parvienne au dernier groupe du multiplicande. Après avoir formé le terme $\pm U'x^{u+1}$, qui est de même signe que le terme $\pm Ux^{u+1}$ d'après ce qui précède, on a à multiplier par $-a$ le terme $\pm Ux^u$ et une série de termes de même signe : tous les termes correspondants du second produit partiel ont donc le signe $\mp$ jusqu'au dernier terme $\mp Va$.

Si l'on additionne maintenant les deux produits partiels pour avoir le produit total, on ne peut présumer quels signes les réductions entre termes semblables de signes contraires introduiront dans l'intervalle qui sépare les termes Mx^{m+1} et $-(N-N')x^{n+1}$; mais on est certain qu'il existera *un nombre impair de variations* entre ces deux termes de signes contraires (1252), c'est-à-dire *au moins une,* comme entre les deux termes Mx^m et $-Nx^n$ du multiplicande, *plus un nombre pair* qui peut être zéro. De même, entre les deux termes $-(N+N')x^{n+1}$ et $+(P+P')x^{p+1}$ du produit, il y aura au moins une variation comme entre les deux termes $-Nx^n$ et $+Px^p$ du multiplicande, plus un nombre pair de variations qui peut être zéro.... On continuera de la même manière jusqu'aux termes $\pm(U+U')x^{u+1}$ et $\mp Va$ du produit. Entre ces deux termes de signes contraires, il existe, comme précédemment, un nombre impair de variations, c'est-à-dire au moins une plus un nombre pair qui peut être zéro, tandis qu'entre les deux termes $\pm Ux^u$ et $\pm V$ du multiplicande il n'existe, par hypothèse, aucune variation.

Il en résulte que le nombre des variations du produit $f(x)[x-a]$ surpasse au moins d'une unité, plus une somme de nombres pairs positifs qui peuvent être nuls, le nombre des variations du multiplicande. En d'autres termes, l'excès du nombre de variations du produit sur le nombre de variations du multiplicande est un nombre impair qui peut se réduire à l'unité.

Si l'on désigne par μ le nombre des variations du multiplicande et par $2k$ un nombre pair positif qui peut être nul, le nombre des variations du produit sera donc exprimé par

$$\mu+1+2k.$$

Remarque. — Nous avons dit que chaque groupe du multiplicande peut ne contenir qu'un seul terme. Or, s'il s'agissait du dernier groupe, que nous avons supposé dans notre démonstration composé au moins de deux termes, il faudrait,

dans l'hypothèse d'un seul terme, faire $V = 0$ et terminer le multiplicande au terme $\pm U x^n$. Le produit serait donc lui-même terminé par les deux termes consécutifs

$$\pm (U + U') x^{n+1} \mp U a x^n,$$

et rien ne serait changé aux conclusions précédentes.

Théorème de Descartes.

1255. *Dans toute équation algébrique à coefficients réels,* $f(x) = 0$, *le nombre des variations du premier membre est une limite supérieure du nombre des racines positives de l'équation et, lorsque ces deux nombres ne sont pas égaux, leur différence est un nombre pair.*

Désignons par a, b, c, ..., les racines positives de l'équation $f(x) = 0$, et représentons par $\varphi(x)$ le produit des facteurs premiers de $f(x)$ qui répondent aux racines négatives et aux racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. On pourra poser (1061)

$$f(x) = \varphi(x)\,(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\ldots. \tag{1}$$

Puisque l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet, par hypothèse, aucune racine positive, les termes extrêmes de son premier membre sont de même signe, et on peut les supposer tous deux positifs (1253). Par conséquent, le polynôme $\varphi(x)$ renferme un nombre pair $2k$ de variations (1252), qui peut être nul. Si l'on multiplie alors $\varphi(x)$ par $x - a$, le produit

$$\varphi(x)\,(x - a)$$

renferme, d'après le lemme précédent (1254) et en désignant par $2k_1$ un nombre pair qui peut être nul, un nombre de variations représenté par

$$2k + 1 + 2k_1.$$

A son tour et d'après le même lemme, en désignant par $2k_2$ un autre nombre pair qui peut être nul, le produit

$$\varphi(x)\,(x - a)\,(x - b)$$

renferme un nombre de variations égal à

$$2k + 1 + 2k_1 + 1 + 2k_2 = 2k + 2k_1 + 2k_2 + 2,$$

le dernier terme 2 étant le nombre des racines positives considérées ou introduites.

On poursuivra de la même manière, et l'on voit que, si l'équation $f(x) = 0$ possède ϖ racines positives, le nombre des variations du second membre de l'identité (1) sera exprimé par

$$2k + 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_\varpi + \varpi,$$

tous les nombres pairs qui précèdent ϖ pouvant être nuls.

Le nombre des variations du premier membre de l'équation $f(x) = 0$ est donc bien une limite supérieure du nombre de ses racines positives, et, si le nombre des variations surpasse celui des racines positives, c'est d'un nombre pair.

1256. *Lorsque le premier membre d'une équation ne présente qu'une variation, cette équation admet nécessairement une racine positive, et une seule;* car la différence entre le nombre des variations et celui des racines positives, devant être un nombre pair positif (1255), ne peut être ici que zéro.

1257. *Pour toute équation à coefficients réels,* $f(x) = 0$, *le nombre des variations du premier membre de la transformée en* $-x$ (1105) *est une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation donnée et, lorsque ces deux nombres ne sont pas égaux, leur différence est un nombre pair.*

Cette proposition est un corollaire immédiat du théorème de Descartes (1255); car la transformée en $-x$ d'une équation a précisément pour racines positives les racines négatives de la proposée.

1258. Quand l'équation $f(x) = 0$ est *complète* (1251), on n'a pas besoin de former la transformée en $-x$, pour avoir une limite supérieure du nombre des racines négatives; car toute permanence du premier membre de la proposée devient nécessairement une variation du premier membre de la transformée, et, réciproquement, les signes changeant seulement de deux en deux lorsqu'on passe de la première équation à la seconde (1105).

On peut alors réunir la proposition principale et son corollaire dans l'énoncé suivant :

Lorsqu'une équation est complète, les nombres de variations

et de permanences de son premier membre sont respectivement des limites supérieures des nombres de racines positives et négatives qu'elle peut admettre, et les différences, quand elles existent, sont des nombres pairs.

1259. *Quand l'équation* $f(x) = 0$ *est incomplète, la somme* $v + v'$ *des nombres de variations de son premier membre et de celui de sa transformée en* $-x$ *ne peut pas surpasser son degré* m, *et la différence, si elle existe, est un nombre pair.*

Supposons que, entre deux termes consécutifs du premier membre de l'équation incomplète présentant une *lacune*, on introduise (avec le coefficient 0) un terme affecté d'un signe *quelconque*. On aura, par exemple, de cette manière à considérer les trois termes

$$\pm A x^n \pm 0 x^p \pm B x^r.$$

Si les deux termes existants sont *de signes contraires*, c'est-à-dire présentent une variation, il est clair que l'introduction du terme intermédiaire ne modifiera pas le nombre des variations du polynôme et ne fera que changer leur ordre. Si les deux termes existants sont *de même signe*, c'est-à-dire ne présentent aucune variation, il est clair également que l'introduction du terme intermédiaire ne fera naître aucune variation supplémentaire ou en fera naître deux nouvelles, suivant que ce terme intermédiaire sera affecté du même signe que les deux termes qui le comprennent ou d'un signe contraire.

Ainsi, chaque fois que l'on introduit (avec le coefficient 0) un terme destiné à combler une lacune dans le premier membre de l'équation incomplète, on laisse intact le nombre des variations ou on l'augmente de deux unités.

Il en résulte que, le premier membre de l'équation donnée étant rendu complet par l'introduction successive de ces termes de coefficient 0 et de signes quelconques, son nombre de variations restera le même ou croîtra d'un nombre pair.

Si l'on désigne alors par v_1 et v'_1 les nouveaux nombres de variations du premier membre de l'équation complétée et de celui de sa transformée en $-x$ traitée de la même manière, et par $2k_1$ et $2k'_1$ deux nombres pairs positifs qui peuvent être nuls, on aura

$$v_1 = v + 2k_1, \qquad v'_1 = v' + 2k'_1.$$

On a d'ailleurs (1251)

$$v_1 + v'_1 = m,$$

puisque les permanences du premier membre d'une équation complète correspondent exactement aux variations du premier membre de sa transformée en $-x$ (1258). Il vient donc

$$m = v + v' + 2k_1 + 2k'_1,$$

d'où

$$m - (v + v') = 2k_1 + 2k'_1 \qquad \text{et} \qquad v + v' \leqq m.$$

Limites relatives au nombre des racines imaginaires.

1269. Ce qui précède permet d'indiquer des limites inférieures du nombre I des racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$.

1° En conservant les mêmes notations, v est une limite supérieure du nombre P des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, supposée de degré m, et v' une limite supérieure du nombre N de ses racines négatives. Or on a (1061)

$$m = P + N + I,$$

et il en résulte

$$m - P - N = I,$$

c'est-à-dire

$$m - (v + v') \leqq I.$$

Ainsi, *le nombre pair* (1259) $m - (v + v')$ *est une limite inférieure du nombre* I.

2° De l'égalité

$$I = m - P - N,$$

on peut déduire également, en ajoutant et en retranchant dans le second membre $v + v'$,

$$I = (v - P) + (v' - N) + (m - v - v').$$

Mais $v' - N$ et $m - v - v'$ sont (1257, 1259) des nombres pairs positifs, qui peuvent être nuls. On a donc

$$I \geqq v - P.$$

Le nombre pair $v - P$ *est*, par conséquent, *une limite inférieure du nombre* I.

1261. 3° *Une lacune quelconque entre deux termes de même signe et une lacune composée de deux termes au moins* (1) *entre deux termes de signes contraires entraînent respectivement l'existence de deux racines imaginaires au moins.*

Représentons (1259) par Ax^n et Bx^r les deux termes entre lesquels a lieu la lacune considérée.

Supposons-les d'abord *de même signe*, la lacune étant *quelconque*.

Si les deux termes sont *de même parité*, c'est-à-dire tous deux de degré pair *ou* impair (et alors, il manquera *au moins* un terme entre eux, de sorte qu'on aura $n - r \geq 2$), ils resteront encore de même signe dans la transformée en $-x$; ils ne donneront donc lieu *à aucune variation* dans la proposée et dans la transformée. Si les deux termes sont *de parité différente*, l'un de degré pair, l'autre de degré impair (et alors, il manquera *au moins* deux termes entre eux, de sorte qu'on aura $n - r \geq 3$), ces deux termes, de même signe dans la proposée, seront de signes contraires dans la transformée en $-x$; ils donneront donc lieu *à une seule variation* dans la proposée et dans la transformée. D'après le théorème de Descartes (1255, 1257), le nombre des racines réelles possibles sera, dans les deux hypothèses, *au moins* diminué de 2.

Supposons maintenant les termes considérés *de signes contraires*, la lacune entre eux étant *au moins de deux termes*.

Si les deux termes en question sont *de même parité* (et alors, il manquera d'après l'énoncé *au moins* trois termes entre eux, de sorte qu'on aura $n - r \geq 4$), ils resteront de signes contraires dans la transformée en $-x$; ils donneront donc lieu *à deux variations* dans la proposée et dans la transformée. Si les deux termes sont *de parité différente* (et alors, il manquera *au moins* deux termes entre eux, de sorte qu'on aura $n - r \geq 3$), ils donneront une variation dans la proposée et n'en donneront pas dans la transformée; ils ne fourniront donc qu'*une seule variation* dans la proposée et dans la transformée. Le nombre des racines réelles possibles sera donc encore, dans les deux hypothèses, *au moins* diminué de 2.

Finalement, on peut dire que *le double du nombre des la-*

(1) On se rendra facilement compte qu'une lacune d'un seul terme entre deux termes de signes contraires, échappe à la démonstration que nous allons donner.

cunes, telles qu'on les a définies, est une limite inférieure du nombre des racines imaginaires de l'équation.

1262. Enfin nous indiquerons une dernière limite due à Sturm.

4° *Soit l'équation* $f(x) = 0$ *et a un nombre positif. Si le nombre des variations du produit* $\varphi(x)$ *obtenu en multipliant* $f(x)$ *par le binôme* $x - a$ *surpasse de* $2k+1$ (1254) *le nombre des variations du multiplicande* $f(x)$, *l'équation proposée admet au moins* $2k$ *racines imaginaires.*

Le polynôme $f(x)$ ayant v variations et l'équation $f(x) = 0$ ayant P racines positives, le polynôme $\varphi(x)$ présentera, par hypothèse, $v + 2k + 1$ variations, tandis que l'équation $\varphi(x) = 0$ aura $P + 1$ racines positives. Il en résulte que cette dernière équation admettra au moins (1260, 2°)

$$(v + 2k + 1) - (P + 1) \quad \text{ou} \quad (v - P) + 2k$$

racines imaginaires. Et comme $v - P$ est un nombre pair positif qui peut être nul (1255), et que l'équation $\varphi(x) = 0$ a les mêmes racines que l'équation $f(x) = 0$, sauf la racine positive a introduite par la multiplication, on voit que $2k$ est une limite inférieure du nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$.

Exemples.

1263. 1° *Soit l'équation*

$$x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Son premier membre ayant quatre variations, elle peut admettre (1255) un nombre de racines positives égal à quatre, à deux ou à zéro.

La transformée en $-x$ étant

$$x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 7x - 1 = 0,$$

et son premier membre présentant une seule variation, l'équation proposée admet une racine négative et une seule (1256). [On voit qu'on a ici (1259) $v + v' = m$.]

Comme l'équation donnée est du cinquième degré, ces renseignements suffisent pour indiquer quelle peut être la nature de ses racines : elle aura

4 rac. pos., 1 rac. nég., 0 rac. imag.,

ou 2 rac. pos., 1 rac. nég., 2 rac. imag.,

ou 0 rac. pos., 1 rac. nég., 4 rac. imag.

2° *Soit l'équation*

$$x^7 - 3x^3 + 2x^2 - x + 10 = 0.$$

Les deux premiers termes sont de signes contraires et présentent entre eux une lacune composée de trois termes. L'équation a donc au moins (1261) deux racines imaginaires. Son premier membre offrant quatre variations, le nombre de ses racines positives est 4, 2 ou 0. Enfin, la transformée en $-x$ étant

$$x^7 - 3x^3 - 2x^2 - x - 10 = 0,$$

et son premier membre n'ayant qu'une variation, l'équation proposée admet une racine négative et une seule. [On voit qu'on a ici (1259) $\rho + \rho' < m$].

L'équation donnée étant du septième degré, elle aura

4 rac. pos., 1 rac nég., 2 rac. imag.,
ou 2 rac. pos., 1 rac. nég., 4 rac. imag.,
ou 0 rac. pos., 1 rac. nég., 6 rac. imag.

3° *Soit l'équation*

$$3x^6 - 7x^3 - 1 = 0.$$

Son premier membre ne présente qu'une variation, et il en est de même du premier membre de la transformée en $-x$ qui est

$$3x^6 + 7x^3 - 1 = 0.$$

[On voit qu'on a ici (1259) $\rho + \rho' < m$]. L'équation proposée admet donc (1256) une seule racine positive et une seule racine négative. Comme elle est du sixième degré, elle a forcément quatre racines imaginaires, et *la nature de ses racines est complètement déterminée.*

Le résultat précédent est d'accord avec le théorème des lacunes (1261). Entre les deux premiers termes du premier membre de l'équation, qui sont de signes contraires, comme entre les deux derniers termes qui sont de même signe, il existe une lacune de deux termes. Il en résulte que l'équation doit avoir au moins 2×2 ou 4 racines imaginaires.

4° *Soit,* encore, *l'équation*

$$f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Son premier membre présente une variation, tandis que celui de la transformée en $-x$,

$$f(-x) = x^6 - x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$$

en présente trois. L'équation donnée a donc une seule racine positive (1256), et elle peut avoir trois racines négatives ou une seule (1257) : elle a donc 2 ou 4 racines imaginaires.

On voit qu'on a $m-(\nu+\nu')=2$; ce qui indique (1260, 1°) *au moins* deux racines imaginaires. La lacune qui existe entre les deux premiers termes de $f(x)$ conduit à la même limite inférieure (1261). Enfin la limite de Sturm (1262) ne donne rien de plus; car, si l'on multiplie $f(x)$ par le binôme $x-1$, on trouve

$$\varphi(x)=f(x)[x-1]=x^7-x^6+x^4-2x+1.$$

Ce produit renferme quatre variations, tandis que $f(x)$ en renferme une seule. L'excès étant $2+1$, la limite invoquée montre que l'équation $f(x)=0$ a *au moins* deux racines imaginaires : elle peut en avoir quatre.

Formes du théorème de Descartes lorsque l'équation proposée a toutes ses racines réelles.

1264. On peut savoir d'avance qu'une équation a *toutes ses racines réelles*. Le théorème de Descartes prend alors l'une des deux formes suivantes :

Lorsqu'une équation COMPLÈTE *a toutes ses racines réelles, le nombre des variations et celui des permanences de son premier membre représentent respectivement le nombre de ses racines positives et celui de ses racines négatives.*

Lorsqu'une équation INCOMPLÈTE *a toutes ses racines réelles, le nombre des variations de son premier membre représente le nombre de ses racines positives, et le nombre des variations du premier membre de sa transformée en $-x$ représente celui de ses racines négatives.*

En effet :

1° L'équation considérée étant *complète* et de degré m, supposons qu'elle ait P racines positives et N racines négatives, son premier membre présentant ν variations et p permanences.

Nous aurons à la fois, d'après l'hypothèse,

$$m=\mathrm{P}+\mathrm{N}=\nu+p.$$

Mais on a (1258)

$$\nu\geqq\mathrm{P},\qquad p\geqq\mathrm{N}.$$

Or, si l'on avait $\nu>\mathrm{P}$, on devrait avoir, d'après l'égalité précédente, $p<\mathrm{N}$; ce qui est impossible.

On a donc nécessairement

$$v = \mathrm{P}, \qquad p = \mathrm{N}.$$

2° L'équation considérée étant *incomplète* et de degré m, supposons, en conservant les autres notations, que le premier membre de sa transformée en $-x$ présente v' variations.

Nous aurons à la fois (1259), d'après l'hypothèse,

$$v + v' \leqq m, \qquad \mathrm{P} + \mathrm{N} = m.$$

Il vient, par suite,

$$v + v' \leqq \mathrm{P} + \mathrm{N}.$$

Mais on a (1255, 1257)

$$v \geqq \mathrm{P}, \qquad v' \geqq \mathrm{N}.$$

Or, si l'on avait $v > \mathrm{P}$, l'inégalité précédente exigerait qu'on eût, par compensation, $v' < \mathrm{N}$; ce qui est impossible. On a donc

$$v = \mathrm{P},$$

et, par suite, comme on ne peut pas avoir $v' < \mathrm{N}$, il reste en même temps

$$v' = \mathrm{N}.$$

1265. Si une équation de degré m a toutes ses racines réelles et positives, la condition $v = \mathrm{P}$ entraîne $v = m$; si toutes les racines sont réelles et négatives, la condition $v' = \mathrm{N}$ entraîne $v' = m$ (1264).

Toute équation qui a toutes ses racines réelles et D'UNE SEULE ESPÈCE *est donc complète, et son premier membre ne présente que des variations ou des permanences* (1258), *suivant que toutes les racines sont positives ou négatives.*

1266. *Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et qu'on multiplie son premier membre par un binôme $x - a$ dont le second terme a est une quantité positive, le produit obtenu $\varphi(x)$ ne renferme qu'une variation de plus que le multiplicande $f(x)$.*

En effet, l'équation $f(x) = 0$ ayant P racines positives, le nombre des variations de son premier membre est (1264, 2°) $v = \mathrm{P}$; l'équation $\varphi(x) = 0$ ayant $\mathrm{P} + 1$ racines positives, le

nombre des variations de son premier membre est, pour la même raison, $P+1$ ou $p+1$.

Ce résultat concorde avec ce qui a été dit au n° 1262

Détermination, dans la même hypothèse, du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres donnés.

1267. Étant donnée une équation $f(x)=0$ de degré m, on peut former une suite de $m+1$ termes avec son premier membre et les m dérivées successives de ce premier membre (325). On a ainsi

$$(1) \qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,\ f^{(m)}(x).$$

Cela posé, *l'équation $f(x)=0$ ayant toutes ses racines réelles, si l'on substitue à la place de x dans la suite indiquée deux quantités réelles quelconques, α et $\beta>\alpha$, et si l'on compte les variations présentées par les deux séries de résultats obtenus, le nombre des variations perdues en passant de la première série à la seconde est exactement le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$ qui sont comprises entre les deux substitutions α et β.*

Pour le démontrer, diminuons d'abord de α toutes les racines de la proposée (1107), c'est-à-dire formons la transformée en $x+\alpha$ qui aura aussi toutes ses racines réelles. Le nombre des variations de son premier membre sera donc celui de ses racines positives (1264), qui correspondent évidemment à toutes les racines de $f(x)=0$ *supérieures* à α et sont en même nombre.

Si l'on forme, de même, la transformée en $x+\beta$, le nombre des variations de son premier membre sera celui de ses racines positives ou des racines de $f(x)=0$ qui sont *supérieures* à β.

La différence entre le premier et le second nombre de variations représente donc précisément le nombre des racines de $f(x)=0$ *comprises* entre α et β.

Or on a, d'après la série de Taylor (91),

$$f(x+\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)\frac{x}{1}+f''(\alpha)\frac{x^2}{1.2}+f'''(\alpha)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+f^{(m)}(\alpha)\frac{x^m}{1.2.3\ldots m},$$

$$f(x+\beta)=f(\beta)+f'(\beta)\frac{x}{1}+f''(\beta)\frac{x^2}{1.2}+f'''(\beta)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+f^{(m)}(\beta)\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}.$$

Il suffit donc bien, pour avoir le nombre cherché, de compter le nombre des variations perdues par la suite (1) quand, après y avoir remplacé x par α, on y remplace x par β.

Ce théorème est un cas particulier du *théorème de* Fourier, que nous exposerons plus loin.

1268. Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, on peut reconnaître, d'une autre manière indiquée par Jacobi, combien elle a de racines comprises entre deux nombres donnés α et $\beta > \alpha$.

Effectuons la transformation rationnelle (1100)

$$y = \frac{x-\alpha}{\beta - x}; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{\beta y + \alpha}{y+1}.$$

L'équation $\varphi(y) = f\left(\frac{\beta y + \alpha}{y+1}\right) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, et ses racines positives correspondent évidemment aux racines réelles de $f(x) = 0$ *comprises* entre α et β et sont en même nombre.

Le nombre des variations du polynôme $\varphi(y)$ fera donc connaître le nombre cherché (1264).

Conditions de réalité de toutes les racines d'une équation, à l'aide de l'équation aux carrés des différences.

1269. Pour trouver ces conditions, il suffit d'appliquer le théorème de Descartes à l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation proposée (1192).

En effet, si l'équation donnée $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et inégales, les carrés de leurs différences seront des quantités réelles et positives, différentes de zéro. *Le premier membre de l'équation aux carrés des différences* $\varphi(z) = 0$ *devra* donc *être complet et ne présenter que des variations* (1265).

Cette condition nécessaire est en même temps suffisante ; car, si l'équation $f(x) = 0$, supposée à coefficients réels, avait des racines imaginaires, ces racines seraient deux à deux conjuguées (1175). Or, le carré de la différence de deux imaginaires conjuguées est une quantité essentiellement négative (86). Par conséquent, l'équation aux carrés des différences

$\varphi(z)=0$ aurait alors forcément des racines négatives ; son premier membre ne pourrait donc plus être à la fois complet et ne présenter que des variations.

1270. Prenons, par exemple, l'équation du troisième degré, privée de son second terme,

$$f(x)=x^3+px+q=0. \tag{1}$$

D'après les calculs effectués précédemment (1193), elle a, pour équation aux carrés des différences,

$$\varphi(z)=z^3+6pz^2+9p^2z+4p^3+27q^2=0. \tag{2}$$

Pour que le polynôme $\varphi(z)$ soit complet et ne présente que des variations, il faut qu'on ait à la fois

$$p<0, \qquad 4p^3+27q^2<0,$$

et la seconde condition renferme implicitement la première. La seule condition pour que l'équation (1) ait ses trois racines réelles est donc

$$4p^3+27q^2<0.$$

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE ROLLE.

Propositions préliminaires.

1271. Nous avons déjà donné (846) une démonstration du *théorème de* Rolle, très générale, due à M. Ossian Bonnet, et qui ne laisse rien à désirer. Nous en présenterons ici une nouvelle, mieux appropriée au but que nous poursuivons en ce moment.

Nous commencerons par établir le lemme suivant :

1272. *Étant donnés un polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$*, il faut prouver que *ces deux fonctions sont toujours de signes contraires avant que, x croissant, on atteigne une racine réelle de $f(x) = 0$, et toujours de même signe après.*

1° *L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales.*

On peut alors se servir de la série de Taylor réduite à ses deux premiers termes (888) et écrire

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

θ étant une quantité positive comprise entre 0 et 1, et h une quantité aussi petite qu'on voudra en valeur absolue. Si a est une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$, on a $f(a) = 0$, et il vient

$$f(a+h) = hf'(a+\theta h),$$

d'où

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+\theta h)} = h.$$

Le premier membre de cette égalité a donc le signe de h.

D'ailleurs, on peut admettre que $f'(a+\theta h)$ et $f'(a+h)$ ont le même signe, puisqu'on peut supposer h assez petit en valeur absolue pour qu'il n'y ait aucune racine de l'équation $f'(x)=0$ [non plus que de $f(x)=0$] entre a et $a+h$, y compris $a+h$ (1071). Par conséquent, le signe du rapport

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$$

sera celui de h, c'est-à-dire *négatif* pour h négatif ou *pour x moindre que a* dans les limites convenables, *positif* pour h positif ou *pour x plus grand que a* dans les mêmes limites.

2° *L'équation $f(x)=0$ a des racines égales.*

a est une racine réelle de l'équation $f(x)=0$ de degré m, et $f^n(x)$ est la première des dérivées successives de la fonction entière $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x=a$(1135). On a alors, en désignant par h une quantité qu'on peut supposer aussi petite qu'on voudra en valeur absolue, et en appliquant la série de Taylor à $f(x)$ et à sa dérivée $f'(x)$ [887],

$$f(a+h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(a)+\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{n+1}(a)+\ldots+\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}f^m(a),$$

$$f'(a+h)=\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^n(a)+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{n+1}(a)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}f^m(a).$$

On en déduit par division, en mettant dans le second membre de chaque égalité le coefficient du premier terme en facteur,

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}=\frac{h}{n}\,\frac{f^n(a)+\dfrac{h}{n+1}f^{n+1}(a)+\ldots+\dfrac{h^{m-n}}{(n+1)\ldots m}f^m(a)}{f^n(a)+\dfrac{h}{n}f^{n+1}(a)+\ldots+\dfrac{h^{m-n}}{n\ldots(m-1)}f^m(a)}.$$

Si l'on fait tendre alors h vers zéro, la fraction qui multiplie $\frac{h}{n}$ dans le second membre de cette égalité a pour limite l'unité, de sorte que le signe du premier membre est celui de h. Par suite, si h est *positif*, $f(a+h)$ et $f'(a+h)$ sont *de même signe;* si h est *négatif*, $f(a+h)$ et $f'(a+h)$ sont ***de signes contraires.***

1273. On peut donc énoncer cette proposition générale, qui lie une fonction entière $f(x)$ à sa dérivée $f'(x)$.

Si l'on fait croître x de $-\infty$ à $+\infty$, chaque fois que x atteint une racine réelle (multiple ou non) de l'équation $f(x)=0$, *le rapport*

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

passe toujours, en franchissant la valeur correspondante, d'une valeur négative à une valeur positive.

1274. Ce qu'on vient de dire pour $f(x)$ et $f'(x)$, s'appliquant nécessairement à $f'(x)$ et à $f''(x)$, ... on voit immédiatement que, si l'on forme la suite

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^n(x),$$

jusqu'à la première dérivée $f^n(x)$ qui ne s'annule pas pour $x=a$, les termes de cette suite seront successivement de signes contraires pour $x=a-h$, et successivement de même signe pour $x=a+h$.

Donc, *pour la première substitution, la suite ne présente que des variations et, pour la seconde substitution, que des permanences.*

Théorème de Rolle.

1275. *Deux racines réelles consécutives d'une équation $f(x)=0$ à coefficients réels comprennent toujours entre elles un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée $f'(x)=0$, nombre impair qui peut se réduire à l'unité.*

Désignons par a et $b>a$ deux racines réelles consécutives (multiples ou non) de l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire telles que cette équation n'ait aucune autre racine réelle entre a et b. Représentons par h une quantité *positive* pouvant devenir aussi petite qu'on voudra, et considérons les deux rapports

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)},\qquad \frac{f(b-h)}{f'(b-h)}.$$

D'après ce qui précède (1273), le premier rapport est *positif*

et, le second, *négatif*. D'ailleurs, l'équation $f(x) = 0$ n'ayant aucune racine réelle entre a et b et, par conséquent, *entre* $a + h$ et $b - h$, les deux numérateurs $f(a + h)$ et $f(b - h)$ sont de même signe (1071). Il faut donc que les deux dénominateurs $f'(a + h)$ et $f'(b - h)$ soient *de signes contraires*. Mais alors l'équation $f'(x) = 0$ a nécessairement (1071) un nombre impair de racines réelles comprises entre $a + h$ et $b - h$ ou entre a et b. Ce nombre impair peut être égal à l'unité.

1276. *La réciproque du théorème de Rolle n'est pas vraie, d'une manière générale.*

On ne peut pas dire que deux racines réelles *consécutives* de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ comprennent *toujours* au moins une racine réelle de l'équation proposée $f(x) = 0$, puisque deux racines réelles *consécutives* de cette dernière équation peuvent, d'après la proposition directe (1275), comprendre un nombre impair quelconque de racines réelles de l'équation dérivée, c'est-à-dire plus d'une racine réelle de cette équation.

1277. *Deux racines réelles consécutives de l'équation dérivée* $f'(x) = 0$ *ne peuvent pas,* dans le cas de l'affirmative, *comprendre plus d'une racine réelle de l'équation proposée* $f(x) = 0$.

En effet, si les racines *consécutives* a' et b' de l'équation dérivée comprenaient deux racines réelles a et b de $f(x) = 0$, il faudrait, *contre l'hypothèse*, qu'il y eût entre a et b (1275) et, par conséquent, entre a' et b', une nouvelle racine réelle de $f'(x) = 0$.

1278. Pour décider (1276, 1277) s'il existe entre deux racines réelles consécutives a' et b' de $f'(x) = 0$ une racine réelle de $f(x) = 0$, on substitue successivement les nombres a' et b' à la place de x dans $f(x)$.

Si les deux résultats $f(a')$ et $f(b')$ sont *de signes contraires,* l'équation $f(x) = 0$ admet, entre a' et b', *une racine réelle et une seule* (1071, 1277). Si les deux résultats $f(a')$ et $f(b')$ sont *de même signe*, l'équation $f(x) = 0$ n'a *aucune racine réelle* entre a' et b' (1071, 1277).

Séparation des racines réelles d'une équation à l'aide du théorème de Rolle.

1279. On peut *séparer* (1250) les racines réelles d'une équation $f(x) = 0$ de degré m et, par conséquent, trouver leur nombre, *lorsqu'on sait résoudre l'équation dérivée* $f'(x) = 0$.

Nous supposerons d'abord que l'équation donnée n'a pas de racines réelles multiples.

Soient a', b', c', d', ..., h', les racines réelles de l'équation dérivée. Considérons la suite

$$-\infty, \quad a', \quad b', \quad c', \quad d', \quad \ldots, \quad h', \quad +\infty,$$

et substituons successivement ses différents termes à la place de x dans le premier membre de l'équation $f(x) = 0$.

Lorsque deux termes consécutifs donneront des résultats de signes contraires, ils comprendront une racine réelle de la proposée et une seule; lorsque deux termes consécutifs donneront des résultats de même signe, ils ne comprendront aucune racine réelle de la proposée (1278).

La séparation des racines réelles de l'équation donnée sera donc ainsi effectuée d'une manière complète.

Si l'équation dérivée, de degré $m - 1$, a n racines réelles, la suite indiquée présentera $n + 1$ intervalles, et l'équation proposée ne pourra pas avoir plus de $n + 1$ racines réelles.

On en déduit alors immédiatement une limite inférieure du nombre des racines imaginaires de la proposée, en se rappelant que le nombre de ses racines réelles et son degré sont toujours de même parité (1072), c'est-à-dire que le nombre de ses racines imaginaires est toujours pair.

1280. Si l'équation $f(x) = 0$ avait des racines réelles égales, on en serait averti par la substitution des racines réelles de l'équation dérivée, dont quelques-unes annuleraient alors $f(x)$, en devenant communes à l'équation proposée et à l'équation dérivée (1135). Rien ne serait changé d'ailleurs à la manière d'opérer.

Supposons, par exemple, que l'équation dérivée ait trois racines réelles a', b', c'. L'équation proposée ne pourra pas avoir plus de quatre racines réelles (1279). Admettons, pour

un instant, qu'elles soient distinctes et représentées par a, b, c, d. Nous aurons, dans ce cas (1275), la suite croissante

$$-\infty,\quad a,\quad a',\quad b,\quad b',\quad c,\quad c',\quad d,\quad +\infty.$$

Si, maintenant, les deux racines b et c deviennent égales entre elles, c'est-à-dire si b devient racine double de la proposée, la racine intermédiaire b' se confond également avec b et c, et les deux équations $f(x)=0$ et $f'(x)=0$ ont une racine commune. Les deux intervalles (b, b'), (b', c) sont remplacés par leur limite commune, b', et les racines de la proposée se trouvent séparées à l'aide de la suite

$$-\infty,\quad a,\quad a',\quad b',\quad c',\quad d,\quad +\infty.$$

La racine double b' de l'équation considérée est déterminée directement, et il ne reste plus qu'à chercher ses deux autres racines a et d, la première dans l'intervalle $(-\infty, a')$, la seconde dans l'intervalle $(c', +\infty)$.

1281. On peut séparer immédiatement les racines réelles d'une équation du troisième degré par le procédé qu'on vient d'exposer (1279); car, l'équation dérivée étant du second degré, on sait la résoudre directement.

1282. On peut aussi appliquer le même procédé à toute équation du quatrième degré, en faisant préalablement disparaître son second terme (1110).

On obtient alors une équation de la forme

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{1}$$

dont on peut former la transformée en $\frac{1}{x}$ (1113).

On a alors à considérer l'équation

$$rx^4+qx^3+px^2+1=0, \tag{2}$$

qui a pour équation dérivée

$$4rx^3+3qx^2+2px=0$$

ou

$$x(4rx^2+3qx+2p)=0.$$

Cette équation dérivée a une racine nulle, et ses deux autres racines sont données par une équation du second

degré. On peut donc séparer les racines de l'équation (2) et, en prenant ensuite les limites inverses, celles de l'équation (1).

Cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles.

1283. *Lorsque l'équation* $f(x) = 0$, *supposée de degré* m, *a toutes ses racines réelles et simples, il en est de même de l'équation dérivée* $f'(x) = 0$, *et deux racines consécutives de chaque équation comprennent nécessairement une racine et une seule de l'autre équation.*

En effet, en désignant par a, b, c, d, ..., h, l, les m racines réelles de $f(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur croissante, on voit que chacun des $m - 1$ intervalles de la suite

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad \ldots, \quad h, \quad l,$$

comprend (1275) une racine réelle et une seule de l'équation dérivée $f'(x) = 0$, puisque cette équation est de degré $m - 1$. En désignant par a', b', c', d', ..., h', les $m - 1$ racines réelles de $f'(x) = 0$, on a donc, par ordre de grandeur croissante, la nouvelle suite

$$-\infty, \quad a, \quad a', \quad b, \quad b', \quad c, \quad c', \quad d, \quad d', \quad \ldots, \quad h, \quad h', \quad l, \quad +\infty;$$

et les racines de la proposée *séparent* les racines de l'équation dérivée, comme celles-ci, en leur adjoignant les deux limites extrêmes, *séparent* les racines de la proposée.

Il est entendu que, lorsqu'on saura trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation, on aura soin de remplacer $+\infty$ et $-\infty$ par ces deux limites.

1284. Ce que nous venons de dire pour les deux équations $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ s'applique identiquement aux deux équations $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$, etc.

Il en résulte que, lorsque l'équation $f(x) = 0$, de degré m, a toutes ses racines réelles, il en est de même de toutes les équations dérivées $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, ..., $f^{m-1}(x) = 0$ [$f^m(x)$ est une constante], dont les racines se *séparent* mutuellement.

On peut déduire de cette remarque un procédé pour

trouver les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré donné. Nous en présenterons dans un instant deux applications importantes.

1285. *Il nous reste à considérer le cas où l'équation donnée, ayant toutes ses racines réelles, a des racines égales.*

Désignons les racines de l'équation $f(x) = 0$, de degré m, en les rangeant par ordre de grandeur croissante, par

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

et soient

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n,$$

leurs degrés de multiplicité. On aura

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = m.$$

D'après la théorie des racines égales (1135), l'équation dérivée $f'(x) = 0$ admettra les mêmes racines avec des degrés de multiplicité

$$(p_1 - 1),\ (p_2 - 1),\ (p_3 - 1),\ \ldots,\ (p_n - 1),$$

de sorte qu'elle a $m - n$ racines confondues respectivement avec les termes de la suite (1), suite qui présente $n - 1$ intervalles. D'ailleurs l'équation $f'(x) = 0$ ayant en tout $m - 1$ racines réelles, il en reste à compter $(m - 1) - (m - n)$, c'est-à-dire $n - 1$, que nous désignerons par $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$, par ordre de grandeur croissante. Mais, d'après le théorème de Rolle (1275), l'équation dérivée doit avoir au moins une racine réelle comprise entre deux termes consécutifs de la suite (1). La séparation des racines se trouvera donc encore (1280) effectuée, dans l'hypothèse que nous examinons, en écrivant la suite

$$-\infty,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b_{n-1},\ a_n,\ +\infty,$$

comme si les racines multiples étaient des racines simples.

Application du théorème de Rolle à la recherche des conditions de réalité des racines de l'équation du troisième degré.

1286. Nous pouvons supposer, pour cette recherche, l'équation du troisième degré privée de son second terme.

Car, pour faire disparaître le second terme d'une équation, il suffit (1110) de diminuer ses racines d'une quantité rationnelle, ce qui ne modifie pas leur nature et les laisse réelles ou imaginaires comme elles l'étaient avant la transformation effectuée.

Soit donc l'équation

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

dont nous désignerons les racines par a, b, c, en les rangeant par ordre de grandeur croissante.

L'équation dérivée est

$$3x^2 + p = 0, \tag{2}$$

et les racines de cette équation sont

$$a' = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad b' = +\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Si les trois racines de l'équation (1) sont réelles, il en est de même des racines de l'équation (2) [1283].

Une première condition nécessaire est donc

$$p < 0. \tag{\alpha}$$

Cela posé, nous séparerons les racines de la proposée en écrivant la suite (1283)

$$\underset{-\infty,\ a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ +\infty.}{-\quad +\quad -\quad +}$$

On peut déterminer les signes des résultats obtenus en substituant les termes de cette suite dans le premier membre de l'équation (1).

En faisant $x = -\infty$, on aura un résultat négatif puisque l'équation (1) est de degré impair, et son premier membre conservera le signe — jusqu'à ce qu'on fasse $x = a$, première racine de l'équation (1071). Au delà, ce premier membre deviendra et restera positif jusqu'à ce qu'on fasse $x = b$; il deviendra et restera ensuite négatif jusqu'à ce qu'on fasse $x = c$. Enfin, de $x = c$ à $x = +\infty$, il restera positif.

On en conclut que la substitution $x = a'$ doit rendre *positif* le premier membre de l'équation (1), tandis que la substitution $x = b'$ doit le rendre *négatif*.

On a ainsi à satisfaire aux deux inégalités

$$\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q > 0,$$

$$\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q < 0.$$

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, l'équation (1) a nécessairement (1071) une racine réelle entre $-\infty$ et a', une autre entre a' et b', une troisième entre b' et $+\infty$; elle a donc bien ses trois racines réelles.

En effectuant les calculs, on peut mettre les inégalités précédentes sous la forme

$$(3) \qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2},$$

$$(4) \qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > +\frac{q}{2}.$$

Elles ne diffèrent alors que par le signe du second membre. D'après la première condition (α) ou $p < 0$, on voit que leurs premiers membres sont *positifs*. Par conséquent, si l'on a $q > 0$, l'inégalité (3) est satisfaite d'elle-même, et il suffit de considérer l'inégalité (4); si l'on a $q < 0$, c'est l'inégalité (4) qui est satisfaite d'elle-même, et il suffit de considérer l'inégalité (3). L'inégalité dont on doit tenir compte ayant ses deux membres positifs, on a le droit de les élever au carré (*Alg. élém.*). Il en résulte que la seconde condition cherchée sera fournie par l'une quelconque des inégalités (3) et (4) élevée au carré. On a, par suite,

$$-\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$$

ou

$$(\beta) \qquad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

La condition (β) exige évidemment que p soit une quantité *négative,* c'est-à-dire qu'elle renferme implicitement la condition (α).

En résumé, pour que l'équation du troisième degré privée de son second terme ait ses trois racines réelles, la condition

nécessaire et suffisante est exprimée par l'inégalité

$$4p^3+27q^2<0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0.$$

Si les coefficients de l'équation (1) satisfont à l'inégalité contraire

$$4p^3+27q^2>0,$$

l'équation ne peut avoir ses trois racines réelles. Comme le nombre des racines réelles est toujours de même parité que le degré de l'équation, l'équation (1) a alors une seule racine réelle, de signe contraire à son dernier terme, et deux racines imaginaires conjuguées (1054, 1075).

Enfin, si l'inégalité caractéristique se change en égalité et si l'on a

$$4p^3+27q^2=0,$$

l'équation (1) a toujours ses trois racines réelles, *mais deux sont égales entre elles* (1082, 2°). La racine *double* et la racine *simple* ont d'ailleurs pour expressions (*loc. cit.*)

$$-\frac{3q}{2p} \quad \text{et} \quad \frac{3q}{p}.$$

1287. Soit, par exemple, l'équation

$$x^3+8x-1=0.$$

On a $p>0$. L'équation donnée n'a donc qu'une racine réelle (1286) qui est positive et deux racines imaginaires conjuguées.

Soit encore l'équation

$$x^3-7x-7=0.$$

La quantité $4p^3+27q^2$ est ici

$$4(-7)^3+27(7)^2 \quad \text{ou} \quad -28(7)^2+27(7)^2<0.$$

L'équation donnée a donc ses trois racines réelles, dont une positive et deux négatives (1256, 1257).

Soit enfin l'équation

$$x^3-3x+2=0.$$

On a alors

$$4p^3+27q^2=-4.27+27.4=0.$$

L'équation donnée a donc une racine double égale à $-\frac{3q}{2p}$ ou à $+1$ et une racine simple égale à $\frac{3q}{p}$ ou à -2.

1288. En supposant l'équation du troisième degré complète et de la forme

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \tag{1}$$

on a vu (1193) que, lorsqu'on fait disparaître son second terme, elle devient

$$x^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x + \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r = 0.$$

Si l'on applique alors à cette dernière équation les conditions (α) et (β) trouvées précédemment (1286), il vient

$$q - \frac{p^2}{3} < 0, \tag{α}$$

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 < 0. \tag{β}$$

La seconde condition renferme toujours implicitement la première, et il suffit de conserver, comme condition de réalité des trois racines de l'équation (1), l'inégalité (β). Cette inégalité se réduit, en effectuant les calculs, à

$$4q^3 - p^2q^2 + 4p^3r - 18pqr + 27r^2 < 0.$$

Or l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (1) doit avoir toutes ses racines positives si l'équation (1) a toutes ses racines réelles (1269), et cette équation aux carrés des différences est (1193)

$$z^3 + 6\left(q - \frac{p^2}{3}\right)z^2 + 9\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^2 z + (4q^3 - p^2q^2 + 4p^3r - 18pqr + 27r^2) = 0.$$

La condition (β) ci-dessus exprime donc précisément que le premier membre de cette équation ne présente que des variations (1265).

On voit que, pour s'assurer de la réalité des racines, il est beaucoup plus simple, en général, de faire disparaître d'abord le second terme de l'équation (1).

Extension aux équations trinômes à exposants impairs.

1289. Considérons encore l'équation trinôme

$$f(x) = x^m + px^n + q = 0, \tag{1}$$

où les exposants m et n sont supposés *impairs*.

La transformée en $-x$ de cette équation est

$$f(-x) = x^m + px^n - q = 0.$$

Désignons par φ et φ' les nombres de variations des premiers membres des deux équations.

p et q peuvent être de même signe ou de signes contraires. Si tous deux sont positifs, on a $\varphi + \varphi' = 1$; si tous deux sont négatifs, on a $\varphi + \varphi' = 3$. Si p est positif et q négatif, on a $\varphi + \varphi' = 1$; si p est négatif et q positif, on a $\varphi + \varphi' = 3$. Ainsi l'équation (1) peut avoir (1256, 1257) une *ou* trois racines réelles. Cherchons les conditions correspondantes.

L'équation dérivée est

$$f'(x) = mx^{m-1} + npx^{n-1} = mx^{n-1}\left(x^{m-n} + \frac{np}{m}\right) = 0. \tag{2}$$

Si p est positif, l'équation (1) *a*, d'après ce qu'on vient de dire, *une seule racine réelle;* et, en effet, l'équation dérivée ne peut avoir alors d'autre racine réelle que zéro.

Si p est négatif, l'équation (1) *peut avoir*, d'après ce qui précède, *trois racines réelles;* et, en effet, l'équation dérivée, outre les racines nulles qu'elle admet en nombre pair, a, dans cette hypothèse, deux racines réelles données par l'équation

$$x^{m-n} + \frac{np}{m} = 0.$$

Ces deux racines réelles ont pour valeur

$$\pm \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}} \quad \text{ou} \quad \pm a',$$

puisque $-\frac{np}{m}$ est une quantité positive et, l'indice $m - n$, un nombre pair.

Si l'équation proposée a alors ses trois racines réelles, on pourra, en les représentant par a, b, c, former la suite croissante (1279)

$$\underbrace{-\infty,}_{-} \quad \underbrace{a,}_{+} \quad \underbrace{-a',}_{-} \quad \underbrace{b,}_{+} \quad \underbrace{+a',}_{-} \quad \underbrace{c,}_{+} \quad \underbrace{+\infty.}_{+}$$

On devra donc avoir

$$f(-a') > 0 \qquad \text{et} \qquad f(+a') < 0.$$

Réciproquement, il est évident, en répétant le raisonnement indiqué au n° 1286, que, si ces conditions sont remplies, l'équation (1) a bien trois racines réelles.

Ces deux conditions, en remplaçant $-a'$ et $+a'$ par leurs valeurs, reviennent à

$$\left(-\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}\right)^m+p\left(-\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}\right)^n+q>0,$$

$$\left(+\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}\right)^m+p\left(+\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}\right)^n+q<0.$$

On en déduit, puisque m et n sont impairs,

$$-\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}-p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}+q>0,$$

$$+\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}+p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}+q<0,$$

c'est-à-dire

$$-\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}\left[1+p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n-m}{m-n}}\right]>-q,$$

$$+\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}\left[1+p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n-m}{m-n}}\right]<-q.$$

La quantité entre crochets dans les deux inégalités revient à

$$1+p\left(-\frac{np}{m}\right)^{-1}=-\frac{m-n}{n}.$$

En divisant les deux membres des deux inégalités par cette quantité négative et en renversant alors leur sens (*Alg. élém.*), on trouve finalement

$$-\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}<\frac{nq}{m-n}, \tag{3}$$

$$+\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}>\frac{nq}{m-n}. \tag{4}$$

p étant négatif, par hypothèse, si q est positif, l'inégalité (3) est satisfaite d'elle-même, et il faut seulement tenir compte de l'inégalité (4) qui a lieu entre quantités positives. Si q est négatif, c'est l'inégalité (4) qui est satisfaite d'elle-même, et il faut seulement tenir compte de l'inégalité (3) qui a lieu entre quantités négatives. Or, dans les deux cas,

la puissance paire $m-n$ du second membre de l'inégalité conservée sera moindre que la puissance $m-n$ du premier membre.

La seconde condition pour que l'équation (1) ait *trois racines réelles* sera donc exprimée par la seule inégalité

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} < \left(-\frac{np}{m}\right)^{m}$$

ou

$$\left(\frac{np}{m}\right)^{m} + \left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} < 0. \tag{5}$$

Il est évident, m étant impair et $m-n$ étant pair, que cette condition comprend la première $[p<0]$, et qu'elle ne pourrait être satisfaite si l'on avait $p>0$.

En résumé, *l'équation trinôme à exposants impairs a une seule racine réelle, lorsqu'on a* $p>0$; *elle a trois racines réelles, lorsque l'inégalité* (5) *est satisfaite.*

Si cette inégalité se changeait en égalité, l'équation (1) aurait toujours trois racines réelles, *mais deux de ces racines seraient égales entre elles.*

En effet, cherchons, en employant les fonctions homogènes (1145), la condition pour que l'équation

$$f(x) = x^m + px^n + q = 0$$

ait une racine double. Nous aurons ici

$$\begin{aligned} f(x,u) &= x^m + pu^{m-n}x^n + qu^m, \\ f'_x(x,u) &= mx^{m-1} + npu^{m-n}x^{n-1}, \\ f'_u(x,u) &= (m-n)pu^{m-n-1}x^n + mqu^{m-1}. \end{aligned}$$

Égalant à zéro les deux dérivées partielles, après y avoir fait $u=1$, nous aurons

$$\begin{aligned} mx^{m-1} + npx^{n-1} &= 0, \\ (m-n)px^n + mq &= 0. \end{aligned}$$

On peut diviser par x^{n-1} les deux membres de la première équation, et en déduire ensuite la valeur de x. On trouve ainsi, $m-n$ étant pair,

$$x = \pm \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}.$$

La seconde équation donne, à son tour,

$$x = \sqrt[n]{-\frac{mq}{(m-n)p}}.$$

Les deux équations considérées devant avoir une racine commune

(1145), on aura la condition cherchée en égalant les deux valeurs de x; ce qui conduit à

$$\pm \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}} = \sqrt[n]{-\frac{mq}{(m-n)p}}$$

ou, en élevant les deux membres de cette égalité à la puissance $(m-n)n$, à

$$\left(-\frac{np}{m}\right)^n = \left[-\frac{mq}{(m-n)p}\right]^{m-n}.$$

On en déduit facilement, en multipliant de part et d'autre par n^{m-n},

$$\left(\frac{np}{m}\right)^m + \left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} = 0;$$

ce qui est l'inégalité (5) changée en égalité.

Remarque. — Si l'on suppose, en particulier, $m = 3$ et $n = 1$ dans l'équation (1) et dans l'inégalité (5), on retombe sur l'équation du troisième degré et sur la condition connue (1286)

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

CHAPITRE III.

SÉPARATION DES RACINES RÉELLES PAR LA MÉTHODE DE M. BUDAN. — THÉORÈME DE FOURIER. — MÉTHODE DE LAGRANGE.

Remarques préliminaires.

1290. Quoique le théorème de Sturm ait rejeté dans l'ombre les tentatives antérieures, nous croyons utile de les faire connaître. Elles ont, par elles-mêmes, un grand intérêt et peuvent, dans certains cas, conduire plus rapidement au but poursuivi. Nous exposerons donc d'abord le procédé de M. Budan pour la séparation des racines réelles, le théorème de Fourier et la méthode de Lagrange.

1291. Le Dr Budan présenta à l'Académie des Sciences, en 1803, la première partie de la méthode imaginée par lui pour la résolution des équations numériques de tous les degrés; et cette première Partie, concernant le cas où toutes les racines de l'équation considérée sont réelles, fut approuvée par l'Académie.

En 1807, il publia (1) ce premier Mémoire, avec addition de deux autres parties où il s'efforçait d'étendre sa méthode à tous les cas, sans y réussir.

Enfin, en 1811, il communiqua à l'Académie la démonstration d'un théorème important que Fourier avait déjà fait connaître dans ses Cours à l'École Polytechnique, et auquel, après avoir expliqué la méthode de Budan, nous conserverons la forme que lui a donnée son illustre auteur.

(1) F.-D. Budan, D. M. P., *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique. — Courcier, année 1807.

Méthode de Budan.

1292. Cette méthode, *quand toutes les racines de l'équation proposée sont réelles*, n'est que la mise en œuvre, pour ainsi dire arithmétique, du théorème établi au n° 1267 comme conséquence du *théorème de* DESCARTES, et énoncé par Budan à la page 26 de sa publication de 1807.

Pour séparer les racines positives, Budan *diminue* successivement les racines de l'équation donnée, $f(x) = 0$, des nombres entiers 1, 2, 3, ..., c'est-à-dire qu'il en détermine (1107) les transformées en $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... Le nombre des variations perdues quand on passe de $f(x)$ à $f(x+1)$ est le nombre des racines positives de $f(x) = 0$ qui tombent entre 0 et 1, et auxquelles correspondent nécessairement dans la transformée des racines négatives. De même, le nombre des variations perdues quand on passe de $f(x+1)$ à $f(x+2)$ est le nombre des racines positives de $f(x) = 0$ qui tombent entre 1 et 2; et ainsi de suite. De cette manière, on sait combien il y a, respectivement, de racines positives de $f(x) = 0$ entre les nombres 0, 1, 2, 3, ..., et l'on connaît la partie entière de chacune d'elles.

On continue les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à une transformée $f(x+n)$ qui n'ait plus que des permanences, et le nombre n est alors une *limite supérieure* des racines positives de $f(x) = 0$.

Pour séparer les racines négatives de l'équation donnée, on considère sa transformée en $-x$ (1105), et l'on n'a qu'à opérer par rapport aux racines positives de cette transformée comme on vient de l'expliquer, puisque ces racines positives répondent aux racines négatives de la proposée.

Si l'une des transformées $f(x+a)$ a zéro pour dernier terme, l'équation $f(x+a) = 0$ a une racine nulle, et l'équation $f(x) = 0$ admet la racine a. La racine a est double, triple, ..., si la transformée $f(x+a)$ perd ses deux derniers, ses trois derniers termes, ...

Ainsi, le procédé suivi opère la séparation des racines supposées toutes réelles, en faisant connaître directement les racines entières, simples ou multiples.

1292. Les calculs sont très simples. On peut, en effet, déduire les transformées les unes des autres, en remarquant

que, diminuer de 1 les racines de $f(x+1)=0$, c'est diminuer de 2 les racines de $f(x)=0$ ou former la transformée $f(x+2)$; que, diminuer de 1 les racines de $f(x+2)=0$, c'est diminuer de 3 les racines de $f(x)=0$ ou former la transformée $f(x+3)$, etc. Il en résulte que *la seule substitution à effectuer sera toujours celle de l'unité.*

Ainsi, en partant d'une transformée quelconque

$$\varphi(x)=f(x+k),$$

on aura (1107)

$$\varphi(x+1)=\varphi(1)+\frac{\varphi'(1)}{1}x+\frac{\varphi''(1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{\varphi^m(1)}{1.2.3\ldots m}x^m.$$

On devra donc simplement substituer 1 à la place de x dans la suite renversée

$$\frac{\varphi^m(x)}{1.2.3\ldots m},\quad \frac{\varphi^{m-1}(x)}{1.2.3\ldots(m-1)},\quad \ldots,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2},\quad \frac{\varphi'(x)}{1},\quad \varphi(x),$$

pour obtenir, dans la transformée cherchée, les coefficients des puissances décroissantes de x depuis m jusqu'à 0.

1294. Une fois que les racines, supposées toutes réelles, ont été séparées et déterminées *quant à leur partie entière,* il faut pouvoir en approcher davantage. Budan trouve de la manière suivante le chiffre des dixièmes, des centièmes, etc., de chaque racine.

Soit toujours l'équation $f(x)=0$. Supposons que a soit la partie entière d'une certaine racine positive x comprise entre les entiers a et $a+1$. Désignons par a', a'', a''', ..., les chiffres décimaux successifs de la racine x.

$x-a$ étant moindre que l'unité, posons

$$y=x-a=\frac{x'}{10}.$$

x' sera moindre que 10, et sa partie entière sera précisément a'. Or, pour former la transformée en x', il suffit (1103) de multiplier les différents termes de l'équation en y [ou de la transformée $f(x+a)$ en conservant partout le symbole x] par les puissances successives 10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^{m-1}, 10^m. De l'équation en x ainsi obtenue, on déduira de nouveau les transformées en $x+1$, $x+2$, $x+3$, ..., $x+9$, et, dès que l'une d'elles perdra une variation, on saura comme précédemment (1292) quelle est la partie entière de x' ou la valeur de a'.

On posera ensuite

$$y' = x' - a' = \frac{x''}{10},$$

et l'on raisonnera par rapport aux trois quantités x', a', x'', comme on vient de le faire par rapport aux trois quantités x, a, x'. On multipliera donc encore les termes successifs de la transformée à laquelle on se sera arrêté pour déterminer a' par les mêmes puissances 10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^{m-1}, 10^m, et l'on formera les transformées en $x+1$, $x+2$, $x+3$, ..., $x+9$, de l'équation ainsi obtenue. Dès que l'une d'elles aura perdu une variation, on saura quelle est la partie entière de x'', ou quel est le chiffre a'' des centièmes de la valeur décimale de la racine x, etc.

1295. On approche ainsi davantage d'une racine dont un ou plusieurs chiffres sont déjà connus.

On peut aussi suivre la même marche pour séparer plusieurs racines comprises entre deux entiers consécutifs, parce que les variations, perdues à la fois quand les racines considérées ont même partie entière ou mêmes premiers chiffres décimaux, disparaissent seulement *une à une* dès qu'on atteint un chiffre décimal appartenant à l'une de ces racines sans appartenir aux autres.

Cette manière d'opérer, *dans le cas où toutes les racines sont réelles,* est générale; mais les calculs sont plus ou moins pénibles, et d'autres méthodes peuvent être préférables.

Pour ne laisser aucun doute, nous donnerons deux exemples.

1296. 1° *Trouver les racines de l'équation*

$$f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0,$$

sachant qu'elles sont toutes réelles.

Pour les séparer ou pour obtenir leurs parties entières, nous déterminerons les transformées $f(x+1)$, $f(x+2)$, etc. Nous aurons, par exemple,

$$f(x+1) = f(1) + f'(1)\frac{x}{1} + f''(1)\frac{x^2}{1.2} + f'''(1)\frac{x^3}{1.2.3} + f^{IV}(1)\frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

Mais

$$f'(x) = 4x^3 - 18x + 4, \quad f''(x) = 12x^2 - 18, \quad f'''(x) = 24x, \quad f^{IV}(x) = 24,$$

On aura donc, en renversant l'ordre des termes,

$$f(x+1) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8.$$

C'est en opérant de la sorte et en continuant comme on l'a expliqué au n° 1293 qu'on peut former le Tableau suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \quad - 9x^2 + 4x + 12, \quad 2 \text{ var.} \\ f(x+1) &= x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8, \quad 2 \text{ var.} \\ f(x+2) &= x^4 + 8x^3 + 15x^2 \quad 0 \quad 0, \quad 0 \text{ var.} \end{aligned}$$

Les deux derniers coefficients de $f(x+2)$ étant nuls, 2 est racine double de l'équation $f(x) = 0$ [1292], et $f(x)$ est divisible exactement par $(x-2)^2$ [1063]. Le quotient, $x^2 + 4x + 3$, égalé à zéro, conduit aux deux autres racines -1 et -3 de la proposée, qui sont nécessairement négatives, puisque la dernière transformée $f(x+2)$ ne présente que des permanences (1267).

Pour les trouver d'après la même méthode, on prendrait la transformée en $-x$ de l'équation $\varphi(x) = x^2 + 4x + 3 = 0$. On aurait ainsi

$$\varphi(-x) = \psi(x) = x^2 - 4x + 3 = 0,$$

et l'on en déduirait le Tableau suivant :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^2 - 4x + 3, \quad 2 \text{ var.} \\ \psi(x+1) &= x^2 - 2x \quad 0, \quad 1 \text{ var.} \\ \psi(x+2) &= x^2 \quad 0 \quad -1, \quad 1 \text{ var.} \\ \psi(x+3) &= x^2 + 2x \quad 0, \quad 0 \text{ var.} \end{aligned}$$

Le dernier terme de $\psi(x+1)$ étant zéro comme le dernier terme de $\psi(x+3)$, la transformée $\varphi(-x) = \psi(x) = 0$ admet la racine $+1$ et la racine $+3$ [1292]. La proposée $f(x) = 0$ admet donc, à son tour, les racines négatives -1 et -3.

1297. 2° *Séparer et déterminer à* 0.001 *près les racines de l'équation*

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0,$$

sachant qu'elles sont toutes réelles.

Nous choisissons cet exemple pour réunir deux cas en un seul (1295).

On a ici

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6, \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x + 2, \\ f'''(x) &= 24x - 24, \\ f^{IV}(x) &= 24, \end{aligned}$$

et il en résulte

$$f(x+1) = x^4 - 5x^2 + 5.$$

On peut alors, en poursuivant de la même manière, établir le Tableau ci-dessous :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2, && 2 \text{ var.}\\
f(x+1) &= x^4 \quad 0 \quad - 5x^2 \quad 0 + 6, && 2 \text{ var.}\\
f(x+2) &= x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2, && 2 \text{ var.}\\
f(x+3) &= x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 12x + 2, && 0 \text{ var.}
\end{aligned}$$

3 est donc une *limite supérieure* des racines positives de $f(x) = 0$ [1292], et il en existe *deux* entre les nombres entiers 2 et 3 (1267).

La transformée en $-x$ est

$$f(-x) = \varphi(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0.$$

On peut donc former le Tableau

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2, && 2 \text{ var.}\\
\varphi(x+1) &= x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 12x + 2, && 0 \text{ var.}
\end{aligned}$$

1 étant une limite supérieure des racines positives de la transformée en $-x$, -1 est une *limite inférieure* des racines négatives de la proposée, et cette équation a *deux* racines négatives entre 0 et -1, puisque $\varphi(x) = 0$ a *deux* racines positives entre 0 et 1.

Cherchons à séparer les deux racines positives comprises entre 2 et 3, en les exprimant en décimales.

Il faut, pour cela, opérer comme il a été dit au n° 1294. Nous prendrons donc la transformée $f(x+2)$, et nous multiplierons ses différents termes par les puissances successives de 10, depuis 10^0 jusqu'à 10^4. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$f_1(x) = x^4 + 40x^3 + 100x^2 - 6000x + 20000 = 0,$$

sur laquelle nous n'aurons qu'à opérer comme nous l'avons fait d'abord sur $f(x) = 0$, pour obtenir le chiffre des dixièmes de chacune des racines comprises entre 2 et 3. Nous aurons le Tableau suivant :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^4 + 40x^3 + 100x^2 - 6000x + 20000, && 2 \text{ var.}\\
f_1(x+1) &= x^4 + 44x^3 + 226x^2 - 5676x + 14141, && 2 \text{ var.}\\
f_1(x+2) &= x^4 + 48x^3 + 364x^2 - 5088x + 8736, && 2 \text{ var.}\\
f_1(x+3) &= x^4 + 52x^3 + 514x^2 - 4212x + 4061, && 2 \text{ var.}\\
f_1(x+4) &= x^4 + 56x^3 + 676x^2 - 3024x + 416, && 2 \text{ var.}\\
f_1(x+5) &= x^4 + 60x^3 + 850x^2 - 1500x - 1875, && 1 \text{ var.}\\
f_1(x+6) &= x^4 + 64x^3 + 1036x^2 + 384x - 2464, && 1 \text{ var.}\\
f_1(x+7) &= x^4 + 68x^3 + 1234x^2 + 2652x - 979, && 1 \text{ var.}\\
f_1(x+8) &= x^4 + 72x^3 + 1444x^2 + 5328x + 2976, && 0 \text{ var.}
\end{aligned}$$

Ce Tableau montre qu'une seule variation disparaît quand on passe

de $f_1(x+4)$ à $f_1(x+5)$, et ensuite, quand on passe de $f_1(x+7)$ à $f_1(x+8)$. La première racine a donc 4 pour chiffre des dixièmes et est égale à 2,4, ..., tandis que la seconde racine a 7 pour chiffre des dixièmes et est égale à 2, 7, ...

On peut opérer de même pour trouver le chiffre des centièmes de chaque racine, en partant des deux transformées $f_1(x+4)$ et $f_1(x+7)$, et en multipliant d'abord leurs différents termes par les puissances successives de 10; etc.

En continuant les calculs, on obtient pour les deux racines

$$2,414, \ldots \quad \text{et} \quad 2,732, \ldots.$$

Pour déterminer également les chiffres décimaux des deux racines comprises entre 0 et -1, il faut partir de la transformée en $-x$ ou de l'équation $\varphi(x)=0$, et lui appliquer le même algorithme.

Mais, comme il arrive, *fortuitement,* que $\varphi(x)$ et $f(x+2)$ *se confondent,* il est clair qu'on retombera sur les transformées ci-dessus calculées et sur les mêmes chiffres décimaux, de sorte que les deux racines négatives de l'équation $f(x)=0$ sont immédiatement

$$-0,414, \ldots \quad \text{et} \quad -0,732, \ldots.$$

1298. On remarquera que, lorsque les racines, supposées toutes réelles, sont très rapprochées et présentent plusieurs décimales communes, la méthode précédente devient, lorsqu'on veut parvenir à les séparer complètement, très longue et rebutante.

Il y a plus. Si l'on n'est pas renseigné sur la nature des racines, si l'on ne peut pas affirmer qu'elles sont toutes réelles, le théorème du n° 1267 cesse d'être applicable, et deux variations perdues d'une transformée à l'autre peuvent correspondre aussi bien à l'existence de deux racines réelles qu'à celle de deux racines imaginaires (1300). Dans ce dernier cas, on chercherait en vain à séparer ces deux racines, et les calculs indiqués, poursuivis indéfiniment, ne donneraient rien. C'est là une objection insurmontable, qui rend la méthode de M. Budan, quelque utile qu'elle puisse être dans certains cas, absolument insuffisante.

Théorème de Fourier.

1299. Ce théorème, auquel on donne souvent le nom de Budan (1291) en s'appuyant sur la priorité qui lui serait acquise par suite de la présentation de son dernier Mémoire

à l'Académie des Sciences, en 1811, *doit être désigné par le nom de* FOURIER.

Bien qu'il se soit occupé toute sa vie de cette question, l'ouvrage (1) qui contient les travaux de ce grand géomètre sur la résolution des équations numériques n'a été publié qu'un peu plus d'un an après sa mort par NAVIER.

On trouve dans l'*Avertissement* de l'éminent éditeur les preuves les plus évidentes des droits de FOURIER. Nous nous bornerons à renvoyer le lecteur aux pages xvij, xviij, xix de cet Avertissement, où il est établi que Fourier a exposé publiquement son théorème dans ses Cours à l'École Polytechnique, avant et après l'expédition d'Égypte, c'est-à-dire en 1797 et dans les premiers mois de 1803.

Or il nous paraît impossible de ne pas regarder comme assimilables à une véritable publication des Leçons orales données à l'École Polytechnique ou dans tout autre établissement d'enseignement supérieur, et de ne pas admettre en témoignage les Notes rédigées par les meilleurs élèves au sortir de ces Leçons et conservées par eux.

Ajoutons que c'est l'énoncé même adopté par FOURIER et sa belle démonstration qui ont survécu seuls; ajoutons encore que c'est en s'inspirant de ses recherches que STURM a été conduit à sa découverte capitale. Il y a là, sans doute, une raison péremptoire pour laisser à l'auteur de la *Théorie mathématique de la chaleur* l'un des titres de gloire auquel il attachait le plus d'importance, en ne séparant pas son nom du résultat de ses profondes et persévérantes études.

1300. THÉORÈME DE FOURIER. — *Soient une équation* $f(x) = 0$, *de degré m, et la suite formée par son premier membre et ses m dérivées successives,*

$$(1) \qquad f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^m(x).$$

Si l'on substitue à la place de x, dans la suite indiquée, deux quantités réelles quelconques, α *et* $\beta > \alpha$, *et si l'on compte les variations présentées par les deux séries de résultats obtenus, le nombre des variations perdues en passant de la première série à la seconde est une limite supérieure du*

(1) *Analyse des équations déterminées,* par M. FOURIER. — Firmin Didot frères, 1831.

nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, *comprises entre les deux substitutions* α *et* β, *et la différence entre cette limite et le nombre des racines réelles dont il s'agit, différence qui peut être nulle, est toujours un nombre pair.*

Quand on fait croître x d'une manière continue, les signes des valeurs prises par les fonctions de la suite (1) ne peuvent changer que lorsque x atteint et dépasse une racine des équations obtenues en égalant ces fonctions à zéro (1071).

Admettons que, pour $x = a$, une ou plusieurs fonctions consécutives de la suite (1) s'annulent, et représentons ces fonctions par

$$(2) \qquad f^{\mu}(x), \quad f^{\mu+1}(x), \quad \ldots, \quad f^{\mu+n-1}(x),$$

le nombre n pouvant se réduire à l'unité et l'indice μ à zéro, auquel cas a est une racine de l'équation $f(x) = 0$. Comme la dernière fonction de la suite (1), $f^{m}(x)$, est une constante (736), l'indice $\mu + n - 1$ peut être, au plus, égal à $m - 1$.

Formons une troisième suite, en ajoutant à la suite (2) la première fonction $f^{\mu+n}(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$. Nous aurons

$$(3) \qquad f^{\mu}(x), \quad f^{\mu+1}(x), \quad \ldots, \quad f^{\mu+n-1}(x), \quad f^{\mu+n}(x).$$

Si h désigne alors une quantité positive aussi petite qu'on voudra, les $n + 1$ termes de la suite (3) offriront toujours n variations pour $x = a - h$ et n permanences pour $x = a + h$ (1274).

Cela posé, considérons successivement les deux hypothèses $\mu = 0$ et $\mu > 0$. Dans le premier cas, la suite (2) commence à $f(x)$; dans le second, elle commence à un terme quelconque de la suite (1).

Si l'on a $\mu = 0$, les n premiers termes de la suite (1) s'annulent pour $x = a$, a est une racine multiple d'ordre n de l'équation $f(x) = 0$, et les $n + 1$ premiers termes de la même suite perdent n variations quand on passe de la substitution $x = a - h$ à la substitution $x = a + h$ (1274), c'est-à-dire autant de variations que a est de fois racine de $f(x) = 0$.

Si l'on a $\mu > 0$, on peut ajouter à la suite (3) le terme qui précède $f^{\mu}(x)$, et former une nouvelle suite

$$(4) \quad f^{\mu-1}(x), \quad f^{\mu}(x), \quad f^{\mu+1}(x), \quad \ldots, \quad f^{\mu+n-1}(x), \quad f^{\mu+n}(x),$$

comprenant $n+2$ termes. Il faut alors distinguer entre n pair et n impair.

Si n est un nombre pair $2k$, a est une racine multiple d'ordre pair $2k$ de l'équation $f^{\mu}(x)=0$ (1135). Il en résulte que $f^{\mu}(x)$ conserve son signe avant et après a, c'est-à-dire de $x=a-h$ à $x=a+h$ (1073). $f^{\mu-1}(x)$ conserve aussi son signe dans le même intervalle, puisque a n'est pas racine de l'équation $f^{\mu-1}(x)=0$. D'ailleurs, le théorème du n° 1274 reste toujours applicable à la suite (3). Par conséquent, la suite (4) perd seulement n ou $2k$ variations, quand on passe de la substitution $a-h$ à la substitution $a+h$.

Si n est un nombre impair $2k+1$, a est une racine multiple d'ordre impair $2k+1$ de l'équation $f^{\mu}(x)=0$, et la suite (3) perd n ou $2k+1$ variations, quand on passe de $x=a-h$ à $x=a+h$. Mais, dans le même intervalle, $f^{\mu-1}(x)$ conserve son signe, tandis que $f^{\mu}(x)$ en change nécessairement (1073). Il y a donc forcément dans cet intervalle une variation *gagnée ou perdue* entre les deux premiers termes de la suite (4), selon que ces termes étaient *de même signe ou de signes contraires* pour $x=a-h$. Par conséquent, la suite (4) perd alors un nombre de variations égal à $(2k+1)\pm 1$, c'est-à-dire qu'elle perd $2k$ ou $2k+2$ variations, quand x passe de $a-h$ à $a+h$.

Ainsi, lorsqu'on a $\mu>0$ et que n termes consécutifs de la suite (1), à partir du terme $f^{\mu}(x)$, s'annulent pour $x=a$, la suite (4) perd toujours un nombre pair de variations [$2k$ ou $2k+2$], quand on passe de $x=a-h$ à $x=a+h$, et ce nombre pair positif ne peut se réduire à zéro, d'après l'alinéa précédent, que si l'on a $n=1$.

En résumé, x croissant depuis le nombre donné α jusqu'au nombre donné β, on voit que, chaque fois que la valeur atteinte par x annulera quelques-uns des termes consécutifs de la suite (1), *autres que le premier terme,* cette suite perdra un nombre pair de variations; mais que, lorsque la valeur atteinte par x annulera le premier terme lui-même ou sera une racine (d'ordre n) de l'équation $f(x)=0$, la suite (1) perdra précisément n variations.

N étant le nombre *total* des racines réelles de $f(x)=0$ (*simples ou multiples*), comprises entre α et β, la suite (1) perdra donc, lorsqu'on passera de la substitution $x=\alpha$ à la substitution $x=\beta$, un nombre de variations représenté par

$N + 2K$, $2K$ étant un nombre pair positif qui peut être nul. C'est ce qu'il fallait démontrer.

1301. *Ce théorème remarquable conduit* naturellement (1267) *à une limite inférieure du nombre des racines imaginaires de l'équation* $f(x) = 0$. Si $2K$ n'est pas nul, $2K$ est cette limite.

En conservant les autres notations du numéro précédent, désignons par N_1 et N_2 les nombres de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, comprises d'une part entre $-\infty$ et $+\alpha$ et, d'autre part, entre β et $\beta + \infty$. Soient $N_1 + 2K_1$ et $N_2 + 2K_2$ les nombres de variations perdues par la suite (1), relativement aux substitutions $-\infty$ et α d'une part et aux substitutions β et $+\infty$ d'autre part.

Pour $x = -\infty$, la suite (1), composée de $m + 1$ termes, ne renferme que des variations et, pour $x = +\infty$, que des permanences (1049). Comme on peut aller de $-\infty$ à $+\infty$, en passant d'abord de $x = -\infty$ à $x = \alpha$, puis de $x = \alpha$ à $x = \beta$, et enfin de $x = \beta$ à $x = +\infty$, on a nécessairement

$$N_1 + 2K_1 + N + 2K + N_2 + 2K_2 = m.$$

Le nombre I des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ étant égal à

$$m - (N_1 + N + N_2),$$

on a

$$I = 2K_1 + 2K + 2K_2 \qquad \text{ou} \qquad I \geqq 2K.$$

1302. Il est clair que, si toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont réelles, le nombre de variations perdues de la substitution α à la substitution β est exactement le nombre des racines de $f(x) = 0$ comprises entre α et β.

En effet, la condition $I = 0$ entraîne nécessairement (1301) la condition

$$2K_1 + 2K + 2K_2 = 0$$

et, en particulier, $2K = 0$, de sorte que le nombre de variations perdues de la substitution α à la substitution β se confond avec le nombre N des racines réelles comprises entre α et β. On retrouve ainsi immédiatement le théorème du n° 1267.

1303. Il peut arriver que l'un des nombres limites substi-

tués à la place de x, α par exemple, annule un ou plusieurs termes de la suite (1). Comment compter alors les variations de la suite?

Fourier tourne la difficulté en substituant successivement $\alpha - h$ et $\alpha + h$ au lieu de α (la quantité positive h étant aussi petite qu'on voudra), et en appliquant ce qu'il appelle la *règle du double signe* (1). Il nous paraît plus simple de substituer seulement $\alpha - h$. En effet, supposons que α annule les termes de la suite (3) [1300], sauf le dernier. On sait, sans qu'aucun nouveau calcul soit nécessaire, que, pour $x = \alpha - h$, cette suite ne présentera que des variations (1274). On n'aura donc qu'à chercher combien de ces variations disparaissent lorsqu'on fait $x = \beta$.

De même, si β annule les termes de la suite (3), sauf le dernier, on pourra substituer $\beta + h$ au lieu de β. On sait que, pour $x = \beta + h$, cette suite ne présentera que des permanences (1274). On n'aura donc qu'à regarder comme perdues toutes les variations obtenues par la substitution $x = \alpha$.

1304. Le théorème de Descartes est une simple conséquence du théorème de Fourier.

En effet, appliquons ce dernier théorème à la suite (1) [1300], en supposant d'abord que l'équation $f(x) = 0$ est *complète* et que le premier terme de $f(x)$ est *positif*, et en choisissant pour nombres limites $\alpha = 0$ et $\beta = +\infty$.

Pour $x = \alpha = 0$, la suite (1) se réduit évidemment aux coefficients mêmes de l'équation $f(x) = 0$, pris avec leurs signes (abstraction faite de multiplicateurs numériques essentiellement positifs).

Pour $x = \beta = +\infty$, la même suite ne renferme que des permanences (1049).

Il en résulte que le nombre des variations du premier membre de l'équation $f(x) = 0$ est égal (1300) à $P + 2K$, en désignant par P le nombre des racines réelles de l'équation comprises entre 0 et $+\infty$, c'est-à-dire le nombre de ses racines positives, et par $2K$ un nombre pair qui peut être nul. C'est précisément le théorème de Descartes (1255).

Si l'équation $f(x) = 0$ est *incomplète*, la première substitution $x = \alpha = 0$ peut annuler quelques termes de la suite (1).

(1) *Analyse des équations*, p. 103.

Mais, au lieu de substituer o, on peut substituer $-h$ et $+h$ et, *si l'équation* $f(x)=0$ *n'a pas de racines nulles*, le nombre des variations perdues en passant de $x=-h$ à $x=+h$ se réduit à un nombre pair (1300). On arrive donc au même énoncé, en substituant $+h$ et $+\infty$ *au lieu de* o et $+\infty$, puisque h peut être pris assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine positive entre o et h.

1305. Pour appliquer le théorème de Fourier à la séparation des racines de l'équation $f(x)=0$, on opère comme il suit.

Admettons qu'on ait déterminé, comme nous le montrerons plus tard (*voir le Chap. VI du présent Livre*), une limite inférieure L′ des racines réelles de l'équation et une limite supérieure L de ces mêmes racines. On substituera alors dans la suite (1) [1300]

$$(1) \qquad f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^m(x),$$

des quantités croissantes depuis L′ jusqu'à L, en faisant varier ces quantités suivant la loi qui semblera le plus convenable, et l'on examinera de quelle manière les nombres de variations de la suite se comportent d'une substitution à l'autre.

Si deux substitutions consécutives ne font perdre aucune variation à la suite (1), il n'y a aucune racine réelle de l'équation proposée entre les deux nombres substitués.

Si deux substitutions consécutives répondent à la perte d'une seule variation, les deux nombres substitués comprennent une racine réelle de l'équation, et une seule.

Si deux substitutions consécutives répondent à la perte d'un nombre impair de variations, $2p+1$, les deux nombres substitués comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation, sans qu'on puisse décider (sans nouveaux calculs) si ce nombre impair de racines réelles est $2p+1$, $2p-1$, ..., ou 1.

Enfin, si deux substitutions consécutives répondent à la perte d'un nombre pair de variations, $2p$, les deux nombres substitués comprennent un nombre pair de racines réelles de l'équation, sans qu'on puisse décider (sans nouveaux calculs) si ce nombre pair de racines réelles est $2p$, $2p-2$, ..., ou o.

Dans ces deux derniers cas, la difficulté reste toujours celle

que nous avons déjà indiquée à propos de la méthode de M. Budan (1298); et de nouvelles substitutions plus resserrées ne peuvent la lever que lorsque les racines réelles supposées existent, tandis qu'elles se poursuivent indéfiniment sans résultat lorsque ces racines réelles sont remplacées par des racines imaginaires.

Fourier, dans l'Ouvrage cité plus haut, a essayé d'aller plus loin, et il a donné, pour arriver plus sûrement à la séparation des racines réelles et à la détermination du nombre des racines imaginaires, des règles très ingénieuses qui permettent, dans certains cas, de parvenir plus rapidement au but qu'en employant la méthode de Sturm, dont la perfection théorique est absolue, mais qui, pratiquement, peut exiger des calculs très pénibles. Nous ne croyons pas devoir exposer ces perfectionnements de Fourier, et nous renverrons pour leur étude à l'*Analyse des équations*. Nous ferons connaître par la suite des procédés en général plus simples et, par cela même, plus satisfaisants.

Méthode de Lagrange.

1306. La première méthode entièrement rigoureuse pour la séparation des racines réelles est due à Lagrange [1]; la seconde est due à Sturm, et nous lui consacrerons le Chapitre suivant.

Voici en quoi consiste la méthode de Lagrange.

Nous supposerons que l'équation $f(x) = 0$, de degré m, n'a plus de racines égales (1046), et nous admettrons qu'on a déterminé une limite inférieure L′ et une limite supérieure L, aussi rapprochées que possible, des racines réelles de cette équation.

Nous substituerons alors dans $f(x)$, à la place de x, une

---

[1] Lagrange a publié son beau *Mémoire* dans le recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1767, et les *Additions* dans le Volume des Mémoires de la même Académie pour 1768. Il a réuni tout son travail, enrichi de notes importantes, sous ce titre : *Traité de la résolution des équations numériques*, ouvrage qui a eu deux éditions du vivant de l'illustre auteur, en 1798 et en 1808.

Le *Traité de la résolution des équations numériques* forme le tome VIII des *Œuvres de* Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A. Serret. — Gauthier-Villars, M DCCC LXXIX.

série de nombres croissants

$$(1) \qquad \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \ldots, \ \lambda_n, \ \lambda_{n+1} \ \ldots,$$

commençant à la limite inférieure L′ (ou en deçà) et se terminant à la limite supérieure L (ou au delà).

Si les nombres substitués sont choisis de manière que, entre deux termes consécutifs de la suite (1), il ne puisse tomber PLUS D'UNE racine réelle de l'équation donnée, il est clair que les substitutions indiquées opéreront à coup sûr la séparation des racines réelles de cette équation. Car, si deux substitutions consécutives donnent des résultats de signes contraires, les deux nombres substitués comprendront une racine réelle et une seule; et ils n'en comprendront aucune, si les résultats obtenus sont de même signe (1071).

Or, la suite (1) remplira évidemment la condition imposée, si ses termes sont ceux d'une progression par différence dont la raison δ soit moindre que la différence de deux racines réelles *quelconques* de l'équation donnée; car, alors, il ne pourra jamais exister deux racines réelles de cette équation entre deux termes consécutifs de la progression considérée. LAGRANGE est parvenu à déterminer cette raison δ, en ayant recours à l'*équation aux carrés des différences des racines* de l'équation proposée (1193, 1192).

Cette équation aux carrés des différences, qui est de degré $\frac{m(m-1)}{2}$, étant calculée comme nous l'avons montré, supposons que ρ soit une *limite inférieure* de ses racines positives, qui correspondent (1269) aux racines réelles de la proposée $f(x)=0$. La limite ρ étant moindre que le carré de la plus petite différence qui puisse exister entre ces racines réelles prises deux à deux, on voit qu'on n'a qu'à choisir, pour la raison δ, la valeur

$$\delta = \sqrt{\rho}.$$

Si ρ est supérieur à 1 et si $\sqrt{\rho}$ est un nombre incommensurable, il est préférable d'égaler δ au nombre entier inférieur le plus rapproché de $\sqrt{\rho}$.

Si ρ est moindre que 1, il faut prendre pour δ une fraction moindre que 1. Pour éviter alors la substitution de nombres fractionnaires dans l'équation donnée, on peut diviser ses racines par δ ou former sa transformée en δx (1104), de façon

à n'avoir à substituer dans cette transformée, et dans les limites voulues, que des nombres entiers. En effet, si α et β sont deux racines réelles quelconques de l'équation $f(x) = 0$, $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ seront les deux racines correspondantes de la transformée $f(\delta x) = 0$; de sorte que, si la raison δ est moindre que la différence $\alpha - \beta$, l'unité sera moindre que la différence $\frac{\alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha - \beta}{\delta}$. Par conséquent, en choisissant la limite inférieure L′ des racines réelles de l'équation $f'(x) = 0$, de manière que le quotient $\frac{L'}{\delta}$, limite inférieure des racines réelles de l'équation transformée $f(\delta x) = 0$, soit un entier, on n'aura qu'à substituer dans cette transformée des entiers consécutifs. Une fois la séparation des racines réelles de la transformée effectuée, on en déduira immédiatement celle des racines réelles de la proposée.

1307. Telle est la méthode de Lagrange, qui résout d'une manière complète le problème de la séparation des racines réelles d'une équation donnée. Mais cette méthode exige la formation de l'équation aux carrés des différences, qui devient pénible lorsque le degré de la proposée s'élève (1), et l'on peut avoir à exécuter un très grand nombre de substitutions. Pour diminuer leur nombre, on prendra les limites L′ et L aussi rapprochées qu'on pourra, et l'on choisira pour la raison δ, en ayant égard aux observations précédentes, la plus grande valeur possible.

Lorsqu'on sait d'avance que toutes les racines de l'équation considérée sont réelles, on évite la formation de l'équation aux carrés des différences en substituant immédiatement dans $f(x)$, d'abord les nombres entiers consécutifs compris entre les limites L′ et L, puis des nombres de plus en plus rapprochés. On finira nécessairement par obtenir ainsi un nombre de changements de signes égal au degré m de l'équation traitée, et les racines seront alors séparées.

---

(1) C'est ce qui explique les recherches ultérieures de Fourier et de Budan, qui voulaient s'affranchir de l'équation aux carrés des différences.

CHAPITRE IV.

THÉORÈME DE STURM.

Indications préliminaires.

1308. Une équation $f(x)=0$ étant donnée, il suffit, d'après le théorème de Rolle (1275), pour pouvoir fixer le nombre de ses racines réelles et les séparer (1279), de savoir résoudre l'équation dérivée $f'(x)=0$; mais, lorsqu'on ne sait pas résoudre l'équation dérivée, il faut avoir recours au *théorème de* Sturm.

C'est dans un *Mémoire sur la résolution des équations numériques* que Sturm fit connaître son célèbre théorème. Ce Mémoire fut lu par l'auteur à l'Académie des Sciences, le 13 mai 1829, et il en donna peu après une analyse dans le *Bulletin de Férussac* (1).

A l'époque où Sturm vint se fixer à Paris (1825) et où il fut accueilli par Fourier, ce dernier réunissait autour de lui quelques jeunes géomètres appelés à un brillant avenir. Sturm subit l'heureuse influence de ce maître, pour lequel il conserva toujours la plus vive gratitude, et s'occupa avec passion de la théorie mathématique de la chaleur et, surtout, de la résolution des équations numériques. Voici comment il s'exprime à cet égard dans l'analyse de son Mémoire :

« L'Ouvrage (2) qui doit renfermer l'ensemble des travaux de M. Fourier sur l'Analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fou-

(1) T. XI, p. 419. — Le Mémoire original se trouve reproduit en entier dans le tome VI des *Mémoires des Savants étrangers*, p. 271. — 1835.

(2) *Analyse des équations.*

rier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer. »

Ces paroles font trop d'honneur aux deux savants pour que nous n'ayons pas cru devoir les citer; et elles ne peuvent rien enlever à la gloire de Sturm, qui triompha là où Fourier n'avait réussi qu'imparfaitement.

Théorème de Sturm.

1309. On donne une équation $f(x) = 0$, de degré m, *qui n'a pas de racines égales,* et dont le premier membre est ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Nous poserons à la fois $f(x) = X$ et $f'(x) = X_1$. Puisque l'équation considérée n'a pas de racines égales, X et X_1 n'admettront aucun plus grand commun diviseur (1134).

Divisons alors X par X_1, comme si nous voulions trouver le plus grand commun diviseur des deux polynômes. Nous poursuivrons la division jusqu'à ce que nous parvenions à un reste de degré inférieur à X_1. Désignons par X_2 ce reste *changé de signe*. Divisons de même X_1 par X_2, et poursuivons la division jusqu'à ce que nous parvenions à un reste de degré inférieur à X_2. Désignons par X_3 ce reste *aussi changé de signe*.

En continuant les opérations de la même manière, c'est-à-dire en ayant toujours soin de changer les signes de tous les termes de chaque reste, avant de prendre ce reste pour nouveau diviseur, nous arriverons, après un certain nombre de divisions, $p-1$ par exemple, *à un reste numérique,* puisque X et X_1 ne peuvent avoir aucun plus grand commum diviseur en x. Désignons par X_p ce reste numérique *également changé de signe*.

On obtiendra ainsi une suite

$$(1)\quad X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_{n-1},\ X_n,\ \ldots,\ X_{p-1},\ X_p,$$

de $p+1$ fonctions, qu'on appelle les *Fonctions de* Sturm, et dont les degrés par rapport à x vont en décroissant depuis m jusqu'à 0.

Cela posé, l'énoncé du théorème est le suivant :

Théorème de Sturm. — *La suite* (1) *étant formée, soient deux nombres réels quelconques,* α *et* $\beta > \alpha$; *substituons-les successivement à la place de* x *dans les fonctions indiquées ci-dessus, qui prendront alors des valeurs positives ou négatives. Pour chaque substitution, la suite* (1) *présentera donc un certain nombre de variations. Le nombre des variations perdues en passant de la substitution* $x=\alpha$ *à la substitution* $x=\beta$ *est exactement le nombre des racines réelles de l'équation* $f(x)=X=0$, *comprises entre les deux nombres* α *et* β.

Soient $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_{p-1}$ les quotients obtenus dans les $p-1$ divisions effectuées. Nous pourrons, en nous rappelant le changement de signe imposé à chaque reste avant de le prendre pour diviseur, écrire les $p-1$ identités

$$(2)\qquad \begin{cases} X \;\;= X_1 Q_1 - X_2, \\ X_1 \;\;= X_2 Q_2 - X_3, \\ X_2 \;\;= X_3 Q_3 - X_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{p-2} = X_{p-1} Q_{p-1} - X_p. \end{cases}$$

Il est clair que, lorsqu'on donne à x des valeurs croissantes depuis α jusqu'à β, les fonctions de la suite (1) ne peuvent présenter aucun changement de signe, tant qu'on n'atteint aucune racine des équations formées en égalant ces fonctions à zéro.

Le système des identités (2) conduit alors à ces deux conséquences :

1° *Deux fonctions consécutives de la suite* (1) *ne peuvent s'annuler pour la même valeur de* x.

Car, si l'on pouvait avoir à la fois

$$X_{n-1}=0, \qquad X_n=0,$$

on en conclurait $X_{n+1}=0$. En continuant de proche en

proche, on parviendrait donc à $X_p = 0$; ce qui est impossible, puisque X_p est une constante qui ne peut pas être nulle.

2° *Lorsqu'une valeur de x annule une certaine fonction de la suite* (1), *les deux fonctions qui la comprennent sont toujours de signes contraires pour cette valeur de x.*

Car, pour $X_n = 0$, on a

$$X_{n-1} = -X_{n+1}.$$

Il résulte de ces deux conséquences que, *tant que la valeur croissante de x n'atteint pas une racine de l'équation donnée $f(x) = X = 0$, la suite* (1) *présente toujours le même nombre de variations.*

En effet, si l'on a $X_n = 0$ pour $x = a$, on peut prendre la quantité positive h assez petite pour que les deux équations $X_{n-1} = 0$ et $X_{n+1} = 0$ n'aient aucune racine réelle entre $a - h$ et $a + h$, puisqu'elles ne peuvent admettre la racine a (1°). Il s'ensuit que, tandis que X_n change de signe lorsque x traverse la valeur a (1071), les deux fonctions X_{n-1} et X_{n+1} conservent le leur. Mais, d'après (2°), elles sont de signes contraires pour $x = a$. On ne peut donc avoir, dans l'intervalle considéré, que les combinaisons de signes ci-après :

	$x = a - h.$				$x = a + h.$			
X_{n-1}	+	+	−	−	+	+	−	−
X_n	+	−	+	−	−	+	−	+
X_{n+1}	−	−	+	+	−	−	+	+

qui n'offrent toujours qu'*une seule variation,* aussi bien pour $x = a - h$ que pour $x = a + h$.

Comme le même raisonnement est applicable à toutes les parties de la suite (1) composées de trois fonctions consécutives, à partir de X_1, la suite (1) ne perd aucune variation quand on fait croître x, *tant qu'on n'atteint pas une racine de la proposée $f(x) = X = 0$.* En d'autres termes, le nombre des variations de la suite demeure constant, et ces variations ne font *que se déplacer* de l'une des manières indiquées par le Tableau ci-dessus.

Supposons maintenant que la valeur croissante de x atteigne

une première racine b de la proposée. Cette valeur b pourra annuler également quelques autres fonctions de la suite (1), qui, d'après ce qui précède, passeront par zéro sans faire varier le nombre des variations de la suite.

Il ne nous reste donc à examiner que ce qui se produit entre les deux premières fonctions X et X_1, quand x passe de la valeur $b-k$ à la valeur $b+k$, en désignant par k une quantité positive aussi petite qu'on voudra.

Or, nous avons vu (1273) que le rapport $\frac{X}{X_1}$ de la fonction X à sa dérivée X_1 passe alors nécessairement d'une valeur négative à une valeur positive, c'est-à-dire que, pour $x=b-k$, les deux premières fonctions X et X_1 présentent une variation, qui se trouve remplacée par une permanence quand, ayant franchi $x=b$, on fait $x=b+k$.

Ainsi, dans le cas étudié, la suite (1) *perd une variation* de X à X_1; elle n'en perd donc qu'une seule dans son ensemble.

Par conséquent, de $x=\alpha$ à $x=\beta$, la suite (1) perd une variation et une seule, chaque fois que x atteint une racine de l'équation donnée $f(x)=X=0$, et seulement dans cette hypothèse, c'est-à-dire que cette suite perd finalement autant de variations que l'équation donnée a de racines réelles comprises entre α et β.

Ajoutons, pour la pleine compréhension du théorème, que, avant d'atteindre une deuxième racine réelle $x=c$ de $f(x)=X=0$, x passe nécessairement, d'après le théorème de Rolle (1275), par une racine de l'équation dérivée $f'(x)=X_1=0$. X_1 change alors de signe (1071), et la permanence qui existait entre X et X_1 après $x=b$ se change en une variation, destinée à se perdre à son tour au moment où la valeur de x atteint la deuxième racine c de la proposée. On voit par là que, pendant que x croît de α à β, les variations primitives de la suite (1) finissent forcément *par se déplacer en remontant* pour venir se perdre une à une dans l'intervalle des deux premières fonctions X et X_1, jusqu'à concurrence du nombre des racines réelles de l'équation proposée comprises entre α et β.

Tel est cet important théorème, qui a fait époque dans la Science, et auquel on ne peut reprocher que la longueur des calculs à effectuer, longueur qui peut être sensiblement abrégée (1328).

Remarques.

1310. I. Il est évident que, dans la série des divisions préliminaires qui conduisent aux *fonctions de* STURM, on a le droit de multiplier ou de diviser les dividendes ou diviseurs par tels nombres *positifs* qu'on voudra, puisque ces multiplications ou divisions laissent intacts les signes des différentes fonctions. Par contre, il est interdit d'introduire ou de supprimer des facteurs *négatifs,* à moins qu'une opération ultérieure ne doive les transformer en facteurs positifs.

1311. II. La dernière fonction X_p est une constante qui ne peut pas être nulle; mais il suffit évidemment, pour la démonstration du théorème, que X_p soit une fonction qui ne change pas de signe quand x varie de α à β; car, alors, elle ne peut s'annuler dans ces limites (*voir* 1°).

Il peut résulter de cette remarque une très importante simplification. Si, parmi les fonctions qui forment la suite (1) [1309], il s'en rencontre une qui ne change pas de signe de $x=\alpha$ à $x=\beta$, c'est-à-dire qui, égalée à zéro, n'ait aucune racine réelle entre ces deux nombres, on peut arrêter la suite (1) à cette fonction et supprimer toutes les fonctions qui viennent après ou éviter de les calculer (c'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'on rencontre une fonction qui, égalée à zéro, n'a que des racines imaginaires : elle conserve alors constamment le signe de son premier terme).

1312. III. La même difficulté qui se présente pour l'application du théorème de FOURIER (1303) peut se présenter pour celle du théorème de STURM. On la résout de la même manière.

Supposons que l'une des fonctions intermédiaires X_n de la suite (1) s'annule *pour la substitution extrême* $x=\alpha$ ou $x=\beta$. h étant toujours une quantité positive aussi petite qu'on voudra, les trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, présenteront toujours une seule variation pour $x=\alpha-h$ et $x=\alpha+h$ *ou* pour $x=\beta-h$ et $x=\beta+h$ (1309). Si c'est la première fonction X qui s'annule pour $x=\alpha$ ou $x=\beta$, on sait de même (1309) qu'une variation sera perdue entre X et X_1, quand on passera de $x=\alpha-h$ à $x=\alpha+h$ ou de

$x = \beta - h$ à $x = \beta + h$. On n'a donc qu'à prendre pour nouvelles limites, soit $\alpha - h$ et β, soit α et $\beta + h$, en notant de plus que $x = \alpha$ ou $x = \beta$ est une racine réelle de l'équation donnée.

Cas où l'équation proposée a des racines égales.

1313. Le théorème de Sturm s'applique encore au cas où l'équation $f(x) = X = 0$ *admet des racines égales;* seulement, le degré de multiplicité de ces racines demeure *indéterminé*.

En effet, opérons comme précédemment (1309), de manière à former une suite analogue

$$(1) \quad X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{n-1},\ X_n,\ \ldots,\ X_{p-1},\ X_p.$$

Trois fonctions consécutives seront encore liées par la relation

$$(1\ bis) \qquad X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1},$$

le quotient Q_n étant une fonction entière. Seulement, la dernière fonction X_p ne sera plus une quantité constante. Ce sera évidemment le plus grand commun diviseur algébrique de X et de X_1, auquel on s'arrêtera nécessairement, le reste correspondant étant nul.

Si l'on divise par X_p tous les termes de la suite (1), on obtiendra une nouvelle suite

$$(2) \quad V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_{n-1},\ V_n,\ \ldots,\ V_{p-1},\ V_p = 1,$$

dans laquelle la dernière fonction V_p sera une constante, et qui remplira absolument les mêmes conditions que la suite (1) [1309] formée lorsque l'équation donnée n'a pas de racines égales.

Ainsi, la relation (1 *bis*) sera remplacée par la relation

$$(2\ bis) \qquad V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1},$$

qui prouve que deux fonctions consécutives ne peuvent s'annuler en même temps et que, lorsqu'une fonction intermédiaire s'annule, les deux fonctions qui la comprennent sont

de signes contraires. D'ailleurs, $V_p = 1$ ne change pas de signe. Enfin, l'égalité

$$\frac{V}{V_1} = \frac{X}{X_1}$$

montre que le premier rapport, comme le second (1309, 1273), passe toujours, en s'annulant, d'une valeur négative à une valeur positive.

Les fonctions (2) pouvant remplacer identiquement les fonctions (1) *considérées au n°* 1309, on voit que l'équation $V = 0$ [qui n'a plus de racines égales (1134)] a autant de racines réelles entre les deux nombres réels α et $\beta > \alpha$, que la suite (2) perd de variations quand on passe de la substitution $x = \alpha$ à la substitution $x = \beta$. En outre, comme on obtient la suite (1) ci-dessus en multipliant les termes de la suite (2) par un même polynôme X_p, il est clair qu'on peut employer directement la suite (1) sans prendre la peine de former la suite (2). Le résultat ne change pas; mais le degré de multiplicité des racines égales de l'équation $f(x) = X = 0$ n'apparaît pas, ou *chaque racine multiple ne compte qu'une fois.*

Détermination du nombre des racines réelles d'une équation.

1314. Pour trouver le nombre total des racines réelles d'une équation donnée de degré m, il suffit, d'après ce qui précède, de former pour cette équation, *supposée sans racines égales,* la suite des fonctions de Sturm

$$(1) \qquad X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{p-1},\ X_p,$$

et d'y substituer une limite inférieure L′ et une limite supérieure L des racines réelles de l'équation. Comme on n'a à tenir compte que des signes présentés par la suite pour les deux substitutions extrêmes, on peut, sans chercher L′ et L, remplacer ces limites par $-\infty$ et $+\infty$, qui conduisent évidemment à un résultat identique.

Si la suite (1) présente k_1 variations pour $x = -\infty$ et k_2 variations pour $x = +\infty$, le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = X = 0$ est $k_1 - k_2$.

Lorqu'on substitue 0 à la place de x, chaque fonction se réduit à son dernier terme. Supposons que la suite (1) pré-

sente alors k variations. Il est clair que l'équation donnée a, dans cette hypothèse, $k_1 - k$ racines négatives et $k - k_2$ racines positives. Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, pour trouver combien il y en a entre deux nombres réels α et β, on peut substituer la *suite de Fourier* (1300, 1302) aux *fonctions de Sturm*.

Séparation des racines réelles à l'aide du théorème de Sturm.

1315. Le théorème de Sturm fournit tout naturellement une méthode de séparation des racines réelles des équations algébriques.

Le nombre de ces racines étant connu (1314), et leurs limites inférieure et supérieure L' et L ayant été déterminées comme on le verra bientôt, on n'a qu'à substituer dans la suite de Sturm des nombres croissants allant de L' à L. Les variations perdues d'une substitution à l'autre indiquant le nombre des racines réelles comprises entre les nombres substitués, il peut se faire que quelques essais suffisent pour arriver à la séparation complète des racines réelles (1250). Dans d'autres cas, plusieurs racines se trouvant très rapprochées, le nombre des substitutions nécessaires peut devenir très grand; mais la longueur des calculs est rachetée par la certitude d'atteindre le but, certitude que ne peut donner la méthode de Budan ou le théorème de Fourier.

On peut commencer par substituer entre L' et L les nombres entiers ou les unités décimales ..., — 100, — 10, — 1, 0, 10, 100, 1000, ... Les calculs sont faciles, et l'on détermine ainsi combien l'équation considérée a de racines réelles dans chacun de ces intervalles.

Supposons qu'on reconnaisse de cette manière l'existence d'un certain nombre de racines entre 1 et 10. Pour avoir la partie entière de chacune d'elles, on n'aura qu'à substituer dans la suite de Sturm les nombres 2, 3, ..., 9. Admettons que la suite perde *une variation* de la substitution 2 à la substitution 3. Il y aura *une seule racine* entre 2 et 3, sa partie entière sera 2 et, pour avoir son chiffre des dixièmes, il suffira de substituer les nombres intermédiaires 2,1; 2,2; 2,3; ...; 2,9. Admettons que la suite perde de nouveau une variation de la substitution 2,5 à la substitution 2,6. La racine cherchée tombera entre 2,5 et 2,6 ou sera 2,5 à

moins d'un dixième et, pour avoir son chiffre des centièmes, on substituera les nombres intermédiaires 2,51; 2,52; 2,53; ...; 2,59. Et ainsi de suite.

On peut d'ailleurs simplifier les calculs en transformant les fonctions de Sturm et en suivant la même marche que celle indiquée à propos de la méthode de Budan (1314). Par exemple, si des racines sont comprises entre 300 et 400, il faut, pour avoir leurs chiffres des dizaines, substituer les nombres 310, 320, 330, ..., 390. Si l'on transforme alors les fonctions de Sturm en y remplaçant x par $300 + x$ [ce qui revient (1107) à diminuer de 300 les racines de ces fonctions égalées à zéro], il suffira de substituer dans les nouvelles fonctions les nombres 10, 20, 30, ..., 90.

Exemples.

1316. 1° *Déterminer la nature des racines de l'équation*

$$X = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Le théorème de Descartes (1255, 1257) indique 4 racines positives, ou 2 racines positives et 2 racines imaginaires, ou 4 racines imaginaires.

On a ici

$$X_1 = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6.$$

Les divisions indiquées ci-dessous donnent la suite de Sturm (1310) :

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 24x + 20 & 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6 \\ \quad + 3x^3 - 4x^2 + 6x & \hline x - 1 \\ \hline -4x^3 + 16x^2 - 72x + 80 & \\ \quad - 3x^2 + 4x - 6 & \\ \hline + 13x^2 - 68x + 74 & \end{array}$$

Il en résulte

$$X_2 = -13x^2 + 68x - 74.$$

On a ensuite

$$\begin{array}{r|l} 52x^3 - 39x^2 + 52x - 78 & -13x^2 + 68x - 74 \\ \quad + 272x^2 - 296x & \hline -4x - 233 \\ \hline + 233x^2 - 244x - 78 & \\ + 3029x^2 - 3172x - 1014 & \\ \quad + 15844x - 17242 & \\ \hline + 12672x - 18256 & \\ + 792x - 1141 & \end{array}$$

Il en résulte

$$X_3 = -792x + 1141.$$

On a enfin

$$\begin{array}{rrr|l} -13x^2 + & 68x - & 74 & -792x + 1141 \\ -10296x^2 + & 53856x - & 58608 & \hline 13x - 39023 \\ - & 14833x & & \\ \hline + & 39023x - & 58608 & \\ + 30906216x & - 46417536 & & \\ & + 44525243 & & \\ \hline & - 1892293 & & \end{array}$$

Il en résulte

$$X_4 = +1892293.$$

La suite de Sturm est donc

$$\begin{aligned} X &= x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5, \\ X_1 &= 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6, \\ X_2 &= -13x^2 + 68x - 74, \\ X_3 &= -792x + 1141, \\ X_4 &= +1892293. \end{aligned}$$

Comme elle présente deux variations aussi bien pour $x = -\infty$ que pour $x = +\infty$, l'équation $X = 0$ n'a aucune racine réelle, et ses quatre racines sont imaginaires (*voir* le n° 1321).

1317. 2° *Déterminer la nature des racines de l'équation*

$$X = x^5 - 5x + 1 = 0,$$

et séparer celles de ces racines qui sont réelles.

Le théorème de Descartes indique l'existence certaine d'une racine négative (1257), l'existence de deux racines imaginaires au moins (1261), mais laisse dans le doute sur l'existence des racines positives (1255). Les substitutions les plus simples, 0 et 1, prouvent d'ailleurs que l'équation donnée admet une racine positive entre 0 et 1; et, par conséquent (1255), elle en a deux. C'est ce que nous allons vérifier en appliquant le théorème de Sturm.

On a ici

$$X_1 = 5x^4 - 5.$$

On a donc à effectuer les divisions suivantes, qui sont très simples :

$$\begin{array}{rl|l} x^5 - 5x + 1 & & x^4 - 1 \\ \quad + x & & \hline x \\ \hline \quad - 4x + 1 & & \end{array}$$

Il en résulte

$$X_2 = 4x - 1.$$

On a ensuite

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 4 & 4x - 1 \\ 4x^3 - 16 & \hline x^3 + x^2 + x + 1 \\ + 4x^2 - 64 & \\ + 4x - 256 & \\ + 1 & \\ \hline - 255 & \end{array}$$

Il en résulte

$$X_3 = + 255.$$

La suite de Sturm est donc

$$\begin{aligned} X &= x^5 - 5x + 1, \\ X_1 &= 5x^4 - 5, \\ X_2 &= 4x - 1, \\ X_3 &= + 255. \end{aligned}$$

Comme elle présente trois variations pour $x = -\infty$ et qu'elle n'en présente aucune pour $x = +\infty$, l'équation proposée a exactement trois racines réelles, c'est-à-dire qu'elle a deux racines positives, une racine négative et deux racines imaginaires.

En substituant dans la suite les nombres consécutifs -2, -1, 0, 1, 2, on obtient successivement trois variations, deux variations, deux variations, une variation, zéro variation. La racine négative est donc comprise entre -2 et -1; et, des deux racines positives, l'une tombe entre 0 et 1, et l'autre entre 1 et 2. Les racines réelles de l'équation donnée sont ainsi séparées.

Conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré donné.

1318. Pour que toutes les racines d'une équation de degré m soient réelles et inégales, il faut que la suite (1) [1309]

$$(1) \qquad X, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{p-1}, \quad X_p,$$

perde exactement m variations, quand on passe de la substitution $x = -\infty$ à la substitution $x = +\infty$. Il faut donc que cette suite comprenne $m + 1$ fonctions. Comme elle ne peut en avoir davantage, on a alors $p = m$, et les degrés des différentes fonctions par rapport à x sont m, $m - 1$, $m - 2$, ..., 1, 0. De plus, la suite (1) doit présenter m variations pour $x = -\infty$, et m permanences pour $x = +\infty$, c'est-à-dire que

le coefficient du premier terme de chaque fonction doit être positif.

En résumé, *pour qu'une équation de degré m ait toutes ses racines réelles et inégales, il faut et il suffit que la suite de* STURM *qui lui correspond soit complète ou comprenne* $m+1$ *fonctions, ayant toutes le coefficient de leur premier terme positif.*

1319. Au premier abord, il semble que le nombre des conditions cherchées soit égal à $m+1$. Mais on peut toujours supposer positif le coefficient du premier terme du premier membre de l'équation donnée ou du premier terme de la première fonction X de la suite (1) et, alors, il en est de même du coefficient du premier terme de la deuxième fonction X_1. Le maximum du nombre des conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré m (supposées inégales) est donc seulement $m-1$. Nous disons *le maximum*, parce que quelques-unes de ces conditions peuvent rentrer les unes dans les autres.

Remarque. — Lorsqu'on se sert de l'équation aux carrés des différences pour trouver les mêmes conditions, on a vu (1269) que son premier membre doit être complet et ne présenter que des variations. Or le degré de l'équation aux carrés des différences d'une équation de degré m étant $\frac{m(m-1)}{2}$ [1192], cela fait, *comme maximum possible*, $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions. L'emploi de l'équation aux carrés des différences peut donc conduire à

$$\frac{m(m-1)}{2}-(m-1)=\frac{m^2-3m+2}{2}$$

conditions superflues.

Application à l'équation du troisième degré

1320. Soit l'équation du troisième degré privée de son second terme [ce qui est permis dans la recherche poursuivie (1286)]

$$X=x^3+px+q=0.$$

La dérivée de son premier membre étant

$$X_1 = 3x^2 + p,$$

la série des opérations à effectuer pour obtenir les fonctions de Sturm est la suivante. [Comme nous l'avons déjà dit (1310) et appliqué (1316, 1317), on a le droit de multiplier ou de diviser les dividendes et les diviseurs successifs par des facteurs *positifs*, afin d'éviter les coefficients fractionnaires.]

$x^3 + px + q$	x	$-6px + 9q$
$3x^3 + 3px + 3q$	$3x^2 + p$	$-2px - 3q$
$-px$	$12p^2x^2 + 4p^3$	
$2px + 3q$	$-18pqx$	
	$-18pqx + 4p^3$	
	$+27q^2$	
	$4p^3 + 27q^2$	

La seconde division exige, pour éviter les coefficients fractionnaires, qu'on multiplie les dividendes *deux fois de suite* par $2p$. Il est donc plus simple de multiplier immédiatement, comme nous l'avons fait, le premier dividende $3x^2 + p$ par $4p^2$, *quantité essentiellement positive*. D'ailleurs, le signe de p n'étant pas encore déterminé et pouvant être négatif (ce qui a lieu ici en effet), il aurait fallu dans tous les cas (1228) prendre cette précaution. Ainsi, *lorsque, dans la suite des opérations dont il s'agit, on doit multiplier par un coefficient dont le signe n'est pas encore déterminé, il faut multiplier par son carré.*

On a finalement, pour la suite de Sturm,

$$\begin{aligned} X &= x^3 + px + q, \\ X_1 &= 3x^2 + p, \\ X_2 &= -2px - 3q, \\ X_3 &= -4p^3 - 27q^2. \end{aligned}$$

Cette suite contient bien $m + 1$ ou 4 fonctions, et il suffit, pour que l'équation du troisième degré privée de son second terme ait ses trois racines réelles, que le coefficient du premier terme de chaque fonction soit positif (1318); ce qui entraîne

seulement (1319) les deux conditions

$$-p>0 \quad \text{ou} \quad p<0$$

et

$$-4p^3-27q^2>0 \quad \text{ou} \quad 4p^3+27q^2<0.$$

La seconde condition comprenant implicitement la première, il reste, comme précédemment (1270, 1286), la condition unique

$$4p^3+27q^2<0.$$

Nombre des racines imaginaires lorsque la suite de Sturm est complète.

1321. Lorsque la suite des fonctions de Sturm est *complète*, c'est-à-dire s'il y en a $m+1$ pour une équation de degré m (1318), on peut indiquer immédiatement le nombre des racines imaginaires de l'équation proposée, si toutes ses racines (supposées inégales) ne sont pas réelles.

Si LES PREMIERS TERMES *des* $m+1$ *fonctions présentent un nombre de variations égal à* $k<m$ *et, par conséquent, un nombre de permanences égal à* $m-k$, *l'équation donnée a exactement* $2k$ *racines imaginaires* (*voir* l'exemple du n° 1316).

En effet, les k variations et les $m-k$ permanences supposées subsistent nécessairement pour la substitution $x=+\infty$; mais elles sont remplacées par k permanences et par $m-k$ variations pour la substitution $x=-\infty$, puisque les signes des premiers termes des fonctions changent alors de deux en deux.

Il en résulte que, lorsque les premiers termes des $m+1$ fonctions présentent k variations, la suite complète des fonctions de Sturm perd, de $x=-\infty$ à $x=+\infty$, un nombre de variations égal à

$$(m-k)-k \quad \text{ou à} \quad m-2k.$$

Tel est alors (1314) le nombre total des racines réelles de l'équation donnée et, par conséquent, le nombre de ses racines imaginaires est égal à $2k$.

Conditions de substitution d'autres fonctions à celles de Sturm.

1322. *Pour pouvoir substituer d'autres fonctions à celles de Sturm, il suffit que ces fonctions remplissent exactement, dans les limites voulues, les conditions imposées aux fonctions de Sturm. Or ces conditions sont* (1309) *au nombre de quatre :*

1° La dernière fonction de la nouvelle suite doit conserver le même signe, lorsque x varie entre les deux substitutions extrêmes α et $\beta > \alpha$.

2° Deux fonctions consécutives ne doivent jamais s'annuler simultanément pour une valeur de x comprise entre α et β.

3° Lorsqu'une fonction intermédiaire s'annule pour une certaine valeur de x comprise entre α et β, les deux fonctions qui la comprennent doivent, pour cette valeur de x, présenter des signes contraires.

4° Le rapport de la première fonction Y de la nouvelle suite à la deuxième fonction Y_1 doit, lorsqu'il s'annule pour une valeur de x comprise entre α et $\beta > \alpha$, *toujours* passer du négatif au positif; *ou bien* 1272) Y_1 et Y' doivent avoir le même signe pour toute valeur de x annulant Y.

Ces quatre conditions étant les seules qu'on ait invoquées dans la démonstration de Sturm, il est évident que, si l'on égale à zéro la première fonction de la nouvelle suite, le nombre des racines réelles de l'équation correspondante $Y = 0$, comprises entre α et β, sera exactement le nombre des variations *perdues* par cette suite quand on passera de la substitution $x = \alpha$ à la substitution *plus grande* $x = \beta$.

1323. Si l'on a $\alpha > \beta$ au lieu de $\alpha < \beta$, il est évident que la quatrième condition énoncée ci-dessus (1322) est remplacée par la condition inverse, c'est-à-dire que le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ doit, lorsqu'il s'annule pour une valeur de x comprise entre α et β, *toujours* passer du positif au négatif, puisque x va en diminuant au lieu d'aller en augmentant (1273). Chacun de ces passages fait donc *gagner* une variation au lieu de la faire *perdre* (1309).

Par conséquent, le nombre des racines réelles de l'équa-

tion $Y = 0$ comprises entre α et β est *exactement* le nombre des variations *perdues* ou *gagnées* par la suite considérée, en passant de la substitution α à la substitution β, suivant que α est *inférieure* ou *supérieure* à β.

1324. Pour montrer l'importance et l'extension de ces considérations, nous indiquerons la question suivante qui a trouvé place dans les développements présentés par STURM au sujet de son théorème, et qui conduit à un résultat utile au point de vue de la recherche des racines imaginaires.

Considérons la suite

$$(1) \qquad Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{p-1},\ Y_p,$$

et supposons qu'elle remplisse seulement les trois premières conditions énoncées au n° 1322, Y_1 étant choisie arbitrairement, et le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ n'étant astreint à aucune autre condition spéciale que d'avoir ses deux termes premiers entre eux.

α et β étant deux nombres réels quelconques, faisons varier x dans le même sens, depuis α jusqu'à β, et admettons que la suite (1) présente, d'une substitution à l'autre, *une perte* ou *un gain* de k variations (1323).

D'après ce qui précède (1309, 1322, 1323), le nombre des variations de la suite (1) ne peut changer que lorsque x atteint et dépasse une racine réelle de l'équation $Y = 0$. Le gain ou la perte de k variations indique donc nécessairement l'existence de k racines réelles de cette équation *au moins*, entre les nombres α et β.

Voici pourquoi nous disons : *au moins*. Lorsque x atteint et dépasse ainsi une racine réelle de $Y = 0$, *comme la quatrième condition manque* (1322), le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ peut passer du positif au négatif, *ou* du négatif au positif, *ou* conserver le même signe. Dans le premier cas, la suite (1) gagne une variation; dans le deuxième cas, elle en perd une; dans le troisième cas, elle garde le même nombre de variations.

Si l'on représente par δ l'excès du nombre des passages du positif au négatif sur celui des passages du négatif au positif, pendant que x varie de α à β, on a nécessairement, en désignant par k l'excès du nombre de variations de la suite (1)

pour $x = \beta$ sur son nombre de variations pour $x = \alpha$,

$$\delta = k.$$

k est *positif* ou *négatif*, selon qu'il y a *gain* ou *perte* de variations, de $x = \alpha$ à $x = \beta$.

1325. Ce n'est donc que lorsqu'on forme la *suite de* STURM en prenant pour fonction Y_1 *la dérivée de la fonction* Y, que l'on peut affirmer (1272) que le nombre des racines réelles de l'équation $Y = 0$, comprises entre α et β, est *exactement* le nombre des variations gagnées ou perdues par la suite (1323), de $x = \alpha$ à $x = \beta$.

1326. Considérons maintenant le rapport inverse $\frac{Y_1}{Y}$.

Quand x, variant de α à β, atteint et dépasse une racine réelle de $Y_1 = 0$, ce rapport, en s'annulant, peut passer également du positif au négatif, *ou* du négatif au positif, *ou* conserver le même signe. Représentons par δ' l'excès du nombre de ses passages du positif au négatif sur celui de ses passages du négatif au positif, et par k' le nombre des variations ***gagnées*** ou ***perdues*** (1324) par la suite

$$(2) \qquad Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad \ldots, \quad Y_{p-1}, \quad Y_p,$$

lorsque x varie de α à β.

Par hypothèse, Y et Y_2 sont de *signes contraires* chaque fois que Y_1 s'annule [troisième condition (1322)]. Il en résulte que, si le rapport $\frac{Y_1}{Y}$ passe du positif au négatif, le rapport $\frac{Y_1}{Y_2}$ passe du négatif au positif; et, inversement. $-\delta'$ indique donc l'excès du nombre des passages de ce dernier rapport du positif au négatif sur celui de ses passages du négatif au positif, de $x = \alpha$ à $x = \beta$, et l'on a

$$-\delta' = k' \qquad \text{ou} \qquad \delta' = -k'.$$

Il s'agit de trouver la relation qui lie les deux nombres δ et δ' ou de comparer, au point de vue qui nous occupe, la suite (1) [1324] et la suite (2).

Or la suite (1) ne diffère de la suite (2) que par son premier

terme Y. Par conséquent, si le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ *conserve le même signe* pour les deux substitutions α et β, il est clair qu'on a

$$k = k' \qquad \text{ou} \qquad \delta' = -\delta = -k.$$

Si le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ a le signe + pour $x = \alpha$ et le signe — pour $x = \beta$, la suite (1) gagne une variation de plus que la suite (2) dans le passage de α à β, et l'on a

$$k = k' + 1 \qquad \text{ou} \qquad \delta' = -\delta + 1 = -k + 1.$$

Enfin, si le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ a le signe — pour $x = \alpha$ et le signe + pour $x = \beta$, la suite (1) perd une variation de plus que la suite (2) dans le passage de α à β, et l'on a

$$k = k' - 1 \qquad \text{ou} \qquad \delta' = -\delta - 1 = -k - 1.$$

1327. Il est important de remarquer que, si la fonction Y est du $m^{\text{ième}}$ degré et si l'on a en valeur absolue $k = m$, pour α et β égales aux limites des racines réelles de l'équation $Y = 0$, *cette équation* $Y = 0$ *a toutes ses racines réelles* (1324). En même temps, le rapport $\frac{Y}{Y_1}$ change forcément de signe chaque fois qu'il s'annule, en passant *toujours*, soit du négatif au positif, soit du positif au négatif, suivant que x croît ou décroît constamment de α à β (1323). La fonction Y_1 joue alors le même rôle que la dérivée de la fonction Y (1273, 1309, 1325), et le théorème de Rolle (1275) lui est applicable, de sorte que deux racines réelles consécutives de l'équation $Y = 0$ comprennent nécessairement une racine réelle de l'équation $Y_1 = 0$. Cette dernière équation est donc de degré $m - 1$, et ses racines séparent celles de l'équation $Y = 0$.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DE STURM (*Suite*).

Suites de M. de Montessus de Ballore (1).

1328. Si nous appliquons le procédé de Sturm, ou du plus grand commun diviseur (1309), à l'équation

$$Y = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$

nous trouverons

$$\begin{aligned}
Y' = Y_1 &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,\\
Y_2 &= 11x^4 + 14x^3 - 33x^2 + 31x - 37,\\
Y_3 &= -1050x^3 + 1683x^2 - 1731x + 597,\\
Y_4 &= -10200643x^2 - 37927049x + 58788113,\\
Y_5 &= 2971279748993533x + 3412517994900350020,\\
Y_6 &< 154 \times 10^{41}.
\end{aligned}$$

En général, les résultats affectent une forme des plus compliquées. Mais *on peut simplifier très utilement l'application du théorème de Sturm en procédant comme il va être indiqué.* Posons

$$\begin{aligned}
(1)\quad Z_2 &= Y + (\lambda x + \rho) Y'\\
&= (6\lambda + 1)x^6 + (5\lambda + 6\rho + 1)x^5\\
&\quad - (4\lambda - 5\rho + 1)x^4 - (3\lambda + 4\rho + 1)x^3\\
&\quad + (2\lambda - 3\rho + 1)x^2 - (\lambda - 2\rho + 1)x - (\rho - 1);
\end{aligned}$$

si l'on dispose de λ et de ρ de manière à annuler les coeffi-

(1) *Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1909.

cients de x^6 et de x^5, on agit comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre Y et Y', mode de calcul auquel nous allons substituer le suivant. Dans le cas présent

$$Z_2(0) = -(\rho - 1), \qquad Z_2(1) = 5\lambda + 5\rho + 1,$$
$$Z_2(-1) = 3\lambda - 3\rho + 3;$$

prenons pour λ, ρ des valeurs annulant deux des expressions $Y_2(0)$, $Y_2(1)$, $Y_2(-1)$.

Le plus simple, *ici*, est d'annuler $Y_2(-1)$, $Y_2(0)$, donc de prendre $\rho = 1$, $\lambda = 0$; la relation (1) deviendra

$$Z_2 = Y + Y' = x(x+1)(x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1),$$

et, en prenant pour Y_2 le polynome

$$Y_2 = x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 1,$$

on aura

$$Y + Y' - x(x+1)Y_2 = 0 \qquad (Y_1 = Y').$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} Z_3 &= Y_1 + (\mu x + \eta) Y_2 \\ &= (\mu + 6)x^5 + (6\mu + \eta + 5)x^4 - (2\mu - 6\eta + 4)x^3 \\ &\quad - (3\mu + 2\eta + 3)x^2 + (\mu - 3\eta - 2)x + \eta - 1; \end{aligned}$$

on a

$$Z_3(0) = \eta - 1, \qquad Z_3(1) = 3\mu + 3\eta + 5,$$
$$Z_3(-1) = 3\mu - 3\eta - 3,$$

et le plus simple est d'annuler encore $Z_3(0)$, $Z_3(-1)$, ce qui donne $\eta = 1$, $\mu = 2$ et

$$Z_3 = Y_1 + (2x+1)Y_2 = x(x+1)(8x^3 + 10x^2 - 12x + 1);$$

si l'on écrit

$$Y_3 = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1,$$

on a

$$Y_1 + (2x+1)Y_2 - x(x+1)Y_3 = 0.$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} Z_4 &= Y_2 + (\theta x + \delta) Y_3 \\ &= (8\theta + 1)x^4 + (10\theta + 8\delta + 6)x^3 \\ &\quad - (12\theta - 10\delta + 2)x^2 + (\theta - 12\delta - 3)x + \delta + 1, \end{aligned}$$

et annulons $Z_4(0)$, $Z_4(-1)$; il vient $\delta = -1$, $\theta = -\frac{6}{5}$ et, en chassant le dénominateur 5,

$$5Y_2 - (6x+5)Y_3 + x(x+1)Y_4 = 0,$$

avec

$$Y_4 = 43x^2 + 27x - 39.$$

Posons encore

$$Z_5 = -Y_3 + (\alpha x + \beta)Y_4 = (43\alpha - 8)x^3 + 27\alpha + 43\beta - 10)x^2 - (39\alpha - 27\beta + 12)x - (39\beta - 1);$$

annulons $Z_5(1)$, $Z_5(-1)$; il vient

$$\alpha = \frac{313}{713}, \qquad \beta = \frac{-152}{713};$$

chassons le dénominateur 713; on aura

$$-713Y_3 + (313x - 152)Y_4 - 5(x^2-1)Y_5 = 0,$$

avec

$$Y_5 = 1551x - 1043;$$

posons en dernier lieu

$$Z_6 = -Y_4 + (\pi x + \omega)Y_5 = (1551\pi - 43)x^2 - (1043\pi - 1551\omega + 27)x - (1043\omega - 39)$$

et déterminons π, ω, comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur de $-Y_4$, Y_5, par les conditions

$$1043\omega - 39 = 0, \qquad 1043\pi - 1551\omega + 27 = 0;$$

il viendra

$$-Y_4 + Y_5\left(\frac{32328}{1043^2}x + \frac{30}{1043^2}\right) - x^2Y_6 = 0, \qquad Y_6 = \frac{33632221}{1043^2}.$$

Ainsi, *étant donnée une équation de degré m*, $Y = 0$, on pose

$$Z_2 = Y + (\lambda x + \rho)Y'$$

et l'on détermine λ, ρ, *soit de manière à annuler les termes de degré m, m − 1 de* Z_2 (*méthode du plus grand commun diviseur*), *soit de manière à annuler le terme de degré m de* Z_2 *et à mettre en évidence un facteur du premier degré* $x + q$ *de* Z_2, *soit encore de manière à mettre en évidence*

deux facteurs du premier degré $hx+k$, $lx+m$ *de* Z_2, *en prenant garde que* λ, ρ *soient des nombres aussi simples que possible.*

Dans le premier cas,

$$Y_2 = Z_2, \qquad Y + (\lambda x + \rho) Y' - Y_2 = 0;$$

dans le second,

$$Y_2 = Z_2 : (px+q), \qquad Y + (\lambda x + \rho) Y' - (px+q) Y_2 = 0;$$

dans le troisième,

$$Z_2 = Z_2 : (hx+k)(lx+m),$$
$$Y + (\lambda x + \rho) Y' - (hx+k)(lx+m) Y_2 = 0;$$

dans les trois cas, Y_2 *est de degré* $m-2$.

On pose ensuite

$$Z_3 = Y'(\mu x + \eta) Y_2$$

et l'on détermine Y_3 *comme on a déterminé* Y_2, *de manière que ce polynome* Y_3 *soit de degré* $m-3$, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un polynome* Y_m *de degré zéro.*

1329. Théorème. — *La suite*

$$Y, \quad Y', \quad \pm Y_2, \quad \pm Y_3, \quad \ldots, \quad \pm Y_{m-1}, \quad \pm Y_m$$

est une suite de Sturm (1322), *pourvu que les signes soient convenablement choisis.*

Nous nous bornerons à le vérifier sur l'équation étudiée, car l'extension à une équation quelconque est immédiate. On a ici

$$Y + Y' - x(x+1) Y_2 = 0,$$
$$Y' + (2x+1) Y_2 - x(x+1) Y_3 = 0,$$
$$5 Y_2 - (6x+5) Y_3 + x(x+1) Y_4 = 0,$$
$$-713 Y_3 + (313 - 152) Y_4 - 5(x^2-1) Y_5 = 0,$$
$$1043^2 Y_4 - (32328x + 39) Y_5 + x^2 Y_6 = 0,$$

et

$$Y = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$
$$Y' = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$
$$Y_2 = x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1,$$
$$Y_3 = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1, \qquad Y_4 = 43x^2 + 27x - 39,$$
$$Y_5 = 1551x - 1045, \qquad Y_6 = 3363212.$$

Il est bien évident que les conditions 1, 2, 4 (1322) sont vérifiées ; reste la condition 3. Cette condition sera vérifiée, si $\alpha < \beta < -1$, en prenant

$$(s_1) \qquad Y,\ Y',\ -Y_2,\ -Y_3,\ Y_4,\ -Y_5,\ Y_6;$$

ou bien

$$(s_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y,\ Y',\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ Y_6, \\ (-1 < \alpha < \beta < 0); \end{array} \right.$$

$$(s_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y,\ Y',\ -Y_2,\ -Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ -Y_6, \\ (0 < \alpha < \beta < 1); \end{array} \right.$$

$$(s_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y,\ Y',\ -Y_2,\ -Y_3,\ -Y_4,\ -Y_5,\ Y_6, \\ (1 < \alpha < \beta). \end{array} \right.$$

Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer le nombre de racines réelles comprises entre 0,2 et 8; la suite (s_3) indiquera combien de racines sont comprises entre 0,2 et $1-\varepsilon$ et la suite (s_4) combien il y a de racines entre $1+\varepsilon$ et 8.

Application du théorème de Sturm aux fonctions sphériques.

1330. Les fonctions sphériques $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ sont des polynomes définis par les relations

$$(1) \qquad P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$(2) \quad nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0;$$

ainsi, pour $n = 2$,

$$2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) = 0,$$

donc

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x.x - 1) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

de même, pour $n = 3$

$$3P_3(x) - 5xP_2(x) + 2P_1(x) = 0,$$

d'où

$$P_3(x) = \frac{1}{3}\left[5x \times \frac{1}{2}(3x^2 - 1) - 2x\right] = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad \text{etc.}$$

Il est facile de vérifier que

$$(3) \qquad (1-x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0,$$

et il résulte des relations (1), (2), (3) que

$$P_n, \quad P_{n-1}, \quad P_{n-2}, \quad \ldots, \quad P_1$$

est une suite de Sturm (**1322**).

En effet ( ) : 1° P_0 a un signe variable; 2° si P_m, P_{m-1} s'annulaient pour une même valeur de x, P_{m-2} s'annulerait aussi (2); P_{m-1}, P_{m-2} s'annulant, P_{m-3} s'annulerait aussi, etc., et finalement P_0 s'annulerait lui-même, ce qui n'est pas possible; 3° si P_{m-1} s'annule, la relation (2) montre que, pour la valeur de x annulant P_{m-1}, P_m et P_{m-2} sont de signes contraires; 4° la relation (3) montre que si une valeur x_0 de x annule P_n, $P'_n(x_0)$ et $P_{n-1}(x_0)$ ont le même signe.

Nous sommes ainsi en mesure de calculer le nombre de racines réelles de l'équation $P_n(x) = 0$, qui sont comprises entre deux limites α, β.

Application du théorème de Sturm à quelques équations transcendantes.

1331. I. Soit l'équation

$$x \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a = 0,$$

où les logarithmes sont pris dans le système de base e

$$(e = 2,718\ldots).$$

Posons

$$y = x \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a;$$

on aura

$$y' = \operatorname{Log} x + 1, \qquad y'' = \frac{1}{x};$$

examinons dans quelles conditions y, y', y'' *est une suite de Sturm*, pour $x > 0$, ce qui exige la réalité de $\operatorname{Log} x$.

Condition 1 (**1322**) : y'' ne change pas de signe tant que x est positif.

Condition 2 : y' s'annule pour $x=\frac{1}{e}$; pour cette valeur de x, y'' n'est pas nul et y devient $-\frac{1}{e}-\operatorname{Log}a$; $y\left(\frac{1}{e}\right)$ n'est nul que si $a=e^{-\frac{1}{e}}$; l'équation proposée a alors la racine double $\frac{1}{e}$ et nous savons (1318) que nous devons la compter comme simple dans l'énumération.

Condition 3 : y' s'annule pour $x=\frac{1}{e}$; or $y''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$; pour que y, y', y'' soit une suite de Sturm, il faut par suite que $y\left(\frac{1}{e}\right)$ soit négatif, c'est-à-dire que

$$y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}-\operatorname{Log}a<0$$

ou

$$\operatorname{Log}a>-\frac{1}{e},\qquad a>e^{-\frac{1}{e}};$$

si l'on avait $a<e^{-\frac{1}{e}}$, on prendrait y, y', $-y''$ comme suite de Sturm.

La condition 4 est évidemment vérifiée.

Si nous remarquons que : 1° y'' est toujours positif, comme il a été dit; 2° y' est positif si $x>e^{-1}$ et négatif si $x<e^{-1}$; 3° $y(0)$ est positif si $a<1$, négatif si $a>1$, car

$$0\times\operatorname{Log}0=0;$$

4° $y(\infty)$ est positif, nous pouvons calculer aisément le nombre des racines réelles de l'équation, en nous basant sur les résultats qu'on vient d'obtenir.

1° $a<e^{-\frac{1}{e}}$; on a, en prenant y, y', $-y''$:

$$\begin{array}{lll} y(h)>0, & y'(h)<0, & -y''(h)<0,\\ y(\infty)>0, & y'(\infty)>0, & -y''(\infty)<0, \end{array}$$

ce qui donne les successions de signes

$$+--;\quad ++-:$$

comme il n'y a pas de variations perdues quand on passe

d'une suite à l'autre, il n'y a pas de racines positives, donc pas de racines réelles.

2° $e^{\frac{1}{e}} < a < 1$. Prenons y, y', y''; on a

$$y(h) > 0, \quad y'(h) < 0, \quad y''(h) > 0,$$
$$y(\infty) > 0, \quad y'(\infty) > 0, \quad y''(\infty) > 0,$$

et les suites $+--+$, $+++$, où deux variations sont perdues, indiquent la présence de deux racines positives.

3° $a > 1$. Prenons encore y, y', y''; on a

$$y(h) < 0, \quad y'(h) > 0, \quad y''(h) > 0, \quad (-++),$$
$$y(\infty) > 0, \quad y'(\infty) > 0, \quad y''(\infty) > 0 : \quad (+++),$$

une variation est perdue, il y a donc une racine positive.

Il est facile de vérifier ces résultats. L'examen des dérivées première et deuxième de y montre que la fonction a un *minimum*, $\operatorname{Log} e^{-\frac{1}{e}} - \operatorname{Log} a$ ou $\operatorname{Log} \dfrac{e^{-\frac{1}{e}}}{a}$, pour $x = \dfrac{1}{e}$.

Si $a < e^{-\frac{1}{e}}$, ce minimum est positif et y ne peut s'annuler; y n'a pas de racines positives.

Si $1 > a > e^{-\frac{1}{e}}$, ce minimum est négatif; ici, on a

$$y(\varepsilon) > 0, \quad y\left(e^{-\frac{1}{e}}\right) = \operatorname{Log} e^{-\frac{1}{e}} - \operatorname{Log} a < 0, \quad y(\infty) > 0 :$$

il y a deux racines positives, séparées par $e^{-\frac{1}{e}}$.

Si $a > 1$, on a

$$y(h) < 0, \quad y\left(e^{-\frac{1}{e}}\right) < 0, \quad y(\infty) > 0 :$$

il n'y a plus qu'une seule racine comprise entre $e^{-\frac{1}{e}}$ et $+\infty$.

1332. II. Soit l'équation

$$x - \cos x = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette équation n'a évidemment qu'une racine dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$. Posons

$$y = x - \cos x, \quad \text{d'où} \quad y' = 1 + \sin x, \quad y'' = \cos x :$$

y, y', y'' *constituent une suite de Sturm pour l'intervalle* $0, \frac{\pi}{2}$; en effet, y'' ne changeant pas de signe dans cet intervalle, la *condition* 1 (1322) est vérifiée; la *condition* 3 l'est aussi, car y' s'annule pour $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; les *conditions* 2, 4 sont aussi vérifiées.

On a

$$y(0,7) = -0,064; \quad y'(0,7) = 1,644; \quad y''(0,7) = 0,764,$$
$$y(0,8) = 0,102; \quad y'(0,8) = 1,717; \quad y''(0,8) = 0,696;$$

la perte d'une variation indique la présence d'une racine dans l'intervalle 0,7; 0,8.

Étude d'équations transcendantes $y = 0$, pour lesquelles on forme une relation linéaire et homogène entre y, y', y''.

1333. I. Soit l'équation

$$y = x - \operatorname{tang} x = 0,$$

qui se présente, en Physique, dans l'étude des cordes vibrantes.

Il y a évidemment une racine et une seule comprise entre $n\pi$ et $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, cela quel que soit l'entier n ($n \neq 0$, car pour $n = 0$, on a la racine $x = 0$).

On peut écrire l'équation

$$\frac{x\cos x - \sin x}{\cos x} = 0;$$

$\frac{1}{\cos x} = 0$ n'ayant pas de racines réelles, il suffit de chercher les racines de

$$y = x\cos x - \sin x = 0.$$

On a

$$y' = -x\sin x, \qquad y'' = -x\cos x - \sin x;$$

éliminons $\cos x$ et $\sin x$ entre les trois relations qu'on vient

d'écrire. On aura

$$(1) \qquad (x^2+1)p - 2xy' + x^2y'' = 0.$$

Cette relation montre : 1° que si deux des fonctions y, y', y'' s'annulent pour une même valeur de x, différente de zéro, la troisième s'annule aussi; or, y' ne s'annule que pour $x=0$ ou $\sin x = 0$; pour $x=0$, y et y'' sont différents de zéro; pour $\sin x = 0$, y et y'' sont encore différents de zéro; la deuxième condition est donc vérifiée (1322).

La fonction y'' ne change pas de signe dans un même quadrant; on peut envisager les intervalles

$$h, \quad \frac{\pi}{2} - h; \qquad \frac{\pi}{2} + h, \quad \pi - h; \qquad \frac{\pi}{2} + h, \quad \frac{3\pi}{2} - h; \quad \dots$$

enfin, la relation (1) se réduisant, quand y' est nul, à

$$y(x^2+1) + y''x^2 = 0,$$

on voit, puisque $x^2 > 0$, que y et y'' sont de signe contraire, comme le veut la troisième condition; il restera donc simplement à s'assurer que l'une des deux fonctions y, $-y''$ ne change pas de signe dans les intervalles considérés.

Dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ ou $h, \frac{\pi}{2} - h$, on a

$$y'' < 0, \qquad y' < 0, \qquad y < 0;$$

dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} + h, \pi - h$, $\cos x$ est négatif et $\sin x$ positif : y ne change donc pas de signe et ne s'annule pas.

Entre $\pi + h$ et $\frac{3\pi}{2} - h$, $\cos x$ est négatif, de même que $\sin x$ et y'' ne change pas de signe; y' est positif. De plus, y est négatif pour $x = \pi + h$, positif pour $x = \frac{3\pi}{2} - h$; dans cet intervalle, y, y', y'' est une suite de Sturm. On a ici, pour $x = 4,4$,

$$y = 2,3; \qquad y' = 4,4187; \qquad y'' = -0,4006;$$

et pour $x = 4,5$

$$y = 1,92; \qquad y' = 4,39; \qquad y'' = 0,02;$$

la variation perdue indique la présence d'une racine comprise entre 4,4 et 4,5.

1337. Remarque. — La racine est 4,49. Proposons-nous de trouver l'arc correspondant en degrés, minutes et secondes.

L'unité dont on a fait usage dans le calcul est telle que $\pi = 3,14159\ldots$ correspond à 180°.

Pour 4,49, nous avons d'abord 3,14 qui correspond à 180°; reste $4,49 - 3,14 = 1,35$; ici,

$$\frac{1,35}{x^0} = \frac{3,14}{180},$$

d'où

$$x^0 = 180^\circ + \frac{1,35 \times 180}{3,14} = 180^\circ + 77^\circ,39 = 257^\circ,39,$$

comme $\frac{39}{100}$ de degré valent $\frac{39}{100} \times 60 = 23'$,

$$x = 257^\circ 23';$$

avec une plus grande approximation, on trouve

$$x = 4,493407 \qquad \text{ou} \qquad 257^\circ 27' 12'',268.$$

1338. II. Étude de l'équation

$$(1) \qquad 0 = y_n = 1 - \frac{x}{1.(n+1)} + \frac{x^2}{1.2.(n+1)(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{x^4}{1.2.3.4.(n+1)\ldots(n+4)} - \ldots.$$

On a immédiatement les relations

$$(2) \qquad y_n + (n+1)y'_n + xy''_n = 0,$$

$$(3) \qquad -(n+1)y'_n = y_{n+1},$$

et (3) permet d'écrire (2) comme il suit :

$$(4) \qquad \frac{xy_n}{n(n-1)} - y_{n-1} + y_{n-2} = 0.$$

Nous allons supposer $n < 1$. Il est visible qu'alors

$$1 - \frac{x}{1.(n+1)} > 0;$$

puis

$$\frac{x^2}{1.2.(n+1)(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{x^2}{1.2.(n+1)(n+2)}\left[1 - \frac{x}{3(n+3)}\right] > 0, \qquad \ldots$$

d'où, en fin de compte,

$$y_n > 0.$$

On peut prendre

$$(S) \quad y_n, \quad y'_n, \quad y''_n, \quad \ldots, \quad y_n^h; \qquad n+h < x < n+h+1,$$

pour suite de Sturm.

En effet, tout d'abord, il existe entre trois termes consécutifs quelconques de la suite (S) une relation de récurrence qu'on déduit aisément de la relation (2) en la dérivant et qui montre que si l'un des termes de (S) s'annule, l'un des termes qui lui sont consécutifs ne peut s'annuler sans que tous les termes de (S) s'annulent.

Ensuite, (3)

$$y'_n = -\frac{y_{n+1}}{n+1}, \qquad y''_n = -\frac{y'_{n+1}}{n+1} = \frac{y_{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$
$$y'''_n = -\frac{y_{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \qquad \ldots,$$
$$y_n^h = (-1)^h \frac{y_{n+h}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}$$
$$= (-1)^h \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}$$
$$\times \left[1 - \frac{x}{1.(n+h+1)} + \frac{x^2}{1.2.(n+h+1)(n+h+2)}\left(1 - \frac{x}{3(n+h+3)} + \ldots\right)\right];$$

donc, y_n^h est positif, puisque

$$n+h < x < n+h+1.$$

La suite (S) renferme un nombre de termes assez grand si h est lui-même quelque peu élevé. Hartwitz [1] a montré

[1] *Matematische Annalen*, Tome 33.

qu'on peut alors prendre

$$(S_1) \quad y_n,\ y'_n,\ y''_n,\ y'''_n,\ y^5_n,\ y^7_n,\ y^9_n,\ \ldots,\ y^{2p+1}_n$$

comme suite de Sturm. Nous n'en rapporterons pas la démonstration.

Application I. — Soit l'équation

$$0 = y = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^5}{(1.2.3.4.5)^2} + \ldots$$

De 0 à 3, on peut prendre y, y', y'' comme suite de Sturm (1322), et l'on constate qu'il y a une racine comprise entre 0 et 3.

Application II. — Soit l'équation

$$0 = y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3.2^2} - \frac{x^3}{4(2.3)^2} + \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} - \ldots,$$

qui se présente dans l'étude des membranes élastiques; la suite de Sturm y, y', y'' indique la présence d'une racine ($x = 3{,}6705$) comprise entre 0 et 4; la suite

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{11}$$

indique (1322) la présence d'une racine ($x = 12{,}30461\frac{1}{2}$) comprise entre 0 et 13.

1336. III. Le théorème de Sturm a été appliqué encore aux équations transcendantes très générales

$$0 = 1 - \frac{\alpha.\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 - \ldots \ (^1).$$

Séparation des racines des équations trinomes.

1337. Considérons l'équation trinome

$$Y = ax^n + bx^p + c = 0.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes : l'équation est débarrassée de ses racines multiples, on a $n > 2$ et $n > p$.

Il y a lieu de distinguer 13 cas :

---

(1) R. de Montessus de Ballore, *Bulletin de la Société mathématique de France*, Paris, 1909.

			Racines réelles de Y′.			Racines réelles de Y″.			
$p=1$	$n-p=n-1$ imp.	a et b de même signe	$-x_1$			0			1.
$Y'=nax^{n-1}+b$		a et b de signes contr.			$+x_2$	0			2.
$Y''=n(n-1)ax^{n-2}$	$n-p=n-1$ pair	a et b de même signe	pas de rac. réelles			0			3.
		a et b de signes contr.	$-x_2$		$+x_2$	0			4.
$p=2$	$n-p=n-2$ imp.	a et b de même signe	$-x_1$	0		$-x_3$			5.
$Y'=(nax^{n-2}+b)$		a et b de signes contr.		0	$+x_2$			$+x_3$	6.
$Y''=n(n-1)ax^{n-2}+2b$	$n-p=n-2$ pair	a et b de même signe		0		pas de rac. réelles			7.
		a et b de signes contr.	$-x_2$	0	$+x_2$	$-x_3$		$+x_3$	8.
$p>2$	$n-p$ impair	a et b de même signe	$-x_1$	0		$-x_3$	0		9.
$Y=x^{p-1}(nax^{n-p}+pb)$		a et b de signes contr.		0	$+x_2$		0	$+x_3$	10.
$Y''=x^{p-2}[n(n+1)ax^{n-p}+p(p+1)b]$	$n-p$ pair	a et b de même signe		0			0		11.
		a et b de signes contr.	$-x_2$	0	$+x_2$	$-x_3$	0	$+x_3$	12.

Nous allons prendre, *soit* Y, Y′, Y″ comme suite de Sturm, *soit* Y, Y′, — Y″.

La deuxième condition (1322) est toujours remplie, vis à vis de Y, Y′, puisque l'équation est supposée débarrassée de ses racines multiples. Pour Y′ et Y″ (ou — Y″), on ne peut avoir (cas 5) $-x_1 = -x_3$, car cela supposerait $\frac{2b}{na} = \frac{2b}{n(n-1)a}$ ou $n = 2$, cas exclus; il faudrait de même que $n = 2$ pour que $x_2 = x_3$, dans le cas 6.

Les cas 7 et 8 donnent lieu à la même remarque. Pour les cas 9 à 12, Y′ et Y″ (ou — Y″) ne peuvent avoir une racine commune non nulle que si $n = p$, et dont l'équation serait alors non pas trinome, mais binome.

Reste la racine 0, commune à Y′ et Y″ (où — Y″) dans ces derniers cas 9-12. On y pourvoira, quand α et β seront l'un positif, l'autre négatif en cherchant : 1° le nombre de racines réelles de Y qui sont comprises entre $\alpha(\alpha < 0)$ et $-h$, puis entre $+h$ et $\beta(\beta > 0)$, h étant un nombre positif aussi petit qu'on veut.

La quatrième condition (1322) est toujours remplie, puisque $Y_1 = Y'$.

Etudions la *première condition* (1322). On la vérifiera, en partageant l'intervalle α, β, s'il est nécessaire, en intervalles partiels ne contenant aucune racine de Y″ (où — Y″), comme on l'a fait à propos de la deuxième condition.

Les intervalles ne contenant aucune racine de Y″ sont $-\infty$, $-h$ et $+h$, $+\infty$ pour les cas 1, 2, 3, 4, 11; puis $-\infty$, $-h-x_3$, et $-x_3+h$, $+\infty$ pour le cas 5; $-\infty$, $-h+x_3$ et $+x_3+h$, $+\infty$ pour le cas 6; dans le cas 8, il faut prendre les trois intervalles $-\infty$, $-h-x_3$, puis $-x_3+h$, $-h+x_3$ et x_3+h, $-\infty$; pour le cas 9, $-\infty$, $-h-x_3$; $-x_3+h$, $-h$; $+h$, $+\infty$; cas 10, $-\infty$, $-h$; $+h$, $-h+x_3$; x_3+h, $+\infty$; dans le cas 12, enfin, il y a quatre intervalles : $-\infty$, $-h-x_3$; $-x_3+h$, $-h$; $+h$, $-h+x_3$; x_3+h, $+\infty$.

Troisième condition (1322). On vérifie cette condition en prenant *soit* Y, Y′, Y″, soit Y, Y′, — Y″ comme suite de Sturm.

Par exemple, dans le cas 1, si $-x_1$ est compris entre α et β,

on prendra Y, Y′, Y″ si

$$Y(-x_1)\times Y''(-x_1)<0,$$

et l'on prendra Y, Y′, — Y″ si

$$Y(-x_1)\times Y''(-x_1)>0,$$

puisque, dans cette dernière hypothèse,

$$Y(-x_1)\times[-Y''(-x_1)]<0.$$

Dans le cas **2**, si α, β comprennent x_2, on prendra Y, Y′, Y″ ou Y, Y′, — Y″ selon que

$$Y(x_2)Y''(x_2)<0 \qquad \text{ou} \qquad Y(x_2)Y''(x_2)>0.$$

Dans le cas **3**, on peut prendre indifféremment Y, Y′, Y″ ou Y, Y′, — Y″.

Dans le cas **4**, si α, β, comprennent la racine $-x_2$, on prend Y, Y′, Y″ ou Y, Y′, — Y″ selon que

$$Y(-x_2)Y''(-x_2)<0 \qquad \text{ou} \qquad Y(-x_2)Y''(-x_2)>0;$$

de même si α, β comprennent $+x_2$; si α, β comprenaient $-x_2$ et $+x_2$, ou partagerait α, β en intervalles intermédiaires α, γ et γ, β, γ étant un nombre quelconque compris entre $-x_2$ et $+x_2$. Il peut d'ailleurs se faire que l'on ait

$$Y(-x_2)Y''(-x_2)<0, \qquad Y(-x_2)Y(-x_2)<0$$

ou

$$Y(-x_2)Y''(-x_2)>0, \qquad Y(-x_2)Y''(-x_2)>0 \quad (\quad).$$

L'étude des cas **5-12** est identique.

1338. Application. — Reprenons l'équation

$$x^5-5x+1=0.$$

Nous sommes ici dans le quatrième cas ($p=1$, $n=p$ pair, a et b de signes contraires). Nous avons

$$Y=x^5-5x+1, \qquad Y'=5x^4-5, \qquad Y''=20x^3, \qquad x_2=1.$$

Cherchons le nombre de racines réelles de l'équation. On a

$$Y(-1)Y''(-1)<0, \qquad Y(+1)Y''(+1)<0.$$

Donc Y, Y′, Y″ est une suite de Sturm.

Cherchons le nombre de racines réelles de l'équation. Pour

$$x = -\infty, \qquad x = -h, \qquad x = +h, \qquad x = +\infty$$

les signes sont

$$-+--, \quad +--, \quad +-+ \quad +++;$$

il y a donc une racine négative et deux racines positives. En cherchant les signes de Y, Y′, Y″ pour -2, $-1-h$; h, $1-h$; $1+h$, 2, on retrouve ce qui a été dit : une racine dans chacun des intervalles $-2, -1$; $0, 1$; $1, 2$.

CHAPITRE VI.

RECHERCHE DES LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

Observations préliminaires.

1339. Après nous être occupé surtout, dans les Chapitres précédents, de la séparation des racines, nous allons passer à leur calcul proprement dit.

La question des limites des racines, dans chaque cas particulier, doit être traitée en premier lieu.

Nous indiquerons plus loin comment on peut trouver une limite supérieure et une limite inférieure des modules des racines réelles ou imaginaires d'une équation *quelconque*. Mais nous considérerons d'abord les racines réelles des équations à coefficients réels, pour lesquelles on peut obtenir directement des limites souvent plus favorables.

1340. Quand il s'agit de compter seulement le nombre des racines réelles d'une équation, il suffit, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, de regarder $+\infty$ comme la limite supérieure des racines positives et $-\infty$ comme la limite inférieure des racines négatives. Lorsqu'on en vient au calcul de ces racines, il en est tout autrement.

On comprend, par ce qui précède, le grand intérêt qu'on a à renfermer, *préalablement*, les racines réelles cherchées entre des nombres aussi voisins que possible, afin de pouvoir se borner aux substitutions et aux opérations nécessaires et de n'en pas faire d'inutiles. Au point de vue pratique, la détermination de limites convenablement resserrées devient alors très importante.

1341. Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n x^n + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

une fonction entière de x à coefficients réels.

Quand on saura trouver une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, il sera facile, par cela même, d'obtenir une limite inférieure des racines négatives. On pourra ensuite, par de simples transformations, arriver à une limite inférieure des racines positives et à une limite supérieure des racines négatives. On parviendra de la sorte à indiquer, dans la région même où les racines réelles sont renfermées, deux autres régions contenant, l'une toutes les racines positives, l'autre toutes les racines négatives de l'équation. La *recherche d'une limite supérieure des racines positives* de l'équation $f(x) = 0$ est donc la question principale à résoudre. Avant d'exposer les procédés plus ou moins avantageux qui peuvent conduire au but, nous démontrerons un principe fondamental, qui se résume dans les considérations suivantes.

Principe fondamental.

1342. Soit l'équation donnée ci-dessus, $f(x) = 0$. [Nous supposerons toujours que son premier terme a été rendu positif, et alors, pour $x = +\infty$, on aura $f(x) > 0$.]

Si un certain nombre positif L, mis à la place de x, donne

$$f(L) > 0,$$

et si cette condition est remplie *par toutes les valeurs de x supérieures à* L, jusqu'à $x = +\infty$, il est évident que L est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, puisque son premier membre ne s'annule pour aucune valeur de x supérieure à L.

Réciproquement, toute limite supérieure L des racines positives d'une équation $f(x) = 0$ fait acquérir à son premier membre un signe (positif, lorsque A_0 est positif) qui demeure constant pour toute valeur supérieure donnée à x; car, s'il y avait changement de signe pour une autre substitution $L_1 > L$, l'équation $f(x) = 0$ admettrait au moins une racine positive entre L et L_1 (1071), et L ne serait pas,

contre l'hypothèse, une limite supérieure de ses racines positives.

1343. Lorsque $f(x)$ a tous ses termes positifs, toute valeur positive, *quelle qu'elle soit,* mise à la place de x, donne $f(x) > 0$. L'équation correspondante n'admet donc *aucune racine positive,* ce qui concorde avec le théorème de Descartes (1255).

1344. Lorsque $f(x)$ présente *une seule variation*, l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'*une seule racine positive* (1256).

Il est facile, dans ce cas, *de trouver une limite supérieure de cette racine et de prouver que, à partir de* $x = 0$, *le premier membre de l'équation va constamment en croissant avec* x.

En effet, $f(x)$ se compose alors d'un ou de plusieurs termes positifs suivis de termes tous négatifs. On a, par exemple,

$$f(x) = (A_0 x^m + \ldots + A_n x^n) - (A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_m);$$

ce qu'on peut écrire

$$f(x) = x^n \left[(A_0 x^{m-n} + \ldots + A_n) - \left(\frac{A_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{A_m}{x^n} \right) \right].$$

Pour x croissant à partir de 0, la première parenthèse entre crochets va constamment en augmentant, tandis que la seconde parenthèse va constamment en diminuant : la différence de ces deux parenthèses va donc constamment en croissant. Comme il en est de même du facteur x^n, dès qu'une valeur positive de x rend $f(x) > 0$, toute valeur supérieure de x remplit la même condition, et l'on voit en même temps que $f(x)$ va constamment en croissant à partir de $x = 0$.

On n'a donc qu'à substituer dans $f(x)$, à partir de 0, des nombres croissants à la place de x; le premier, L, pour lequel on obtient $f(L) > 0$, surpasse l'unique racine positive de l'équation $f(x) = 0$.

1345. Si, aux premiers termes, supposés positifs, du premier membre d'une équation $f(x) = 0$ (et dont le nombre peut se réduire à un), on adjoint tous ses termes négatifs en laissant de côté ses autres termes positifs, on forme un polynôme $\varphi(x)$ qui remplit les conditions que nous venons d'in-

diquer; et, en désignant par $\psi(x)$ l'ensemble des termes positifs de $f(x)$ qui n'entrent pas dans $\varphi(x)$, on a

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Toute valeur positive L de x qui donne $\varphi(L) > 0$ est alors évidemment (1344, 1343, 1342) une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ et, à partir de $x = 0$, $f(x)$ va constamment en croissant.

1346. Après ces indications générales, nous allons faire connaître les différentes règles qu'on peut employer pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation. Les deux premières sont d'une application immédiate; les autres procédés exigent des calculs spéciaux plus ou moins longs, mais conduisent à des limites ordinairement beaucoup plus avantageuses.

RECHERCHE D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES D'UNE ÉQUATION.

Limites immédiates.

1347. 1° Soit l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

A_0 étant toujours supposé positif, soit A_n la valeur absolue *du plus grand coefficient négatif* de l'équation. La valeur de $f(x)$ sera, pour toute valeur positive de x, égale ou supérieure à celle du polynôme

$$A_0 x^m - A_n (x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1).$$

Par conséquent, si une valeur positive de x rend cette expression positive, elle satisfera *a fortiori* à la condition $f(x) > 0$.

Or la parenthèse qui multiplie A_n n'est autre chose (14) que le quotient

$$\frac{x^m - 1}{x - 1}.$$

Il suffit donc de déterminer une valeur positive de x à

partir de laquelle on ait (1344)

$$A_0 x^m > A_n \frac{x^m - 1}{x - 1}.$$

En supposant *a priori* $x > 1$, il en sera ainsi évidemment (à cause de $x^m > x^m - 1$) si l'on a

$$\frac{\frac{A_n}{A_0}}{x - 1} \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$x \geq 1 + \frac{A_n}{A_0}.$$

Par suite, *on obtient une limite supérieure des racines positives d'une équation, en ajoutant l'unité au quotient de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif de l'équation par le coefficient du premier terme.*

L'indication de cette limite très simple est attribuée à MACLAURIN.

1348. 2° On arrive à une limite plus resserrée *en tenant compte du rang du premier terme négatif de l'équation,* si ce rang est au delà du second.

Désignons toujours par A_n la valeur absolue *du plus grand coefficient négatif* de l'équation, et supposons que *le premier terme négatif* contienne la variable x à la puissance $m - p$.

La valeur du premier membre $f(x)$ sera évidemment, pour toute valeur positive de x, égale ou supérieure à celle du polynôme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_n (x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots + x + 1).$$

Par conséquent, si une valeur positive de x rend cette expression positive, elle satisfera *a fortiori* à la condition $f(x) > 0$.

Or, la parenthèse qui multiplie A_n n'est autre chose que le quotient

$$\frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1}.$$

Il suffit donc de déterminer une valeur positive de x à

partir de laquelle on ait (1344, 1345)

$$A_0 x^m - A_n \frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1} > 0.$$

En supposant *a priori* $x > 1$, on peut multiplier les deux membres de cette inégalité par $x - 1$ (*Alg. élém.*), et l'on en déduit

$$A_0 x^m (x - 1) - A_n x^{m-p+1} + A_n > 0.$$

Cette dernière relation sera satisfaite *a fortiori*, si l'on a

$$A_0 x^m (x - 1) - A_n x^{m-p+1} \geq 0$$

ou

$$A_0 x^{m-p+1} \left[x^{p-1} (x - 1) - \frac{A_n}{A_0} \right] \geq 0.$$

Comme toute valeur positive de x rend positif le premier facteur $A_0 x^{m-p+1}$, on peut diviser les deux membres de l'inégalité par ce facteur. On peut remarquer ensuite que le produit $x^{p-1}(x - 1)$ est, pour x plus grand que 1, supérieur au produit $(x - 1)^{p-1}(x - 1)$ ou à $(x - 1)^p$. Finalement, la valeur positive donnée à x doit simplement satisfaire à la relation

$$(x - 1)^p - \frac{A_n}{A_0} \geq 0,$$

et l'on en tire

$$x \geq 1 + \sqrt[p]{\frac{A_n}{A_0}}.$$

Par suite, *p étant la différence qui existe entre le degré de l'équation donnée et celui de son premier terme négatif, on obtient une limite supérieure de ses racines positives en ajoutant l'unité à la racine p^ième du quotient de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif de l'équation par le coefficient du premier terme.*

Si le premier terme négatif est le second terme de l'équation, on a $p = 1$, et l'on retombe sur la limite de Maclaurin (1347).

1349. Si l'on applique les deux règles précédentes à l'équation

$$2x^6 + 3x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 12x^2 + x - 4 = 0,$$

la règle de Maclaurin donne $1+\frac{12}{2}$ ou 7 comme une limite supérieure des racines positives, et la seconde règle conduit à la limite plus resserrée $1+\sqrt[3]{\frac{12}{2}}$ ou $1+\sqrt[3]{6}$, quantité moindre que 3.

Méthode des groupements.

1350. Cette méthode n'est que la mise en œuvre répétée du principe démontré au n° 1344; elle peut donc être regardée comme une conséquence du théorème de Descartes. Le résultat dépend ici de la manière dont on applique le procédé.

Supposons qu'on partage le premier membre de l'équation donnée en *groupes de termes,* disposés de telle sorte que chaque groupe commence par un terme positif et présente dans son ensemble une seule variation. Chacun de ces groupes, égalé à zéro, constituerait une équation n'ayant qu'une seule racine positive. Par conséquent, dès qu'on aura trouvé, pour chaque groupe, une valeur positive de x qui le rende positif, toutes les valeurs plus grandes rempliront la même condition, en imposant au groupe des valeurs croissantes (1344).

Il suffira donc de substituer à x, dans l'équation ainsi partagée, des nombres positifs croissants. On s'arrêtera au premier qui donnera *à tous les groupes* des valeurs positives, et ce nombre sera évidemment une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée (1342).

1351. 1° *Soit, par exemple, l'équation*

$$2x^6+3x^5+10x^4-7x^3-12x^2+x-4=0,$$

déjà considérée au n° 1349.

Nous partagerons son premier membre en trois groupes, que nous écrirons comme il suit :

$$(2x^6+3x^5)+x^2(10x^2-7x-12)+(x-4)=0.$$

En substituant successivement à la place de x les nombres positifs croissants 1, 2, 3, ..., on voit que le premier groupe est toujours positif, que 2 suffit pour imposer cette condition

au deuxième groupe et que, pour le troisième, il faut aller jusqu'à 4. On peut donc regarder 4 comme une limite supérieure des racines positives de l'équation donnée.

Mais on peut faire mieux en adoptant un autre groupement, et cette élasticité rend la méthode l'égale de toutes les autres.

Ajoutons et retranchons x au premier membre de l'équation. Elle prend alors la forme

$$(2x^6+3x^5)+x(10x^3-7x^2-12x-1)+(2x-4)=0,$$

et l'on voit immédiatement que 2 est une limite supérieure de ses racines positives.

2° *Soit, encore, l'équation*

$$x^8-2x^7+10x^6-2x^5-12x^4+3x^2-100x+1000=0.$$

On peut, en groupant directement les termes du premier membre, la mettre sous la forme

$$x^7(x-2)+2x^4(5x^2-x-6)+(3x^2-100x+1000)=0.$$

Les deux premiers groupes sont positifs pour $x=2$. Quant au troisième groupe [qui ne satisfait pas à la règle posée (1350), puisqu'il présente *deux variations*], on obtient, en l'égalant à zéro, une équation du second degré dont les racines sont évidemment imaginaires, de sorte que ce groupe conserve une valeur positive pour toutes les valeurs réelles de x (*Alg. élém.*). Le nombre 2 représente donc une limite supérieure des racines positives de l'équation donnée. [La règle de Maclaurin (1347) conduirait à une limite égale à 101.]

Méthode de Newton.

1352. Le procédé indiqué par Newton [1] repose sur une remarque presque évidente.

L'équation proposée $f(x)=0$ étant de degré m, considé-

[1] Dans son *Arithmétique universelle.*

rons son premier membre avec ses m dérivées, c'est-à-dire la suite

$$(1) \quad f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^m(x).$$

Si une valeur positive a substituée à x rend positives toutes ces fonctions ou positifs tous les termes de cette suite, a est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

En effet, la formule de Taylor (735) donne

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^m(a).$$

Tous les termes du second membre étant positifs, par hypothèse, il en résulte

$$f(a+h) > 0,$$

quel que soit h (positif), ce qui justifie l'énoncé (1342). On voit en même temps que $f(x)$, à partir de la substitution $x = a$, va constamment en croissant.

La marche à suivre pour déterminer a est très simple. On ne substitue, en général, que des nombres entiers.

On forme la suite (1), et on la parcourt en sens inverse. Le premier terme de $f(x)$ étant toujours supposé positif, $f^m(x)$ est une constante *positive*. $f^{m-1}(x)$ étant du premier degré et son premier terme *étant alors positif*, on trouve immédiatement une valeur positive de x (x_0 par exemple) qui rend cette fonction positive. On passe à la fonction précédente $f^{m-2}(x)$, qui est du second degré, et l'on vérifie si la valeur x_0 suffit pour la rendre positive; sinon, on augmente x_0 jusqu'à une valeur x_1 telle, qu'on ait $f^{m-2}(x_1) > 0$. On continue ainsi en remontant et en conservant la dernière valeur donnée à x tant qu'elle rend les différentes fonctions positives, mais en l'augmentant dès qu'elle impose une valeur négative à l'une des fonctions rencontrées. On arrive ainsi nécessairement à une valeur a de x pour laquelle $f(x)$ et toutes ses dérivées sont positives, et a est alors la limite que peut fournir la méthode.

Par la manière même dont elle est obtenue en opérant de proche en proche, cette limite est forcément la plus resserrée

possible. La méthode des groupements, convenablement appliquée, peut d'ailleurs conduire au même résultat.

1353. Appliquons, pour le constater, la méthode de Newton à la dernière équation traitée (1351, 2°).

Nous aurons successivement

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 10x^6 - 2x^5 - 12x^4 + 3x^2 - 100x + 1000,$$
$$f'(x) = 8x^7 - 14x^6 + 60x^5 - 10x^4 - 48x^3 + 6x - 100.$$
$$f''(x) = 56x^6 - 84x^5 + 300x^4 - 40x^3 - 144x^2 + 6,$$
$$f'''(x) = 336x^5 - 420x^4 + 1200x^3 - 120x^2 - 288x,$$
$$f^{IV}(x) = 1680x^4 - 1680x^3 + 3600x^2 - 240x - 288,$$
$$f^{V}(x) = 6720x^3 - 5040x^2 + 7200x - 240,$$
$$f^{VI}(x) = 20160x^2 - 10080x + 7200,$$
$$f^{VII}(x) = 40320x - 10080,$$
$$f^{VIII}(x) = 40320.$$

Nous commencerons par essayer, en remontant, la substitution $x = 1$. Elle donne des résultats positifs pour les différentes fonctions, jusqu'à ce qu'on parvienne à $f'(x)$. Pour $x = 1$, on a $f'(1) < 0$, et il faut prendre $x = 2$, qui rend positives les deux dernières fonctions $f'(x)$ et $f(x)$, et est, par conséquent, comme nous l'avons déjà vu (1351, 2°), une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Il n'est pas douteux que la méthode des groupements (1350) ne conduise, en général, beaucoup plus rapidement au résultat que la méthode de Newton.

Méthode de Laguerre.

1354. Laguerre a indiqué (1), pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation, une méthode élégante, analogue à celle de Newton, mais d'une application ordinairement plus facile, parce que, pour une substitution donnée, les termes de la suite qu'on doit employer se déduisent les uns des autres suivant une loi simple et *déjà connue*.

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1880.

Étant donnée l'équation $f(x) = 0$, de degré m, considérons la suite

$$(1)\quad \begin{cases} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + A_2 x^{m-3} + \dots + A_{m-1}, \\ f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m, \end{cases}$$

dont le dernier terme est le premier membre de l'équation proposée.

Quand on veut essayer si le nombre a est racine de l'équation $f(x) = 0$, on a précisément (1068) à effectuer la division de $f(x)$ par $x - a$, et les différents coefficients du quotient ne sont autre chose (228, 2e Dén) que les termes de la suite précédente (moins le dernier), où a est substitué à x. Quant au reste (qui doit être nul si a est racine), c'est le dernier terme $f(a)$.

Par conséquent, les termes de la suite (1) [x étant remplacé par a] se déduisent les uns des autres par l'algorithme bien connu (228, 1068), qui consiste à multiplier par a le terme précédent, en ajoutant au produit obtenu le coefficient du terme de $f(x)$ qui est de même rang que le terme de la suite qu'on veut calculer.

Or, puisqu'on a identiquement, d'après la division supposée effectuée, $f(x) = (x - a)Q + R$, c'est-à-dire

$$f(x) = (x - a)[f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \dots + f_1(a)] + f(a),$$

on voit que, si un nombre positif a substitué à x rend positifs tous les termes de la suite (1), $f(x)$ prend une valeur positive et croissante pour a et pour toutes les valeurs de x supérieures à a et croissantes; a est donc alors (1342, 1344) une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$f(x) = 0.$$

On applique la méthode comme celle de Newton. On commence par essayer la racine de l'équation du premier degré

$$f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1 = 0,$$

ou le nombre entier immédiatement supérieur x_0. On calcule de proche en proche les valeurs des fonctions suivantes $f_{m-2}(x_0), f_{m-3}(x_0), \ldots$, d'après l'algorithme rappelé. Si tous les résultats, jusqu'à $f(x_0)$, sont positifs, x_0 répond à la question. Sinon, on essaye le nombre entier consécutif, et l'on continue de la même manière jusqu'à ce que la dernière substitution conduise à des résultats tous positifs.

1355. Reprenons l'équation déjà traitée deux fois par la méthode de Newton (1353) et par la méthode des groupements (1351, 2°), et pour laquelle on a

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 10x^6 - 2x^5 - 12x^4 + 3x^2 - 100x + 1000.$$

En égalant à 0 la fonction du premier degré, il vient ici

$$f_{m-1}(x) = x - 2 = 0.$$

On commencera donc par essayer 2. On obtient alors successivement [pour les termes de la suite (1)] les nombres

$$1, \quad 0, \quad 10, \quad 18, \quad 24, \quad 48, \quad 99, \quad 98, \quad 1196.$$

Tous ces résultats étant positifs, 2 est une limite supérieure des racines positives de l'équation donnée. Cet exemple montre l'avantage de la méthode de M. Laguerre sur celle de Newton.

Limite supérieure des racines positives de l'équation dérivée $f'(x) = 0$.

1356. Les démonstrations précédentes prouvent que, a étant une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, trouvée par une méthode quelconque, la fonction $f(x)$ (plus grande que zéro pour $x = a$) *va constamment en croissant,* depuis $x = a$ jusqu'à $x = +\infty$.

Il en résulte que, dans le même intervalle, la dérivée $f'(x)$ *est constamment positive* (1151), c'est-à-dire qu'elle ne peut jamais s'annuler.

a est donc en même temps une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ et de l'équation dérivée $f'(x) = 0$.

Recherche d'une limite inférieure des racines positives d'une équation.

1357. Pour trouver une limite inférieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, il suffit de poser $x = \frac{1}{y}$ ou de former (1113) la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation donnée, c'est-à-dire l'équation aux inverses de ses racines.

On sait que, pour obtenir cette dernière équation, il suffit d'échanger dans l'équation donnée les coefficients des termes également éloignés des extrêmes.

Si λ est alors une limite supérieure des racines positives de l'équation $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, il est clair que $\frac{1}{\lambda}$ est une limite inférieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$; car, à la plus grande racine positive de la transformée, correspond la plus petite racine positive de la proposée.

Dans les applications, on doit chercher à parvenir pour λ à la plus petite valeur possible, afin d'avoir pour $\frac{1}{\lambda}$ la plus grande valeur possible.

1358. Lorsqu'on veut déterminer immédiatement, c'est-à-dire sans calculs, une limite inférieure des racines positives d'une équation, on peut opérer comme il suit.

Soit l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

La transformée $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ sera (*en rendant son premier terme positif*, s'il ne l'est pas déjà)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

En désignant alors par A_n la valeur absolue du plus grand coefficient qui, dans l'équation proposée, soit de signe contraire à A_m, ce coefficient deviendra le plus grand coefficient négatif de la transformée. On pourra donc, en appliquant la règle de Maclaurin (1347), regarder comme une limite supé

rieure des racines positives de la transformée la quantité

$$\lambda = 1 + \frac{A_n}{A_m}.$$

La quantité inverse

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{A_m}{A_m + A_n}$$

représentera donc à son tour une limite inférieure des racines positives de la proposée.

On peut, par suite, énoncer cette règle, qui est le pendant de la limite de Maclaurin : *On obtient immédiatement une limite inférieure des racines positives d'une équation donnée, en formant le quotient de son terme indépendant pris en valeur absolue par la somme des valeurs absolues de ce même terme et du plus grand coefficient de signe contraire.*

Recherche d'une limite inférieure et d'une limite supérieure des racines négatives

1359. Étant donnée l'équation $f(x) = 0$, il n'y a qu'à chercher une limite supérieure et une limite inférieure des racines positives de sa transformée en $-x$ (1105), pour obtenir, inversement et en changeant les signes des nombres trouvés, une limite inférieure et une limite supérieure de ses racines négatives. En effet, les racines positives de la transformée en $-x$ deviennent, changées de signe, les racines négatives de la proposée.

Remarques.

1360. 1° Quand tous les termes d'une équation sont de même signe, cette équation n'admet aucune racine positive (1297). Il n'y a donc pas lieu de chercher les limites de ses racines positives.

1361. 2° Quand tous les termes de degré pair d'une équation ont un même signe, tandis que tous les termes de degré impair ont le signe contraire, aucun nombre négatif substitué à x ne peut annuler son premier membre, un pareil nombre imposant nécessairement le même signe à tous ses termes. Une pareille équation n'admet donc aucune racine négative,

et il n'y a pas lieu de chercher pour elle les limites des racines de cette espèce.

Exemple.

1362. Proposons-nous de trouver des limites supérieure et inférieure pour les racines positives et pour les racines négatives de l'équation

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140 = 0.$$

On peut l'écrire d'abord comme il suit, en groupant ses termes (1330) :

$$f(x) = x^4(x^2 - 36) + 3x^3(x^2 - 15) + (93x^2 + 132x + 140) = 0.$$

Le troisième groupe est positif pour toute valeur positive de x et croissant avec cette valeur. Pour remplir les mêmes conditions, le deuxième groupe exige qu'on fasse $x = 4$ et, le premier, qu'on fasse $x = 6$. On peut donc regarder

$$L = 6$$

comme une limite supérieure des racines positives de l'équation donnée.

La transformée en $\frac{1}{x}$ de cette équation est (1357)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 140x^6 + 132x^5 + 93x^4 - 45x^3 - 36x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Il est visible, sans avoir besoin d'aucun calcul, que $\lambda = 1$ est une limite supérieure des racines positives de cette transformée. Par conséquent, $\frac{1}{\lambda} = 1$ sera une limite inférieure des racines positives de l'équation donnée, qui aura toutes ses racines positives comprises entre 1 et 6.

Prenons maintenant la transformée en $-x$ de cette équation. Il viendra

$$f(-x) = x^6 - 3x^5 - 36x^4 + 45x^3 + 93x^2 - 132x + 140 = 0,$$

ou, en groupant les termes,

$$f(-x) = x^4(x^2 - 3x - 36) + 45x^3 + x(93x - 132) + 140 = 0.$$

Le quatrième groupe est un nombre positif constant. Le troisième groupe est positif pour la valeur $x = 2$ et croît avec cette valeur. Le deuxième groupe est positif, quelle que soit la valeur positive de x, et croît avec cette valeur. Quant au premier groupe, si l'on considère l'équation du second degré

$$x^2 - 3x - 36 = 0,$$

dont les racines sont réelles et de signes contraires (*Alg. élém.*), on voit que sa racine positive,

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 + 144}}{2} = \frac{3 + \sqrt{153}}{2},$$

est inférieure à 8. On peut donc regarder 8 comme une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(-x) = 0$ et, par suite (1359),

$$L' = -8$$

comme une limite inférieure des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$.

Enfin, l'équation aux inverses des racines de la transformée en $-x$ est évidemment

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 140x^6 - 132x^5 + 93x^4 + 45x^3 - 36x^2 - 3x + 1 = 0.$$

En groupant les termes, on obtient

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = x^5(140x - 132) + 93x^4 + x(45x^2 - 36x - 3) + 1 = 0,$$

et l'on voit que, pour $x = 1$, tous les groupes sont positifs et croissent avec x. Donc, 1 pouvant être regardé comme une limite supérieure des racines positives de l'équation $f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, $\frac{1}{1}$ ou 1 peut être regardé comme une limite inférieure des racines positives de l'équation $f(-x) = 0$. Par conséquent (1359), -1 est à son tour une limite supérieure des racines négatives de l'équation proposée $f(x) = 0$, dont toutes les racines négatives sont comprises alors entre -1 et -8.

En résumé, toutes les racines réelles de l'équation donnée $f(x) = 0$ sont comprises entre -8 et $+6$, et il n'y en a aucune entre -1 et $+1$.

Recherche des limites des modules des racines d'une équation quelconque.

1363. Pour trouver les limites des modules de toutes les racines, réelles et imaginaires, d'une équation *quelconque*, nous appliquerons à cette équation

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots \\ \qquad\qquad + A_{m-1} z + A_m = P + Qi = 0, \end{cases}$$

une transformation analogue à celle employée.

Soient

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad \text{et} \qquad A_\mu = Z_\mu(\cos\omega_\mu + i\sin\omega_\mu),$$

A_μ étant un coefficient quelconque de l'équation donnée et μ pouvant varier de o à m.

Le premier membre de l'équation (1) prendra la forme (112, 714)

$$\begin{aligned}
&Z_0 r^m \quad [\cos(m\alpha + \omega_0) + i\sin(m\alpha + \omega_0)] \\
&+ Z_1 r^{m-1}\{\cos[(m-1)\alpha + \omega_1] + i\sin[(m-1)\alpha + \omega_1]\} + \dots \\
&+ Z_n r^{m-n}\{\cos[(m-n)\alpha + \omega_n] + i\sin[(m-n)\alpha + \omega_n]\} + \dots \\
&+ Z_m \quad (\cos\omega_m + i\sin\omega_m).
\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
P &= Z_0 r^m\cos(m\alpha + \omega_0) + \dots + Z_n r^{m-n}\cos[(m-n)\alpha + \omega_n] + \dots + Z_m\cos\omega_m, \\
Q &= Z_0 r^m\sin(m\alpha + \omega_0) + \dots + Z_n r^{m-n}\sin[(m-n)\alpha + \omega_n] + \dots + Z_m\sin\omega_m.
\end{aligned}$$

Le module R de $\varphi(z)$ ayant pour expression (91) $\sqrt{P^2+Q^2}$, on peut évidemment poser

$$\begin{aligned}
R^2 = {}&[P\cos(m\alpha + \omega_0) + Q\sin(m\alpha + \omega_0)]^2 \\
&+ [P\sin(m\alpha + \omega_0) - Q\cos(m\alpha + \omega_0)]^2.
\end{aligned}$$

On a donc

$$R^2 > [P\cos(m\alpha + \omega_0) + Q\sin(m\alpha + \omega_0)]^2. \tag{1}$$

Toutes les racines de l'équation $\varphi(z) = o$ donnent à la fois $P = o$ et $Q = o$, c'est-à-dire $R = o$. Il s'agit de trouver entre quelles limites doit tomber la valeur du module r de z, pour qu'on n'ait jamais en même temps $P = o$ et $Q = o$, c'est-à-dire pour que R reste constamment supérieur à zéro.

Or, on a [en se rappelant que $\cos\theta = \cos(-\theta)$]

$$\begin{aligned}
&P\cos(m\alpha + \omega_0) + Q\sin(m\alpha + \omega_0) \\
&\quad = Z_0 r^m + \dots + Z_n r^{m-n}\cos(n\alpha + \omega_0 - \omega_n) + \dots \\
&\qquad\qquad + Z_m\cos(m\alpha + \omega_0 - \omega_m).
\end{aligned}$$

Désignons par Z le plus grand des modules $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, \dots, Z_m$, et ajoutons au second membre de l'expression précédente la quantité identiquement nulle

$$Z(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + r + 1) - Z\frac{r^m - 1}{r - 1},$$

Si l'on remarque qu'on peut écrire

$$Z_0 r^m - Z\frac{r^m-1}{r-1} = \frac{Z_0 r^m\left(r-1-\frac{Z}{Z_0}\right)+Z}{r-1},$$

on aura, après l'addition indiquée,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} P\cos(m\alpha+\omega_0)+Q\sin(m\alpha+\omega_0) \\ \quad = \dfrac{Z_0 r^m\left(r-1-\dfrac{Z}{Z_0}\right)+Z}{r-1} \\ \quad + \left\{\begin{array}{l} [Z+Z_1\cos(\alpha+\omega_0-\omega_1)]\,r^{m-1} \\ \quad +[Z+Z_2\cos(2\alpha+\omega_0-\omega_2)]\,r^{m-2}+\ldots \\ \quad +[Z+Z_m\cos(m\alpha+\omega_0-\omega_m) \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

La parenthèse entre crochets du second membre de l'égalité (2) restant évidemment positive d'après le choix de Z, il suffit que le premier terme de ce second membre soit positif, pour qu'on puisse affirmer qu'il en est de même du premier membre de cette égalité. On est ainsi conduit à la condition

$$r > 1 + \frac{Z}{Z_0}.$$

La quantité

$$1+\frac{Z}{Z_0} \quad \text{ou} \quad \frac{Z_0+Z}{Z_0}$$

est donc une *limite supérieure* des modules des racines de l'équation proposée, puisque, pour toute valeur de la variable z ayant ce module ou un module supérieur, le premier membre de l'égalité (2) est positif, de sorte que, en raison de l'inégalité (1), le module R de $\varphi(z)$ est, *a fortiori*, une quantité supérieure à zéro.

Si l'on forme maintenant la transformée en $\frac{1}{z}$ de l'équation $\varphi(z)=0$, et si l'on cherche une limite supérieure des modules des racines de cette transformée, on obtiendra, en prenant l'inverse de cette limite, une limite inférieure des modules des racines de la proposée (113).

D'après cela, représentons par Z′ le plus grand des modules des coefficients de la transformée en $\frac{1}{z}$. En se reportant à ce qui précède et à la règle de formation de la transformée

(1113), l'expression $\frac{Z_m + Z'}{Z_m}$ sera une limite supérieure des modules des racines de la transformée. L'expression inverse

$$\frac{Z_m}{Z_m + Z'}$$

est donc, à son tour, *une limite inférieure* des modules des racines de l'équation proposée.

On peut rapprocher ces résultats de la limite de Maclaurin (1347) et de la règle indiquée au n° 1358.

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION DES RACINES COMMENSURABLES DES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS RATIONNELS.

Observations préliminaires.

1364. Nous supposons que les coefficients de l'équation donnée, $f(x) = 0$, sont des nombres rationnels. On peut, dans ce cas, chasser les dénominateurs présentés par le premier membre de l'équation, et les coefficients de tous ses termes deviendront ainsi des nombres entiers.

Si l'équation proposée admet alors des racines commensurables, il est facile de les obtenir par une méthode régulière et très simple, dont l'application, théoriquement parlant, doit précéder toute autre recherche. En effet, si l'équation considérée n'a que des racines commensurables, elle se trouvera complètement résolue. Si elle a des racines commensurables en nombre inférieur à son degré, on pourra supprimer par voie de division les facteurs correspondants (1062), et abaisser de cette manière le degré de l'équation, c'est-à-dire diminuer la difficulté de sa résolution complète.

Les racines commensurables peuvent être entières ou fractionnaires. Nous indiquerons d'abord la marche à suivre pour trouver les racines entières.

Détermination des racines entières.

1365. Soit l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

dont tous les coefficients sont des nombres entiers.

Soit a un nombre entier. Pour essayer si a est racine de l'équation proposée (1068), on doit diviser $f(x)$ par le binôme $x - a$. On obtient alors un quotient

$$Q = A_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1},$$

dont les coefficients se forment d'après une loi connue, et un reste R soumis à la même loi. En vertu de cette loi, on a (1068) les égalités suivantes, où toutes les lettres représentent des nombres entiers :

$$B_1 = A_0 a + A_1, \quad B_2 = B_1 a + A_2, \quad B_3 = B_2 a + A_3, \quad \ldots,$$
$$B_{m-2} = B_{m-3} a + A_{m-2}, \quad B_{m-1} = B_{m-2} a + A_{m-1},$$
$$R = B_{m-1} a + A_m.$$

Si a est racine, on a $R = 0$, et la dernière égalité donne

$$\frac{A_m}{a} = -B_{m-1}.$$

On déduit ensuite des autres égalités, en remontant,

$$\frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a} = -B_{m-2}, \quad \frac{A_{m-2} - B_{m-2}}{a} = -B_{m-3}, \quad \ldots,$$
$$\frac{A_3 - B_3}{a} = -B_2, \quad \frac{A_2 - B_2}{a} = -B_1, \quad \frac{A_1 - B_1}{a} = -A_0.$$

Les relations précédentes renferment les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'un nombre entier, positif ou négatif, soit racine d'une équation donnée à coefficients entiers. Nous allons les énoncer sous forme de *règle*.

Pour que le nombre entier a soit racine, il faut d'abord qu'il soit un diviseur exact du dernier terme A_m *de l'équation.* (ON NE DEVRA DONC CHERCHER LES RACINES ENTIÈRES DE L'ÉQUATION PROPOSÉE QUE PARMI LES DIVISEURS DE SON DERNIER TERME.) *Il faut ensuite que la somme du quotient obtenu* $-B_{m-1}$ *et de l'avant-dernier coefficient* A_{m-1} *de l'équation soit exactement divisible par a; qu'il en soit de même de la somme du nouveau quotient obtenu* $-B_{m-2}$ *et du coefficient* A_{m-2} *de l'équation qui est de même indice; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait à diviser par a la somme du quotient* $-B_1$ *de la* $(m-1)^{ième}$ *division et du second coefficient* A_1 *de l'équation. On doit alors trouver pour*

dernier quotient $-A_0$, *c'est-à-dire le coefficient du premier terme de l'équation, changé de signe.*

On est donc averti que *a n'est pas racine,* lorsqu'on parvient dans la série des opérations à un quotient fractionnaire ou lorsque la dernière division donne un quotient différent de $-A_0$.

Il faut remarquer avec soin, *lorsque a est racine,* que les quotients obtenus successivement

$$-B_{m-1},\ -B_{m-2},\ -B_{m-3},\ \ldots,\ -B_2,\ -B_1,\ -A_0,$$

sont précisément, mais en ordre inverse, les coefficients *changés de signe* du quotient du premier membre $f(x)$ de l'équation considérée par le facteur $x-a$.

La règle indiquée montre donc si a est racine et, dans l'affirmative, conduit d'elle-même à la nouvelle forme du premier membre de l'équation débarrassée de cette racine a, *c'est-à-dire tout préparé pour l'essai d'une nouvelle racine entière.*

Avant de chercher les autres racines entières d'une équation, on doit toujours, à cause de la facilité de cette vérification, essayer si $+1$ et -1 sont racines.

1366. Ainsi qu'on vient de le voir, on ne doit regarder comme pouvant être racines entières que les diviseurs du dernier terme A_m, *pris positivement ou négativement.*

Pour ne pas faire d'essais inutiles, on cherchera préalablement les limites des racines réelles de l'équation proposée, d'après les règles développées dans le Chapitre précédent, et l'on aura soin de rejeter tous les diviseurs de A_m qui tomberont en dehors de ces limites.

On peut encore diminuer le nombre des essais, à l'aide d'un théorème très simple à appliquer et qui est le suivant.

1367. *Lorsque a est une racine entière de l'équation* $f(x)=0$, *le résultat* $f(E)$ *de la substitution d'un entier quelconque* E *à la place de x est exactement divisible par la différence* $E-a$.

En effet, si a est racine, on en conclut l'identité

$$f(x)=(x-a)Q,$$

où Q est un polynôme de même forme que $f(x)$, de degré $m-1$. Puisqu'il s'agit d'une identité, on peut substituer à x un entier quelconque E, et l'on a alors, en désignant par $Q_{(E)}$ le résultat de la substitution de E dans Q, la relation

$$\frac{f(E)}{E-a} = Q_{(E)}, \tag{1}$$

qui justifie l'énoncé.

Puisqu'on doit commencer (1365) par essayer $+1$ et -1, on connaît d'avance $f(1)$ et $f(-1)$, et l'on a intérêt à se servir des deux expressions

$$\frac{f(1)}{1-a} = Q_{(1)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(1)}{a-1} = -Q_{(1)},$$

$$\frac{f(-1)}{-1-a} = Q_{(-1)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(-1)}{a+1} = -Q_{(-1)}.$$

On rejettera donc *encore, parmi les diviseurs positifs et négatifs du dernier terme* A_m *qui tombent entre les limites des racines réelles de l'équation* $f(x)=0$, *tous ceux qui, diminués de* 1, *ne divisent pas exactement* $f(1)$, *et tous ceux qui, augmentés de* 1, *ne divisent pas exactement* $f(-1)$.

On peut ajouter que *l'équation proposée n'admet aucune racine entière lorsque, des trois résultats* $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, *aucun n'est divisible par* 3.

En effet, reprenons l'égalité (1) sous la forme

$$\frac{f(E)}{a-E} = -Q_{(E)}. \tag{1 bis}$$

On en déduit les trois identités

$$f(1) = -(a-1)Q_{(1)},$$
$$f(0) = -aQ_{(0)},$$
$$f(-1) = -(a+1)Q_{(-1)}.$$

Des trois nombres entiers consécutifs $a-1$, a, $a+1$, l'un est nécessairement divisible par 3; il en sera donc de même des trois premiers membres $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, si l'équation admet une racine entière a.

La réciproque n'est pas vraie. L'un des trois nombres $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, peut être divisible par 3, sans que l'équation admette aucune racine entière.

1368. Il est commode, une fois toutes ces éliminations accomplies, d'effectuer l'essai des seuls diviseurs de A_m qui puissent être racines, de la manière suivante.

On écrit sur une même ligne horizontale tous les coefficients du premier membre de l'équation donnée:

A_0	A_1	A_2	A_3	...	A_{m-2}	A_{m-1}	A_m	a
	A_0	B_1	B_2	...	B_{m-3}	B_{m-2}	B_{m-1}	b

on pose à la suite le premier diviseur a à essayer, et l'on tire, au-dessous de cette première ligne, un premier trait horizontal. On effectue les divisions prescrites par la règle du n° 1365, et l'on place les quotients obtenus au-dessous de la première ligne, en remontant et *en ayant soin de changer leurs signes.*

Ainsi, d'après la règle, on divise A_m par a, on obtient un quotient $-B_{m-1}$, et l'on écrit B_{m-1} au-dessous de A_m. On ajoute A_{m-1} et $-B_{m-1}$, on divise cette somme par a, on obtient un quotient $-B_{m-2}$, et l'on écrit B_{m-2} au-dessous de A_{m-1}; etc. Si l'on rencontre un quotient fractionnaire, on s'arrête, et a n'est pas racine. Si tous les quotients obtenus sont entiers et si l'on arrive, en dernier lieu, à poser A_0 au-dessous de A_1, a est racine. La seconde ligne horizontale renferme alors les nouveaux coefficients du premier membre de l'équation $f(x) = 0$ débarrassée de la racine a, c'est-à-dire les coefficients sur lesquels on doit opérer pour l'essai d'un nouveau diviseur b. On tire un second trait horizontal, et l'on continue jusqu'à l'essai du dernier diviseur s'il y a lieu.

Il est clair que, si a divise le dernier terme B_{m-1} de la nouvelle équation obtenue en débarrassant une première fois l'équation $f(x) = 0$ de la racine a, on doit encore essayer a relativement à cette nouvelle équation.

Exemple.

1369. *Soit à déterminer les racines entières de l'équation*

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140 = 0.$$

On a, pour le dernier terme de l'équation,

$$140 = 2^2.5.7,$$

et les diviseurs de 140 sont, en valeur absolue, renfermés dans le Tableau ci-dessous (*Arithm.*, 183)

$$\begin{array}{llllllll} 1 & 2 & 4 & & & & & \\ 5 & 10 & 20 & & & & & \\ 7 & 14 & 28 & 35 & 70 & 140. & & \end{array}$$

Or nous avons vu (1362) que les racines négatives de l'équation proposée tombent entre -8 et -1, tandis que ses racines positives sont comprises entre $+1$ et $+6$, de sorte que -1 et $+1$ ne sont pas racines.

D'après ces limites, nous ne devons essayer que les diviseurs

$$2,\quad 4,\quad 5,\quad -2,\quad -4,\quad -5,\quad -7;$$

mais on peut encore diminuer leur nombre. On a ici

$$f(1) = 288, \qquad f(-1) = 108.$$

En appliquant alors le théorème du n° 1367, on voit que l'on doit rejeter le diviseur -4 qui, diminué de 1, ne divise pas $f(1)$, et le diviseur 4 qui, augmenté de 1, ne divise pas $f(-1)$.

Finalement, il ne reste donc à essayer que les diviseurs

$$2,\quad 5,\quad -2,\quad -5,\quad -7.$$

Les opérations et les résultats sont résumés dans le Tableau ci-dessous, établi d'après l'algorithme du n° 1368. On écrit les quotients successifs en changeant leur signe; mais on a soin, dans la série des opérations, de leur rendre par la pensée leur véritable signe.

$+3$	-36	-45	$+93$	$+132$	$+140$	2 est racine.
$+1$	$+5$	-26	-97	-101	-70	2 n'est plus racine.
			»	$+68$	$+35$	
$+1$	$+5$	-26	-97	-101	-70	5 est racine.
	$+1$	$+10$	$+24$	$+23$	$+14$	-2 est racine.
		$+1$	$+8$	$+8$	$+7$	-7 est racine.
			$+1$	$+1$	$+1$	

Ainsi, pour essayer 2, on dit : 140 divisé par 2 donne 70, et l'on écrit -70; la somme $132 + 70$ divisée par 2 donne 101, et l'on écrit -101; la somme $93 + 101$ divisée par 2 donne 97, et l'on écrit -97, la somme $-45 + 97$ divisée par 2 donne 26, et l'on écrit -26; la somme $-36 + 26$ divisée par 2 donne -5, et l'on écrit $+5$; la somme $+3 - 5$ divisée par 2 donne -1, on écrit $+1$, et 2 est racine.

Après avoir vérifié que 2 est racine, il faut l'essayer de nouveau, parce que le dernier terme — 70 de la nouvelle équation admet le diviseur 2. Comme on rencontre alors un quotient fractionnaire, 2 n'est plus racine. 5 est racine une seule fois, parce que le dernier terme + 14 de la nouvelle équation n'admet plus le diviseur 5. Après avoir vérifié que — 2 est racine, il est inutile d'essayer — 5 qui ne divise pas le dernier terme + 7 de la nouvelle équation. Enfin — 7 est racine une seule fois, parce que le dernier terme + 1 de la nouvelle équation n'est plus divisible par — 7.

L'équation donnée admet donc les racines entières

$$2, \quad 5, \quad -2, \quad -7,$$

et, lorsqu'on la débarrasse de ces quatre racines, on l'*abaisse* au second degré. Cette équation du second degré est immédiatement, d'après le tableau,

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Elle admet les deux racines imaginaires conjuguées

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et ces racines, qui sont les deux racines cubiques imaginaires de l'unité (122), complètent les racines de l'équation proposée.

Théorème fondamental relatif aux racines fractionnaires.

1370. Soit l'équation, à coefficients entiers,

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Supposons qu'elle admette une racine fractionnaire qu'on pourra toujours représenter par une *fraction irréductible* $\frac{a}{b}$. Substituons cette valeur à la place de x. Nous aurons

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + A_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \ldots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0.$$

Ce résultat peut être écrit de deux manières différentes. On peut d'abord multiplier les deux membres de l'équation par b^{m-1}, et isoler ensuite le premier terme dans le premier membre. On peut également multiplier les deux membres de l'équation par b^m, les diviser par a, et isoler au contraire le

dernier terme dans le premier membre. On a ainsi les deux identités

$$(1)\qquad \frac{A_0 a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} b + \ldots + A_{m-1} a b^{m-2} + A_m b^{m-1}),$$

$$(2)\qquad \frac{A_m b^m}{a} = -(A_0 a^{m-1} + A_1 a^{m-2} b + A_2 a^{m-3} b^2 + \ldots + A_{m-1} b^{m-1}).$$

Les seconds membres de ces identités étant entiers, la relation (1) prouve que b, premier avec a^m (*Arithm.*), doit diviser exactement A_0; la relation (2) prouve que a, premier avec b^m, doit diviser exactement A_m.

On peut donc énoncer cette proposition : *Les numérateurs des racines fractionnaires d'une équation à coefficients entiers sont des diviseurs de son dernier terme* A_m; *les dénominateurs de ces racines fractionnaires sont des diviseurs du coefficient* A_0 *du premier terme de l'équation.*

1371. Cette proposition conduit immédiatement à une remarque importante.

Si le coefficient A_0 est égal à l'unité, les dénominateurs des racines fractionnaires sont eux-mêmes égaux à l'unité, c'est-à-dire que ces racines fractionnaires deviennent entières.

Ainsi, *toute équation à coefficients entiers, qui a l'unité pour coefficient de son premier terme, ne peut admettre, comme racines commensurables, que des racines entières.*

Détermination indirecte des racines fractionnaires.

1372. D'après la remarque précédente, *il est facile de ramener la recherche des racines fractionnaires à celle des racines entières* (1365 et suiv.).

Supposons, en effet, que l'équation

$$(1)\quad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

ait été débarrassée de ses racines entières et qu'elle ait d'autres racines commensurables fractionnaires. Il suffira de ramener le coefficient de son premier terme à l'unité, par la transformation connue (1106), pour n'avoir plus à chercher que les racines entières de la transformée, afin d'en déduire ensuite les racines fractionnaires de la proposée.

Multiplions les racines de l'équation (1) par la quantité indéterminée k. La nouvelle équation sera

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = A_0 x^m + k A_1 x^{m-1} + k^2 A_2 x^{m-2} + \ldots + K^{m-1} A_{m-1} x + K^m A_m = 0$$

ou, en divisant les deux membres de l'équation par A_0,

$$(2) \quad x^m + \frac{k A_1}{A_0} x^{m-1} + \frac{k^2 A_2}{A_0} x^{m-2} + \ldots + \frac{k^{m-1} A_{m-1}}{A_0} x + \frac{k^m A_m}{A_0} = 0.$$

Le coefficient du premier terme est ainsi ramené à l'unité; mais, pour que les autres coefficients de l'équation restent entiers, il faut qu'ils soient tous exactement divisibles par A_0. Pour que cette condition soit remplie, il suffit évidemment de prendre $k = A_0$. La transformée devient alors

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 A_0 x^{m-2} + A_3 A_0^2 x^{m-3} + \ldots \\ \qquad + A_{m-1} A_0^{m-2} x + A_m A_0^{m-1} = 0. \end{array} \right.$$

On cherchera ses racines entières et, en les divisant par A_0, on obtiendra les racines fractionnaires de l'équation donnée.

1373. On n'est pas obligé de débarrasser préalablement l'équation proposée de ses racines entières. On trouvera alors, par la marche indiquée, toutes ses racines commensurables, entières et fractionnaires.

En prenant $k = A_0$, l'opération réussit toujours, et ce choix est justifié d'avance; car, les dénominateurs des racines fractionnaires étant des diviseurs de A_0 (1370), on est certain, en multipliant par A_0 les racines de l'équation (1) [1372], que l'équation (3) n'aura plus que des racines commensurables entières.

Comme la plus grande racine fractionnaire de l'équation (1) a pour limite supérieure (1370) le dernier terme A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0, il est clair que la plus grande racine entière de l'équation transformée (3) a pour limite supérieure le produit de la limite précédente par A_0. Lorsqu'on cherchera les racines entières de l'équation (3), on pourra donc, s'il y a lieu, regarder ce produit (affecté d'un double signe) comme une limite supérieure et comme une limite inférieure des racines réelles entières de l'équation (3).

L'équation (2) [1372] montre qu'on peut, dans la pratique,

employer un multiplicateur k inférieur à A_0. On doit simplement prendre pour ce multiplicateur le plus petit nombre entier qui puisse rendre entiers tous les coefficients de cette équation (2).

Détermination directe des racines fractionnaires.

1374. *On peut éviter la formation de la transformée en* $A_0 x$ *ou en* kx *et appliquer directement à la détermination des racines fractionnaires la méthode de recherche des racines entières* (1365 et suiv.).

Soit l'équation à coefficients entiers

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Supposons que cette équation admette la racine fractionnaire $\frac{a}{b}$ (rendue irréductible), et divisons son premier membre par le binôme $x - \frac{a}{b}$. La division sera exacte et la loi de formation du quotient restera évidemment la même (1365). On aura donc pour les coefficients du quotient à partir du second (le premier étant A_0)

$$B_1 = A_0 \frac{a}{b} + A_1, \qquad B_2 = B_1 \frac{a}{b} + A_2, \qquad B_3 = B_2 \frac{a}{b} + A_3, \quad \ldots.$$

On voit par là que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, *ils ne peuvent contenir en dénominateur que des facteurs premiers de* b.

Mais, puisque la division est exacte, on peut ordonner le dividende et le diviseur en sens inverse, c'est-à-dire suivant les puissances croissantes de x : *le quotient restera le même*, et l'ordre de ses termes sera seulement renversé (224). La division se présente alors de cette manière :

$$\begin{array}{l|l}
A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \ldots + A_1 x^{m-1} + A_0 x^m & -\frac{a}{b} + x \\
\hline
+\left(A_m \frac{b}{a} + A_{m-1}\right)x & -A_m \frac{b}{a} \\
+\left(A_m \frac{b^2}{a^2} + A_{m-1}\frac{b}{a} + A_{m-2}\right)x^2. & -\left(A_m \frac{b^2}{a^2} + A_{m-1}\frac{b}{a}\right)x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\left(A_m \frac{b^3}{a^3} + A_{m-1}\frac{b^2}{a^2} + A_{m-2}\frac{b}{a}\right) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Il résulte de cette seconde division que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, *ils ne peuvent contenir en dénominateur que des facteurs premiers de a*. Comme a et b sont premiers entre eux et que le quotient reste identique à lui-même, la double condition trouvée montre que les coefficients du quotient ne peuvent contenir que l'unité en dénominateur, *c'est-à-dire qu'ils sont entiers*.

Toutes les relations trouvées dans le cas des racines entières (1365) se reproduisant *sous forme entière* dans le cas des racines fractionnaires, on peut essayer les racines fractionnaires en suivant absolument la même marche que pour les racines entières (1368). Pour limiter le nombre des essais, on s'aidera du théorème fondamental du n° 1370.

Exemple.

1375. *L'équation*

$$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0 \tag{1}$$

n'a pas de racines entières, et nous nous proposons de déterminer ses racines fractionnaires.

Première méthode. — En appliquant la première méthode (1372), nous aurons d'abord à considérer la transformée générale

$$x^4 - \frac{7k}{6}x^3 + \frac{8k^2}{6}x^2 - \frac{7k^3}{6}x + \frac{2k^4}{6} = 0.$$

Pour rendre tous les coefficients entiers, on ne peut pas donner à k une valeur plus simple que 6. On a donc, *en faisant* $k = 6$, c'est-à-dire en multipliant par 6 les racines de la proposée,

$$x^4 - 7x^3 + 48x^2 - 252x + 432 = 0. \tag{2}$$

Comme cette équation est complète et que ses termes sont alternativement positifs et négatifs, elle n'a pas de racines négatives (1361).

De plus, l'équation (1) pouvant se mettre sous la forme

$$x^3(6x - 7) + x(8x - 7) + 2 = 0,$$

on voit que 2 est une limite supérieure de ses racines positives. En prenant la transformée en $\frac{1}{x}$ de la même équation, on trouve (1113)

$$2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 6 = 0,$$

et cette équation peut se mettre sous la forme

$$x^3(2x - 7) + x(8x - 7) + 6 = 0.$$

4 est donc une limite supérieure de ses racines positives, et l'on peut alors regarder $\frac{1}{4}$ comme une limite inférieure des racines positives de l'équation (1).

Comme l'équation (2) a pour racines celles de l'équation (1) multipliées par 6, on peut dire que 2×6 ou 12 est une limite supérieure des racines positives de l'équation (2), et que $\frac{1}{4} \times 6$ ou $\frac{3}{2}$ est une limite inférieure des racines positives de la même équation. Par conséquent, pour trouver les racines entières de l'équation (2), nous ne devons essayer que les diviseurs positifs de 432 compris entre $\frac{3}{2}$ et 12, c'est-à-dire

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 3, \quad 9, \quad 6.$$

D'ailleurs, en substituant 1 et -1 à la place de x dans l'équation (2), on obtient les nombres 222 et 740 ; et, en appliquant le théorème du n° 1367, on reconnaît que 4 et 3 peuvent seuls être racines. Dès lors, le Tableau ci-dessous résume les opérations nécessaires suivant la règle du n° 1368.

1	-7	$+48$	-252	$+432$	4 est racine.
	$+1$	-3	$+36$	-108	4 n'est plus racine.
			»	$+27$	
	$+1$	-3	$+36$	-108	3 est racine.
		$+1$	0	$+36$	3 n'est plus racine.
			-4	-12	

L'équation (2) admet donc les racines entières 3 et 4 et, débarrassée de ces racines, elle devient l'équation du second degré

$$x^2 + 36 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x = \pm\sqrt{-36} = \pm 6i.$$

Pour avoir les racines de l'équation (1), il faut diviser par 6 celles de l'équation (2), de sorte que l'équation (1) a pour racines

$$\frac{3}{6} \text{ ou } \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{6} \text{ ou } \frac{2}{3}, \quad \pm i,$$

et qu'elle est complètement résolue.

SECONDE MÉTHODE. — Reprenons l'équation (1)

$$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0,$$

et appliquons-lui la seconde méthode (1374).

Les dénominateurs des racines fractionnaires ne peuvent être (1370)

que des diviseurs de A_0, c'est-à-dire ici 2 et 3 ; les numérateurs ne peuvent être que des diviseurs de A_m, c'est-à-dire ici 1 et 2. On n'a donc à essayer, comme racines fractionnaires, que les combinaisons

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3},$$

en opérant absolument comme pour l'essai des racines entières. On forme ainsi le Tableau ci-dessous :

6	−7	+8	−7	+2	$\frac{1}{2}$ est racine.
	+6	−4	+6	−4	$\frac{1}{2}$ n'est plus racine.
		+16	+4	+8	
	+6	−4	+6	−4	$\frac{1}{3}$ n'est pas racine.
		−66	+18	+12	
	+6	−4	+6	−4	$\frac{2}{3}$ est racine.
		−6	0	+6	

On retombe donc, comme cela doit être, sur les racines données par la première méthode, et l'avantage reste de beaucoup, au moins dans l'exemple traité, à la seconde méthode.

La méthode des racines égales ne doit être appliquée aux équations à coefficients commensurables qu'au delà du cinquième degré

1376. Nous avons montré (1138) comment le premier membre d'une équation $\varphi(z) = 0$ admettant des racines égales peut être remplacé par un produit, tel que $z_1 z_2^2 z_3^3 \ldots$, le polynôme z_1 répondant aux facteurs simples, le polynôme z_2 aux facteurs doubles pris seulement une fois, le polynôme z_3 aux facteurs triples pris seulement une fois, ... La résolution de l'équation donnée est alors ramenée à celle des équations de degrés moindres,

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad z_3 = 0, \qquad \ldots$$

Si l'équation $\varphi(z) = 0$ a ses coefficients commensurables, il en est de même des équations subordonnées, puisque les polynômes $z_1, z_2, z_3, \ldots$ s'obtiennent seulement par voie de division.

Il en résulte, comme nous l'avons déjà remarqué (1140), que, *lorsque l'équation* $\varphi(z) = 0$ *n'a qu'une seule racine d'un certain ordre de multiplicité, cette racine est nécessairement commensurable,* puisqu'elle est alors fournie par une équation du premier degré à coefficients commensurables.

1377. Cela posé, considérons successivement les différents degrés.

Au point de vue des racines égales :

L'équation du second degré peut avoir une racine double, et son premier membre est alors un carré parfait.

L'équation du troisième degré peut avoir une racine double et une racine simple, *ou* une racine triple.

L'équation du quatrième degré peut avoir une racine double et deux racines simples, *ou* deux racines doubles (mais alors son premier membre est un carré parfait, et elle s'abaisse au second degré), *ou* une racine triple et une racine simple, *ou* une racine quadruple.

L'équation du cinquième degré peut avoir une racine double et trois racines simples, *ou* deux racines doubles et une racine simple, *ou* une racine triple et deux racines simples, *ou* une racine triple et une racine double, *ou* une racine quadruple et une racine simple, *ou* une racine quintuple.

Dans tous les cas examinés, *sauf un seul*, on voit que l'équation considérée, si elle a des racines égales, a nécessairement une seule racine d'un certain ordre de multiplicité, et cette racine est alors commensurable (1376).

Il n'en est plus de même lorsqu'on s'élève au sixième degré. Une équation du sixième degré qui a des racines égales peut avoir, entre autres, deux racines doubles et deux racines simples, *ou* deux racines triples. Ces racines seront alors données par des équations du second degré et pourront être incommensurables.

En résumé, *jusqu'au cinquième degré inclusivement, toute équation à coefficients commensurables qui a des racines égales a nécessairement des racines commensurables* (sauf le

cas où l'équation est du quatrième degré et a pour premier membre un carré parfait).

Il est donc inutile d'appliquer à une pareille équation le mode de décomposition ou d'abaissement, toujours pénible, fourni par la théorie des racines égales; et il y a tout avantage à procéder immédiatement à la recherche des racines commensurables, qui existent d'une manière certaine précisément dans le cas des racines égales, et dont le calcul conduit alors à la résolution complète de l'équation.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES. — MÉTHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES.

Indications générales.

1378. Pour résoudre complètement une équation algébrique, on commence par la ramener à la forme ordinaire

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

où $f(x)$ est un polynôme entier à coefficients réels, commensurables ou incommensurables.

Lorsque le degré de l'équation surpasse *cinq* (1377), il peut être utile de lui appliquer d'abord la théorie des racines égales (1138). Si l'équation donnée a de pareilles racines, on ramène ainsi sa résolution à celle d'équations de degrés plus simples et qui n'ont que des racines inégales.

En opérant sur chacune de ces équations, d'après la règle connue (1368), ou sur l'équation (1) elle-même quand elle n'a pas de racines égales, on détermine alors les racines commensurables qu'elle peut admettre, et l'on débarrasse, par division, $f(x)$ des facteurs correspondants.

Il ne reste plus ensuite qu'à chercher les racines incommensurables et les racines imaginaires de l'équation simplifiée. Nous ne nous occuperons ici que des premières.

1379. Pour calculer les *racines incommensurables* d'une équation ramenée préalablement, comme on vient de le dire, à la forme la plus simple possible, on fixe (Chap. VI) une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles de cette équation. On effectue ensuite la séparation des racines incommensurables comprises entre ces limites, soit en

appliquant la *Méthode de* LAGRANGE (1306), soit, ce qui est habituellement bien préférable, à l'aide du *théorème de* STURM.

Les calculs exigés par l'application de ces deux méthodes certaines de séparation étant le plus souvent très pénibles, on s'efforce de les éviter ou de les alléger dans la pratique. Pour cela, on substitue directement, dans le premier membre de l'équation considérée et entre les limites des racines réelles, des nombres équidistants. En examinant les variations de signes que peuvent présenter les résultats des substitutions (1071), en s'aidant du *théorème de* DESCARTES (1255 et suiv.) et du *théorème de* ROLLE (1275 et suiv.), c'est-à-dire de l'étude de l'équation dérivée, on parvient souvent à effectuer complètement la séparation des racines incommensurables. Si cette séparation demeure incomplète, on fait, en dernière analyse, intervenir le théorème de Sturm, qui résout toujours la question.

Une fois les racines incommensurables séparées, de nouvelles substitutions *intermédiaires* permettent d'en approcher davantage. Pour abréger le nombre de ces substitutions, on peut avoir recours à la *règle des parties proportionnelles* (912), qui constitue dans ce cas une méthode spéciale d'approximation.

Pour préciser ces indications, nous allons parcourir quelques exemples choisis. Nous exposerons ensuite la méthode des parties proportionnelles.

Première recherche des racines incommensurables, exemples choisis.

1380. **I.** *Soit l'équation*

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0,$$

à laquelle Lagrange a appliqué sa méthode dans son *Traité de la résolution des équations numériques* (Chap. IV), et qui n'a aucune racine commensurable.

On a ici

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Par conséquent, l'équation proposée a ses trois racines réelles (1286). En consultant le théorème de Descartes (1255, 1256), on voit que, son premier membre présentant deux

variations et le premier membre de sa transformée en $-x$ n'en présentant qu'une seule, elle a nécessairement deux racines positives et une racine négative. Il s'agit maintenant de séparer ces racines.

L'équation donnée et sa transformée en $-x$ pouvant s'écrire

$$f(x) = x(x^2 - 7) + 7 = 0,$$

$$f(-x) = x(x^2 - 9) + (2x - 7) = 0,$$

les nombres -4 et $+3$ représentent des limites des racines réelles de la proposée.

En substituant dans $f(x)$, à la place de x, les nombres entiers consécutifs compris entre ces limites et ces limites elles-mêmes, on forme le Tableau suivant des valeurs correspondantes de x et de $f(x)$:

x	$f(x)$	
-4	-29	
-3	$+1$	
-2	$+13$	
-1	$+13$	
0	$+7$	
$+1$	$+1$	
$+1,5$		$-0,125$
$+2$	$+1$	
$+3$	$+13$	

D'après le seul changement de signe de la fonction, la racine négative de l'équation $f(x) = 0$ est comprise entre -4 et -3 (1071). Quant aux deux racines positives, l'absence d'un autre changement de signe montre qu'elles tombent toutes deux entre deux entiers positifs consécutifs (1071).

On peut s'aider alors du théorème de Rolle (1275). Puisque la racine positive de l'équation dérivée

$$f'(x) = 3x^2 - 7 = 0$$

est

$$x = +\sqrt{\frac{7}{3}},$$

c'est-à-dire comprise entre 1 et 2, et qu'elle doit aussi être

renfermée entre les deux racines positives de la proposée, c'est entre ces mêmes substitutions 1 et 2 que ces racines positives doivent se trouver.

On essaye alors dans $f(x)$ la substitution intermédiaire $x = 1,5$, et l'on obtient pour résultat $f(x) = -0,125$. Comme il y a changement de signe, l'une des racines positives est entre 1 et 1,5 et, l'autre, entre 1,5 et 2.

Les trois racines réelles de l'équation sont donc séparées. Pour approcher davantage de chacune d'elles, il faut faire de nouvelles substitutions intermédiaires ou avoir recours à la méthode des parties proportionnelles.

Par exemple, pour les racines positives comprises entre 1 et 2, on est naturellement conduit à essayer des substitutions intermédiaires variant d'un dixième. On forme ainsi ce second Tableau :

x	$f(x)$
+1	+1
+1,1	+0,631
+1,2	+0,328
+1,3	+0,097
+1,4	−0,056
+1,5	−0,125
+1,6	−0,104
+1,7	+0,013

D'après les changements de signe qui apparaissent, la première racine tombe entre 1,3 et 1,4 ou est égale à 1,3 à 0,1 près par défaut; et la seconde racine tombe entre 1,6 et 1,7 ou est égale à 1,6 à 0,1 près par défaut.

Quant à la racine négative comprise entre -4 et -3, on prendra la transformée en $-x$ de l'équation

$$f(-x) = x^3 - 7x - 7 = 0,$$

et l'on cherchera à approcher, aussi à 0,1 près, de sa racine positive comprise entre 3 et 4. En substituant, à la place de x, les nombres 3 et 3,1, on trouve pour $f(-x)$ les deux valeurs de signes contraires -1 et $+1,091$. La racine positive de la transformée en $-x$ tombant entre 3 et 3,1, la racine négative de la proposée tombe entre $-3,1$ et -3. Elle est donc égale à $-3,1$ à 0,1 près par défaut.

1381. II. *Soit l'équation*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 4 = 0.$$

Elle présente deux variations : elle a donc deux racines positives ou elle n'en a aucune.

La transformée en $-x$,

$$f(-x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 4 = 0,$$

présentant une seule variation, l'équation proposée admet une racine négative et une seule.

En mettant les deux équations sous la forme

$$f(x) = x(x^2 - 13) + (2x^2 + 4) = 0,$$
$$f(-x) = x(x^2 - 2x - 14) + (x - 4) = 0,$$

on constate que 4 est une limite supérieure des racines positives de la proposée et, -5, une limite inférieure de ses racines négatives. En substituant à la place de x dans $f(x)$ les nombres entiers compris entre ces limites, on forme le Tableau suivant :

x	$f(x)$
-5	-6
-4	$+24$
....	....
0	$+4$
$+1$	-6
$+2$	-6
$+3$	$+10$
....	....

Il faut toujours avoir soin de laisser de côté les substitutions inutiles. Ainsi, ayant obtenu immédiatement l'unique racine négative entre -5 et -4, on n'a pas à substituer les autres nombres négatifs. Outre cette racine négative, on voit que l'équation proposée admet deux racines positives, l'une entre 0 et 1, l'autre entre 2 et 3. Elle a donc toutes ses racines réelles (ce dont on pourrait s'assurer d'avance par la formule du n° 1288), elles sont séparées, et il ne reste plus qu'à en approcher davantage à l'aide de substitutions intermédiaires ou autrement.

1382. III. — *Soit l'équation*

$$f(x) = 20x^3 - 17x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Son premier membre présente trois variations : elle admet donc trois racines positives ou une seule (1255), mais elle ne peut avoir aucune racine négative (1361). En la mettant sous la forme

$$x^2(20x - 17) + 2(2x - 1) = 0,$$

on voit que 1 est une limite supérieure de ses racines positives. On a alors

x	$f(x)$
0	-2
$+1$	$+5$

et la question est de savoir s'il y a dans cet intervalle une ou trois racines positives. Or l'équation dérivée

$$f'(x) = 60x^2 - 34x + 4 = 0$$

donne, après qu'on a divisé son premier membre par 2,

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{60} = \frac{17 \pm 7}{60}.$$

Les deux racines positives de l'équation dérivée, qui se réduisent à $\frac{1}{6}$ et $\frac{2}{3}$, sont donc comprises dans le même intervalle $(0, +1)$. Il en résulte immédiatement (1275) que, si l'équation proposée a trois racines positives, une de ces racines tombe nécessairement entre 0 et $\frac{1}{6}$. Comme la substitution 0 conduit à un résultat négatif, il faudrait alors (1071) obtenir un résultat positif pour $x = \frac{1}{6}$. On trouve, au contraire, $f(\frac{1}{6}) = -\frac{1850}{2176}$. L'équation $f(x) = 0$ a donc une seule racine réelle positive comprise entre 0 et 1, et l'on en approchera davantage sans difficulté.

1383. IV. — *Soit l'équation*

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x + 7 = 0,$$

dont la transformée en $-x$ est

$$f(-x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x + 7 = 0.$$

La proposée présente deux variations, et il en est de même de la transformée en $-x$. L'équation donnée peut donc avoir (1255, 1257) quatre racines réelles, deux racines réelles et deux racines imaginaires, ou quatre racines imaginaires.

En mettant les deux équations sous la forme

$$f(x) = x^2(x^2 - 3x - 5) + (9x + 7) = 0,$$
$$f(-x) = x^4 + x(3x^2 - 5x - 9) + 7 = 0,$$

on voit que 5 est une limite supérieure des racines positives de la première, et 3 une limite supérieure des racines positives de la seconde. Les racines réelles de la proposée, si elle en a, sont donc comprises entre -3 et $+5$. En substituant dans $f(x)$ les nombres entiers compris entre ces deux limites, on forme le Tableau ci-après :

x	$f(x)$
-3	-97
2	$+9$
-1	-3
0	$+7$
$+1$	$+9$
$+2$	-3
$+3$	-11
$+4$	$+27$

L'équation considérée a donc deux racines négatives comprises respectivement entre -2 et -1 et entre -1 et 0, et deux racines positives comprises respectivement entre 1 et 2 et entre 3 et 4. Si l'on veut approcher davantage de la première racine positive, on forme ce second Tableau, en passant aux dixièmes,

x	$f(x)$
$+1$	$+9$
$+1,7$	$+1,4631$
$+1,8$	$+0,0016$
$+1,9$	$-1,4949$
$+2$	-3

La racine cherchée tombe donc entre 1,8 et 1,9; mais, beaucoup plus près de 1,8, qui est sa valeur à 0,1 près par défaut.

1384. V. — *Soit l'équation*

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 6x - 7 = 0,$$

dont la transformée en $-x$ est

$$f(-x) = x^5 - 5x^3 - 4x^2 - 6x + 7 = 0.$$

$f(x)$ présente trois variations et $f(-x)$ en présente deux; l'équation donnée peut donc avoir (1255, 1257) trois racines positives ou une seule, et deux racines négatives ou aucune.

On peut écrire, en groupant les termes,

$$f(x) = x^3(x^2 - 5) + (4x^2 - 6x - 7) = 0,$$
$$f(-x) = x^2(x^3 - 5x - 6) + x(2x - 6) + 7 = 0,$$

et le nombre 3 est, pour chacune des deux équations, une limite supérieure des racines positives. Par conséquent, les racines réelles de la proposée sont comprises entre -3 et $+3$. En substituant dans $f(x)$ les nombres entiers renfermés entre ces deux limites, on trouve

x	$f(x)$
-3	-61
-2	$+29$
-1	-7
0	-7
$+1$	-13
$+2$	-11
$+3$	$+119$

Ces substitutions séparent les deux racines négatives entre -3 et -2 et entre -1 et 0; mais, quant aux racines positives, il n'apparaît qu'un seul changement de signe de 2 à 3.

Trois cas sont alors possibles. Si l'équation admet trois racines positives, il peut y en avoir trois entre 2 et 3, ou bien une seule entre 2 et 3, en même temps que deux autres entre 0 et 1 ou entre 1 et 2, qui donnent des résultats de même signe (1071). Si l'équation admet une seule racine positive, elle est nécessairement entre 2 et 3.

Consultons l'équation dérivée

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 8x - 6 = 0.$$

En la mettant sous la forme

$$f'(x) = 5x^2(x^2 - 3) + 2(4x - 3) = 0,$$

on voit que 2 est une limite supérieure de ses racines positives. Il en résulte que la proposée ne peut pas avoir trois racines positives entre 2 et 3, sans quoi (1275) l'équation dérivée admettrait deux racines positives entre ces mêmes limites, c'est-à-dire au delà de 2. Pour décider maintenant si l'équation proposée a deux racines positives entre 0 et 1 ou entre 1 et 2, il faut lui appliquer le théorème de Sturm (1309) et compter les variations de la suite correspondante pour les trois substitutions 0, 1, 2.

Le quatrième polynôme X_3 ne pouvant changer de signe tant qu'on donne à x une valeur positive, on peut s'arrêter à ce polynôme (1311) et former le Tableau ci-dessous :

	0	1	2
$X = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 6x - 7 \ldots\ldots$	$-$	$-$	$-$
$X_1 = 5x^4 - 15x^2 + 8x - 6 \ldots\ldots$	$-$	$-$	$+$
$X_2 = 10x^3 - 12x^2 + 24x + 35 \ldots\ldots$	$+$	$+$	$+$
$X_3 = 198x^2 + 239x + 270 \ldots\ldots$	$+$	$+$	$+$

Le nombre des variations restant le même pour chaque substitution, l'équation proposée n'admet aucune racine positive entre 0 et 2. Par suite, elle a finalement deux racines négatives entre -3 et -2 et entre -1 et 0; une racine positive entre 2 et 3; et deux racines imaginaires conjuguées. Les racines réelles sont donc complètement séparées, et il restera à en approcher davantage.

Méthode des parties proportionnelles.

1385. Pour approcher plus rapidement des racines réelles séparées, on peut d'abord employer la méthode des parties proportionnelles.

Supposons que l'on construise la courbe représentative, $y = f(x)$, de l'équation algébrique considérée $f(x) = 0$, par rapport aux axes rectangulaires Ox et Oy, comme on l'a indiqué précédemment (1074). Examinons cette courbe dans l'intervalle de deux substitutions consécutives *comprenant une racine réelle et une seule* de l'équation donnée.

Les deux substitutions faites à la place de x étant (*fig.* 67) $p = OP$ et $q = OQ$, les valeurs correspondantes de la fonction, nécessairement de signes contraires (1071), $f(p)$ et $f(q)$, seront représentées par les ordonnées PA et QB.

On admet d'ailleurs que les deux nombres p et q sont *assez rapprochés*, pour que les deux équations dérivées $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$ n'aient aucune racine réelle entre p et q. Alors, x variant d'une substitution à l'autre, $f'(x)$ et $f''(x)$ *ne changeront pas de signe* (1071). La valeur de $f(x)$ sera donc, dans l'intervalle dont il s'agit, constamment croissante ou décroissante (1151). Il en sera de même de la valeur de $f'(x)$, qui est la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe Ox par la tangente en chaque point de la courbe représentative AB (748).

Par suite, dans les conditions posées, l'ordonnée de la courbe AB va constamment en augmentant ou en diminuant du point A au point B; et, entre ces deux points, la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe Ox par la tangente en chaque point de la courbe, allant aussi constamment en augmentant ou en diminuant, la courbe AB elle-même tourne toujours sa convexité dans un même sens.

Il n'y a, d'après cela, pour la courbe AB, que quatre dispositions possibles, représentées par les *fig.* 26, 27, 28, 29, où nous conservons les mêmes notations.

Les différentes fonctions sont liées dans ces quatre figures de la manière suivante.

Fig. 26 : $f(x)$ décroît, en passant du positif au négatif. La valeur négative de $f'(x)$ croît en tendant vers zéro; par suite, la valeur de $f''(x)$ est constamment positive.

Fig. 27 : $f(x)$ décroît en passant du positif au négatif. La valeur négative de $f'(x)$ décroît en tendant vers $-\infty$; par suite, la valeur de $f''(x)$ est constamment négative.

Fig. 28 : $f(x)$ croît en passant du négatif au positif. La valeur positive de $f'(x)$ croît en tendant vers $+\infty$; par suite, la valeur de $f''(x)$ est constamment positive.

Fig. 29 : $f(x)$ croît en passant du négatif au positif. La valeur positive de $f'(x)$ décroît en tendant vers zéro; par suite, la valeur de $f''(x)$ est constamment négative.

Voyons maintenant en quoi consiste la méthode des parties proportionnelles.

Puisqu'il y a une racine réelle et une seule de l'équation

$f(x) = 0$ entre $OP = p$ et $OQ = q$, la courbe représentative AB coupe nécessairement l'axe Ox une seule fois entre les points P et Q. Si l'on désigne par R ce point d'intersection, la valeur exacte de la racine comprise entre p et q est représentée par OR.

Fig. 26.

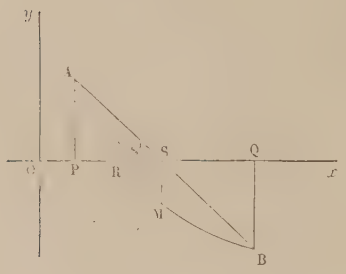


Fig. 27.

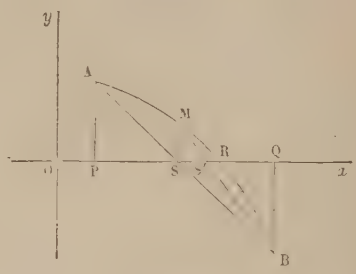


Fig. 28.

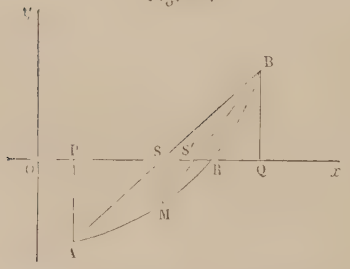
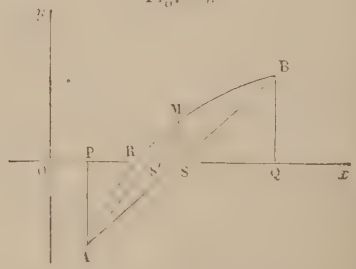


Fig. 29.



Menons alors la corde AB qui coupe à son tour l'axe Ox au point S. Si la courbe AB se confondait avec sa corde, c'est OS qui représenterait la racine comprise entre p et q. La méthode des parties proportionnelles revient à remplacer la valeur exacte OR de la racine en question par la valeur approchée OS, facile à calculer à l'aide des données.

En effet, les notations restant les mêmes sur les quatre figures ci-dessus, on a, en vertu des triangles semblables PAS, QBS, et *en valeur absolue*,

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PA}{QB}.$$

On en déduit successivement, en remarquant que

$$PS + SQ = PQ = q - p,$$

et en prenant les deux résultats $f(p)$ et $f(q)$ *en valeur absolue,*

$$\frac{PS}{PS+SQ}=\frac{PA}{PA+QB} \quad \text{ou} \quad PS=(q-p)\frac{f(p)}{f(p)+f(q)},$$

$$\frac{SQ}{PS+SQ}=\frac{QB}{PA+QB} \quad \text{ou} \quad SQ=(q-p)\frac{f(q)}{f(p)+f(q)}.$$

On obtiendra donc la valeur approchée OS de la racine OR, *en ajoutant à la plus petite substitution p* la quantité

$$(q-p)\frac{f(p)}{f(p)+f(q)}$$

ou *en retranchant de la plus grande substitution q* la quantité

$$(q-p)\frac{f(q)}{f(p)+f(q)}.$$

1386. La valeur OS est approchée *par excès* dans le cas des *fig.* 26 et 29; elle est approchée *par défaut* dans le cas des *fig.* 27 et 28.

En se reportant à ce qui précède (1385), on peut donc poser cette règle :

La valeur donnée par la méthode des parties proportionnelles est approchée par excès, lorsque $f(x)$ *et* $f''(x)$ *sont de même signe pour la première substitution* $x=p$ (et, par conséquent, de signes contraires pour la seconde substitution $x=q$); inversement, *cette valeur est approchée par défaut, lorsque* $f(x)$ *et* $f''(x)$ *sont de signes contraires pour la première substitution* $x=p$ (et, par conséquent, de même signe pour la seconde substitution $x=q$).

1387. On peut évidemment, en calculant, à l'aide de $f(x)$, l'ordonnée SM qui répond à la première valeur approchée OS, reproduire de nouveau le calcul qu'on vient d'indiquer, et approcher davantage de la racine OR. Seulement, pour opérer avec certitude, *il faut que l'approximation ait toujours lieu dans le même sens,* et une précaution est alors nécessaire.

Si la première valeur OS est approchée *par excès* (*fig.* 26 et 29), on doit mener la corde AM, dont le point d'intersection S′ avec l'axe Ox est entre R et S, et considérer *la portion de courbe* AM. L'abscisse OS étant représentée par s et

l'ordonnée SM étant $f(s)$, on obtient la seconde valeur approchée de la racine OR, en ajoutant (1385) à la première substitution p la quantité

$$(s-p)\frac{f(p)}{f(p)+f(s)},$$

où $f(s)$ doit être pris en valeur absolue. Cette seconde valeur approchée OS′ est toujours par excès, mais plus resserrée.

Si la première valeur OS est, au contraire, approchée *par défaut* (*fig.* 27 et 28), on doit, pour la même raison, mener la corde BM, et considérer *la portion de courbe* MB. Il faut alors ajouter à la première substitution s la quantité

$$(q-s)\frac{f(s)}{f(s)+f(q)},$$

et l'on obtient ainsi une seconde valeur approchée OS′ de la racine OR, toujours par défaut, mais plus resserrée $f(s)$ doit être pris en valeur absolue.

Application.

1388. Appliquons ces considérations si simples à l'exemple traité au n° 1380.

D'après les premiers calculs, l'équation

$$f(x)=x^3-7x+7=0$$

a sa plus petite racine positive comprise entre $1,3=p$ et $1,4=q$. On a trouvé en même temps

$$f(p)=f(1,3)=+0,097,$$
$$f(q)=f(1,4)=-0,056.$$

En ne considérant que les valeurs absolues, on aura une première valeur approchée de la racine, d'après la règle des parties proportionnelles (1385), en augmentant $1,3=p$ de la quantité

$$(q-p)\frac{f(p)}{f(p)+f(q)}=0,1\,\frac{0,097}{0,097+0,056}=0,063\ldots.$$

On peut donc prendre pour cette première valeur approchée

$$s=1,36.$$

Pour reconnaître si elle est approchée par défaut ou par excès, on n'a (1386) qu'à comparer le signe de $f''(x) = 6x$ à celui de $f(x)$, pour la même substitution $x = 1,3 = p$. Ce signe étant le même, la valeur exacte de s est approchée par excès, ainsi que sa valeur 1,36 à un centième près; car on trouve

$$f(1,36) = -0,004544.$$

Pour obtenir une seconde valeur plus resserrée, il suffit (1387) d'ajouter encore à la plus petite substitution $p = 1,3$ la quantité

$$(s-p)\frac{f(p)}{f(p)+f(s)} = 0,06\frac{0,097}{0,097+0,004544} = 0,057\ldots.$$

On a donc, comme nouvelle valeur approchée de la racine cherchée, toujours par excès,

$$s' = 1,357.$$

Comme on trouve

$$f(1,356) = +0,001326016,$$
$$f(1,357) = -0,000153707,$$

la racine qu'on veut calculer tombe entre 1,356 et 1,357, mais beaucoup plus près de cette dernière valeur. On la connaît donc à 0,001 près par défaut ou par excès.

CHAPITRE IX.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES. — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON ET DE FOURIER.

Méthode d'approximation de Newton.

1389. Quand on a déterminé deux nombres comprenant une racine réelle et une seule d'une équation donnée, on peut en approcher davantage par de nouvelles substitutions ou en employant la méthode des parties proportionnelles, comme on vient de le voir. Mais les calculs deviennent plus pénibles à mesure que la racine cherchée doit être obtenue avec un plus grand nombre de chiffres décimaux. Aussi, dès qu'on a trouvé les deux ou trois premiers chiffres exacts de cette racine par les procédés indiqués, convient-il d'avoir recours à d'autres méthodes, dont le caractère principal est d'accroître rapidement l'approximation atteinte. Parmi ces méthodes, celle qui semble préférable est celle de Newton, améliorée par Fourier, et nous allons l'exposer d'abord en nous écartant peu de la marche suivie par Newton [1].

1390. Soit l'équation donnée

$$f(x) = 0.$$

Supposons qu'elle admette une racine réelle et une seule entre deux nombres donnés p et $q > p$, et que $p + h$ représente la valeur exacte de cette racine. On aura alors

$$f(p + h) = 0.$$

Développons le premier membre de cette relation par la for-

[1] *Méthode des fluxions.*

mule de Taylor, réduite à ses trois premiers termes (888). Nous aurons

$$f(p+h)=f(p)+\frac{h}{1}f'(p)+\frac{h^2}{1.2}f''(p+\theta h)=0,$$

θ étant un nombre positif compris entre 0 et 1. On en déduit

$$(1)\qquad h=-\frac{f(p)}{f'(p)}-\frac{h^2}{2}\frac{f''(p+\theta h)}{f'(p)}.$$

Au lieu de représenter par $p+h$ la valeur exacte de la racine comprise entre p et q, *en partant de sa valeur par défaut*, on peut représenter cette valeur exacte par $q-k$, *en partant de la valeur de la racine approchée par excès*. On a alors

$$f(q-k)=0$$

ou, d'après la formule de Taylor (887),

$$f(q-k)=f(q)-\frac{k}{1}f'(q)+\frac{k^2}{1.2}f''(q-\theta' k)=0,$$

en désignant par θ' un autre nombre positif toujours compris entre 0 et 1. On en déduit

$$(2)\qquad k=\frac{f(q)}{f'(q)}+\frac{k^2}{2}\frac{f''(q-\theta' k)}{f'(q)}.$$

Les formules (1) et (2) ne font pas connaître directement h et k, puisque ces quantités restent engagées respectivement dans les seconds membres de ces formules. Mais, si les quantités h et k (nécessairement inférieures à $q-p$) sont suffisamment petites, on peut négliger les termes où entrent leurs carrés, et adopter les valeurs approchées

$$(1\,bis)\qquad h=-\frac{f(p)}{f'(p)},$$

$$(2\,bis)\qquad k=\frac{f(q)}{f'(q)}.$$

La première valeur approchée, p ou q, de la racine cherchée sera ainsi remplacée par une seconde valeur approchée

$$(\alpha)\qquad p-\frac{f(p)}{f'(p)}$$

ou

$$(\beta)\qquad q-\frac{f(q)}{f'(q)}.$$

A l'aide de la seconde valeur approchée et en opérant de même, on en obtiendra une troisième; à l'aide de la troisième, une quatrième; et ainsi de suite.

Telle est la méthode indiquée succinctement par Newton. Elle donne, en général, une approximation rapide. Mais elle peut se trouver en défaut, et tout dépend de la véritable valeur des termes négligés.

Si l'on se bornait à ces premières notions, il faudrait donc examiner dans chaque cas les résultats trouvés, afin de ne pas courir le risque de s'éloigner de la valeur exacte de la racine cherchée au lieu de s'en rapprocher, et la rapidité de la méthode deviendrait illusoire.

Il est par suite indispensable de découvrir des caractères qui permettent de l'employer toujours avec certitude, et c'est là le but du complément apporté par Fourier [1] à la règle donnée par Newton. Nous présenterons ce complément de la manière suivante.

Perfectionnement de Fourier.

1391. Pour qu'on soit sûr d'approcher davantage de la racine cherchée, comprise entre p et q, à l'aide du terme de correction $\left[-\frac{f(p)}{f'(p)}\right]$ applicable à p, ou du terme de correction $\left[\frac{f(q)}{f'(q)}\right]$ applicable à q, deux conditions doivent être remplies.

Il faut d'abord que ces termes soient positifs. Alors, la nouvelle valeur approchée (α) (1390)

$$p - \frac{f(p)}{f'(p)}$$

sera supérieure à p; et la nouvelle valeur approchée (β) (1390)

$$q - \frac{f(q)}{f'(q)}$$

sera inférieure à q.

Il faut ensuite, en se reportant aux formules (1) et (2)

[1] *Analyse des équations.*

(1390), *que les quantités négligées dans chaque hypothèse soient elles-mêmes positives.* S'il en est ainsi, les nouvelles valeurs approchées resteront respectivement comprises entre les premières valeurs approchées et les valeurs exactes, puisqu'on n'ajoutera pas assez à p pour avoir $p+h$ et qu'on ne retranchera pas assez à q pour avoir $q-k$.

De cette manière, les nouvelles valeurs approcheront davantage de la valeur exacte, le sens de l'approximation étant conservé. En poursuivant l'opération et les mêmes conditions étant toujours satisfaites, les valeurs par défaut formeront une série convergente croissante, les valeurs par excès une série convergente décroissante, et la valeur exacte de la racine sera la limite commune des deux séries.

Cela posé, il reste à examiner dans quels cas les deux conditions énoncées sont sûrement remplies à la fois.

Admettons que l'équation donnée $f(x)=0$ n'ait pas de racines égales. D'après la théorie des racines égales (1135), les équations $f'(x)=0$ et $f''(x)=0$ n'auront aucune racine réelle dans l'intervalle (p, q) qu'on considère, *si les limites p et q sont assez resserrées.* Et c'est ce que nous supposerons. Dans cet intervalle (p, q), les deux dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ ne pourront donc pas changer de signe, $f(x)$ ne passera par aucun maximum ou minimum, et $f'(x)$ variera également toujours dans le même sens (936).

La première condition imposée se trouve alors nécessairement remplie, et les quotients

$$-\frac{f(p)}{f'(p)}, \quad \frac{f(q)}{f'(q)},$$

sont tous deux positifs.

En effet, l'équation $f(x)=0$ ayant une racine réelle et une seule entre p et q, $f(p)$ et $f(q)$ sont toujours de signes contraires (1071).

Si l'on a $f(p)>0$ et $f(q)<0$, $f(x)$ décroît de $x=p$ à $x=q$, $f'(x)$ est constamment négative dans l'intervalle (p, q), et l'on a à la fois $f'(p)<0$, $f'(q)<0$.

Si l'on a $f(p)<0$ et $f(q)>0$, $f(x)$ croît de $x=p$ à $x=q$, $f'(x)$ est constamment positive dans l'intervalle (p, q), et l'on a à la fois $f'(p)>0$, $f'(q)>0$.

Quant à la seconde condition imposée, une distinction est nécessaire.

$f'(x)$ et $f''(x)$ ne pouvant respectivement changer de signe de $x=p$ à $x=q$, $f'(p)$ et $f'(q)$ conservent le même signe dans cet intervalle, aussi bien que $f''(p+\theta h)$ et $f''(q-\theta' k)$. Il en résulte que, *des deux quantités*

$$-\frac{h^2}{2}\frac{f''(p+\theta h)}{f'(p)}, \quad \frac{k^2}{2}\frac{f''(q-\theta' k)}{f'(q)},$$

il y en a toujours une qui est positive, mais une seule. La première quantité est positive, si $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de signes contraires dans l'intervalle (p, q); mais, alors, la seconde quantité est négative. La seconde quantité est positive, si $f'(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe dans l'intervalle (p, q); mais alors la première quantité est négative.

Ainsi, *l'un des deux termes de correction* (1 *bis*), (2 *bis*) (1390), *est toujours admissible, l'autre ne l'étant pas.* Celui qu'il faut appliquer est $-\frac{f(p)}{f'(p)}$, si $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de signes contraires, ou $\frac{f(q)}{f'(q)}$, si $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Mais nous avons établi que *les deux quotients*

$$-\frac{f(p)}{f'(p)}, \quad \frac{f(q)}{f'(q)}$$

sont toujours positifs. Par suite, pour $x=p$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont toujours de signes contraires, tandis qu'ils sont toujours de même signe pour $x=q$.

Il en résulte que, lorsqu'on doit employer le terme de correction $-\frac{f(p)}{f'(p)}$, $f'(p)$ et $f''(p)$ sont de signes contraires comme $f'(p)$ et $f(p)$, de sorte que $f(p)$ *et* $f''(p)$ *sont forcément de même signe;* tandis que, $f'(q)$ et $f''(q)$ étant aussi de signes contraires, $f(q)$ *et* $f''(q)$ *sont forcément de signes contraires,* puisque $f'(q)$ et $f(q)$ sont de même signe.

Également, lorsqu'on doit employer le terme de correction $\frac{f(q)}{f'(q)}$, $f'(q)$ et $f''(q)$ sont de même signe comme $f'(q)$ et $f(q)$, de sorte que $f(q)$ *et* $f''(q)$ *sont forcément de même signe;* tandis que $f'(p)$ et $f''(p)$ étant aussi de même signe, $f(p)$ *et* $f''(p)$ *sont forcément de signes contraires,* puisque $f'(p)$ et $f(p)$ sont de signes contraires.

Finalement, *le terme de correction à appliquer est celui qui répond à la substitution* (p ou q) *pour laquelle* $f(x)$ *et* $f''(x)$, c'est-à-dire le premier membre de l'équation donnée et sa seconde dérivée, *sont de même signe.*

C'est dans cette remarque très simple, dont on comprendra mieux l'importance un peu plus loin, que consiste le perfectionnement apporté par FOURIER à la méthode de NEWTON.

Nous résumerons ce qui précède dans la règle suivante, qui suppose l'équation donnée débarrassée de ses racines égales :

Les deux nombres p *et* $q > p$ *comprenant une seule racine réelle de l'équation* $f(x) = 0$, *et la différence* $q - p$ *étant assez petite pour que, dans l'intervalle* (p, q), $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *ne changent pas de signe, on obtient une valeur plus approchée de la racine considérée, et dans le même sens que la limite employée, en substituant à* x, *dans l'expression*

$$(A) \qquad x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

celui des deux nombres p *et* q *qui, mis à la place de* x, REND $f(x)$ ET $f''(x)$ DE MÊME SIGNE. *En substituant à* x *dans* (A) *la valeur ainsi calculée, on obtient une nouvelle valeur plus approchée de la racine, toujours dans le même sens. Cette nouvelle valeur permet d'en trouver une troisième encore plus resserrée, etc.*

Limite de l'erreur commise.

1392. Pour avoir une limite supérieure de l'erreur ε commise en employant le premier terme de correction, il suffit de considérer le terme complémentaire

$$-\frac{h^2}{2}\frac{f''(p+\theta h)}{f'(p)} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{2}\frac{f''(q-\theta' k)}{f'(q)}.$$

En remplaçant h ou k par la quantité plus grande $q - p$, $f''(p + \theta h)$ ou $f''(q - \theta' k)$ par la valeur maximum M prise par $f''(x)$ entre $x = p$ et $x = q$, $2f'(p)$ ou $2f'(q)$ par le nombre entier m immédiatement inférieur, on a évidemment, en valeur absolue,

$$\varepsilon < \frac{(q-p)^2 \mathrm{M}}{m}.$$

Par conséquent, si le quotient $\frac{M}{m}$ se trouve être inférieur à l'unité, on peut écrire plus simplement

$$\varepsilon < (q-p)^2.$$

Or, $q-p$ représente une limite supérieure du degré d'approximation déjà obtenu au moment où l'on applique la méthode de Newton, soit pour la première fois, soit de nouveau en poursuivant l'opération de la même manière (1390). Il en résulte que, si l'on a $\frac{M}{m} < 1$, l'application de la méthode *double chaque fois* le nombre des décimales précédemment calculées.

Si l'on part, par exemple, de $q-p=0{,}1$, la première opération donne, dans l'hypothèse admise, la valeur de la racine cherchée à $0{,}01$ près; la seconde opération, à $0{,}0001$ près; etc. En général, en partant de $q-p=0{,}1$, l'approximation obtenue en appliquant n fois la méthode (en supposant toujours $\frac{M}{m} < 1$) sera représentée par $(0{,}1)^{2^n}$.

Interprétation géométrique de la méthode de Newton.

1393. On peut interpréter géométriquement la méthode de Newton, et il est très utile de le faire pour l'éclaircir complètement et pour montrer à quoi est dû son manque de certitude, lorsqu'on l'applique sans tenir compte du perfectionnement de Fourier (1391).

En nous reportant aux explications déjà données au sujet de la méthode des parties proportionnelles (1385), construisons la courbe représentative $y=f(x)$ de l'équation $f(x)=0$, dans l'intervalle (p, q).

Il est entendu que, entre les limites p et q, l'équation $f(x)=0$ admet une racine réelle et une seule, ainsi séparée. Il est entendu également que, dans le même intervalle, les deux équations dérivées $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, n'ont aucune racine réelle. Cela revient à dire que, dans les mêmes limites, l'arc de la courbe représentative coupe une seule fois l'axe Ox, que son ordonnée varie toujours dans le même sens ou ne présente aucun maximum ou minimum, que son allure reste toujours la même, puisque $f'(x)$ varie aussi

constamment dans le même sens, ou que cet arc ne présente *aucun point d'inflexion* (1) dans l'intervalle considéré.

En conservant les mêmes notations qu'au n° 1381, l'arc dont il s'agit ne pourra présenter que quatre dispositions, indiquées par les *fig.* 30, 31, 32, 33.

Fig. 30.

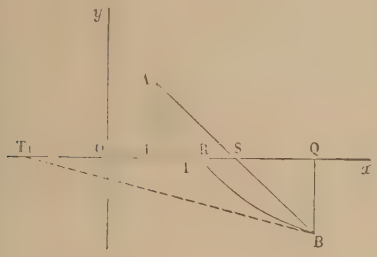


Fig. 31.

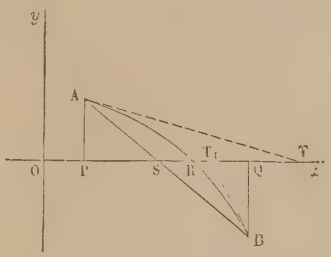


Fig. 32.

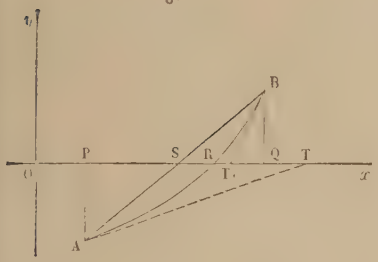
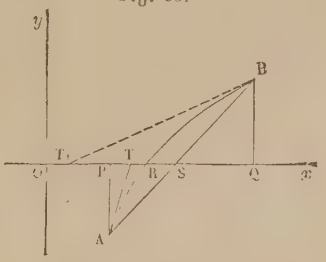


Fig. 33.



Sur ces figures, que nous faisons correspondre exactement aux *fig.* 30, 31, 32, 33, on a

$$\text{PR} = h, \qquad \text{RQ} = k, \qquad \text{OR} = p + h = q - k.$$

Les notations restant partout les mêmes, menons la tan-

(1) On appelle point d'inflexion d'une courbe, comme on le sait, un point où cette courbe traverse sa tangente, devient concave vers l'axe des y, par exemple, après avoir été convexe, ou réciproquement. Il en résulte évidemment que, à partir d'un point d'inflexion, l'axe Ox étant toujours parcouru de $-\infty$ à $+\infty$, $f'(x)$ diminue après avoir augmenté ou augmente après avoir diminué. $f''(x)$ passe donc alors du positif au négatif ou inversement, de sorte que $f(x)$ et ses deux premières dérivées étant supposées continues, les points d'inflexion correspondent à $f''(x) = 0$, comme les maximums et minimums à $f'(x) = 0$. Nous retrouverons ces détails en *Géométrie analytique*, t. V.

gente AT (*dans le cas de la fig.* 30) et la tangente BT_1 (*dans le cas de la fig.* 32).

On a alors (748)

$$f'(p) = \operatorname{tang} AT x, \qquad f'(q) = \operatorname{tang} BT_1 x.$$

Le triangle rectangle ATP (*fig.* 30) et le triangle rectangle BT_1Q (*fig.* 32) donnant respectivement

$$AP = TP \operatorname{tang} ATP = -TP \operatorname{tang} AT x,$$
$$BQ = T_1Q \operatorname{tang} BT_1Q = T_1Q \operatorname{tang} BT_1 x,$$

il en résulte immédiatement

$$TP = -\frac{f(p)}{f'(p)} \qquad \text{et} \qquad T_1Q = \frac{f(q)}{f'(q)}.$$

Ce sont précisément les deux corrections indiquées par la méthode de Newton (1390), suivant qu'on part de la première substitution p ou de la seconde substitution q.

Or, TP et T_1Q sont les *sous-tangentes* (*Géom.*, 754) qui répondent aux points A et B. Par suite, la méthode de Newton consiste à augmenter la valeur par défaut ou à diminuer la valeur par excès de la racine déjà séparée, de la sous-tangente qui, sur la courbe représentative de $f(x)$, répond à l'une ou à l'autre limite.

D'après la définition de la dérivée et sa représentation géométrique (748), la *fig.* 33 conduit d'ailleurs au même résultat que la *fig.* 65, et la *fig.* 31 au même résultat que la *fig.* 32. On a, en effet, respectivement, pour ces deux figures,

$$f'(p) = -\operatorname{tang} AT x, \qquad f'(q) = -\operatorname{tang} BT_1 x.$$

Le triangle rectangle ATP (*fig.* 33) et le triangle rectangle BT_1Q (*fig.* 31) donnent ensuite, en valeur absolue,

$$AP = TP \operatorname{tang} ATP = -TP \operatorname{tang} AT x,$$
$$BQ = T_1Q \operatorname{tang} BT_1Q = T_1Q \operatorname{tang} BT_1 x,$$

c'est-à-dire encore, puisque $f(p) = -AP$ et $f(q) = -BQ$,

$$TP = -\frac{f(p)}{f'(p)} \qquad \text{et} \qquad T_1Q = \frac{f(q)}{f'(q)}.$$

1394. On voit en même temps que, si l'on mène la tangente en B dans les *fig.* 65 et 68, on obtient une sous-tangente QT_1 dont l'extrémité T_1 tombe nécessairement de l'autre côté de R par rapport au point Q, et peut même n'être plus comprise dans l'intervalle PQ. La correction relative à q ne donne donc plus, dans ces deux cas, une valeur approchée par excès, et elle peut même conduire à une valeur ($-OT_1$ ou OT_1) de la racine beaucoup moins approchée que les limites p et q. Au contraire, dans les mêmes figures, la sous-tangente TP donne nécessairement une valeur par défaut de la racine OR plus approchée que p.

Si l'on mène maintenant la tangente en A dans les *fig.* 31 et 32, on obtient une sous-tangente TP dont l'extrémité T tombe forcément de l'autre côté de R par rapport au point P, et peut même n'être plus comprise dans l'intervalle PQ. La correction relative à p ne donne donc plus, dans ces deux cas, une valeur approchée par défaut, et elle peut même conduire à une valeur (OT) de la racine beaucoup moins approchée que les limites p et q. Au contraire, dans les mêmes figures, la sous-tangente QT_1 donne forcément une valeur par excès de la racine OR plus approchée que q.

1395. L'interprétation géométrique qu'on vient de présenter montre bien pourquoi la méthode de Newton peut être en défaut, et elle justifie la règle de Fourier (1391), qu'il est facile de retrouver en considérant les figures précédentes.

En effet, pour les *fig.* 30 et 33, où l'on doit prendre le terme de correction

$$-\frac{f(p)}{f'(p)},$$

on voit immédiatement que, $f(p)$ étant positif (ou négatif), $f'(x)$ croît (ou décroît) constamment en tendant vers zéro. $f''(x)$ est donc constamment positif (ou négatif); et, *pour* $x = p$, $f(x)$ *et* $f''(x)$ *sont de même signe,* tandis que ces deux fonctions sont de signes contraires pour $x = q$.

Pour les *fig.* 31 et 32, où l'on doit prendre le terme de correction

$$\frac{f(q)}{f'(q)},$$

on constate également que, $f(q)$ étant négatif (ou positif),

$f'(x)$ décroît (ou croît) constamment en s'éloignant de zéro. $f''(x)$ est donc constamment négatif (ou positif); et, *pour* $x = q$, $f(x)$ *et* $f''(x)$ *sont de même signe,* tandis que ces deux fonctions sont de signes contraires pour $x = p$.

1396. Il est clair (1391) que, lorsqu'une correction a été effectuée, on peut géométriquement en obtenir une nouvelle, *absolument dans les mêmes conditions,* en partant de la nouvelle valeur admise

$$\mathrm{OT} = p - \frac{f(p)}{f'(p)} = t \quad [\textit{fig.}\ 30 \text{ et } 33]$$

ou

$$\mathrm{OT}_1 = q - \frac{f(q)}{f'(q)} = t_1 \quad [\textit{fig.}\ 31 \text{ et } 32].$$

On n'a qu'à supposer le point d'intersection R de la courbe représentative avec Ox, entre T et Q ou entre P et T_1, au lieu de le supposer entre P et Q.

En considérant l'ordonnée TM avec l'ordonnée BQ (*fig.* 34) ou l'ordonnée AP avec l'ordonnée T_1M_1 (*fig.* 35), on mènera

Fig. 34.

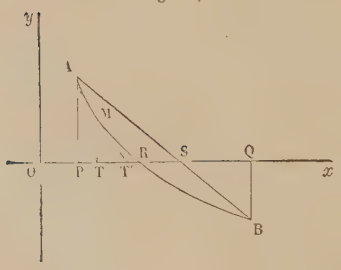
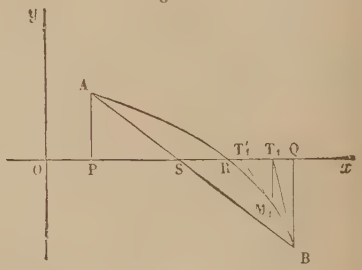


Fig. 35.



la tangente MT′ au point M ou la tangente $M_1T'_1$ au point M_1. On aura ainsi

$$\mathrm{TT}' = -\frac{f(t)}{f'(t)} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{T_1T'_1} = \frac{f(t_1)}{f'(t_1)},$$

et l'on pourra prendre pour valeur plus approchée de la racine

$$\mathrm{OT}' = t - \frac{f(t)}{f'(t)} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{OT'_1} = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)}.$$

La valeur exacte $p + h$ ou $q - k$ de la racine n'étant pas

franchie, $f(x)$ *et* $f''(x)$ *restent toujours de même signe* (1395), pour le point A et pour le point M (*fig.* 34) aussi bien que pour le point B et pour le point M_1 (*fig.* 35), comme l'exige la règle de Fourier (1391) pour la réussite de la méthode.

Emploi simultané de la méthode de Newton et de la méthode des parties proportionnelles.

1397. En se reportant à toutes les figures précédentes (et en particulier aux *fig.* 34 et 35), on s'assure que la méthode des parties proportionnelles (1385) conduit à une valeur de la racine cherchée qui est approchée par excès, quand la méthode de Newton donne une valeur approchée par défaut, et inversement.

Et, en effet, la valeur p ou q à introduire dans la formule (A), qui résume la méthode de Newton et de Fourier (1391), doit rendre les deux fonctions $f(x)$ et $f''(x)$ de même signe. Or, si c'est p qui remplit cette condition, la méthode de Newton donne une valeur par défaut et, la méthode des parties proportionnelles, une valeur par excès (1386); si c'est q, la méthode de Newton donne une valeur par excès et, la méthode des parties proportionnelles, une valeur par défaut (1386).

Ainsi, *les deux méthodes donnent toujours des valeurs de la racine cherchée, approchées en sens contraires.*

Il en résulte que, en combinant convenablement ces deux méthodes, on peut très simplement et très rapidement trouver, à chaque opération, une limite de l'erreur commise, préférable à la limite supérieure indiquée au n° 1392.

1398. Considérons, par exemple, la *fig.* 34. Le raisonnement sera identique pour les autres dispositions.

OR, qui représente la valeur exacte de la racine, tombe entre OT (valeur fournie par la méthode de Newton) et OS (valeur fournie par la méthode des parties proportionnelles). Mais la moyenne arithmétique $\frac{OT + OS}{2}$ tombe également entre OT et OS. Par conséquent, l'erreur commise en remplaçant OR par cette moyenne arithmétique est toujours moindre que $\frac{TS}{2}$ ou que $\frac{OS - OT}{2}$.

On a, en effet, par ordre de grandeur, suivant que le point R est *avant* ou *après* le milieu de TS,

$$\mathrm{OT},\quad \mathrm{OR},\quad \frac{\mathrm{OT}+\mathrm{OS}}{2},\quad \mathrm{OS},$$

ou

$$\mathrm{OT},\quad \frac{\mathrm{OT}+\mathrm{OS}}{2},\quad \mathrm{OR},\quad \mathrm{OS}.$$

L'erreur commise en substituant la moyenne à OR est donc moindre que

$$\frac{\mathrm{OT}+\mathrm{OS}}{2}-\mathrm{OT}\quad \text{ou que}\quad \mathrm{OS}-\frac{\mathrm{OT}+\mathrm{OS}}{2};$$

c'est-à-dire toujours moindre (par excès ou par défaut) que

$$\frac{\mathrm{OS}-\mathrm{OT}}{2}.$$

En définitive, *si l'on emploie simultanément les deux méthodes et si l'on prend à chaque opération la moyenne arithmétique des deux résultats, l'erreur commise est toujours moindre que leur demi-différence.* On saura ainsi quelles décimales on peut conserver avec certitude à la racine, en passant d'une opération à la suivante.

Applications.

1399. **I.** *Soit l'équation*

$$f(x)=x^3-2x-5=0.$$

C'est la seule à laquelle Newton ait appliqué sa méthode. Elle a pour équation aux carrés des différences (1288, 1193)

$$z^3-12z^2+36z+643=0.$$

Comme le premier membre de cette dernière équation ne présente pas que des variations, l'équation donnée n'a pas toutes ses racines réelles (1269); et, puisqu'elle est du troisième degré, elle a une seule racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Nous nous proposons de calculer sa racine réelle, qui est positive (1054, 1056), à 0,000001 près.

On peut écrire

$$f(x) = x(x^2 - 4) + (2x - 5) = 0;$$

3 est donc une limite supérieure de la racine positive que nous cherchons. En substituant 2 et 2,1 à la place de x, on a

x	$f(x)$
2	-1
2,1	$+0,061$

La racine tombe donc entre 2 et 2,1 et, en adoptant les notations précédentes, on peut poser

$$p = 2, \qquad q = 2,1, \qquad q - p = 0,1.$$

On a ici

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \qquad f'(x) = 3x^2 - 2, \qquad f''(x) = 6x.$$

D'après la règle de Fourier (1390), $f(x)$ et $f''(x)$ étant de signes contraires pour $x = p = 2$ et, de même signe, pour $x = q = 2,1$, on obtiendra une nouvelle valeur de la racine, approchée par excès comme la limite q elle-même, en prenant (1391) la valeur

$$q - \frac{f(q)}{f'(q)} = 2,1 - \frac{f(2,1)}{f'(2,1)}$$
$$= 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2,1 - 0,005431\ldots = 2,094569\ldots.$$

Pour juger de cette première approximation, il faut consulter la méthode des parties proportionnelles, qui donne ici (1397) la valeur approchée par défaut (1385)

$$q - (q - p)\frac{f(q)}{f(p) + f(q)}$$
$$= 2,1 - 0,1\,\frac{0,061}{1 + 0,061} = 2,1 - 0,005754\ldots = 2,094246\ldots.$$

La moyenne arithmétique des deux résultats obtenus (qui conservera nécessairement toutes leurs décimales communes) est 2,094407..., tandis que leur demi-différence est égale à 0,000161.... On a donc, comme nouvelle valeur approchée

de la racine, à moins de 0,001, par excès ou par défaut (1398),

$$2,094.$$

Pour $x = 2,094$, on trouve $f(x) = -0,006153416$. Puisque la valeur par excès 2,1 donne le résultat positif $+0,061$, la valeur 2,094 est approchée par défaut, à 0,001 près, et la racine cherchée tombe entre 2,094 et 2,095.

Passons à la seconde correction. Il faut encore partir de la valeur par excès 2,095, puisque c'est pour cette valeur que $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe. [On voit que le calcul se continue bien toujours de la même manière.]

Nous aurons donc, comme précédemment, pour la nouvelle valeur approchée,

$$2,095 - \frac{f(2,095)}{f'(2,095)} = 2,095 - \frac{0,005007375}{11,167075}$$
$$= 2,095 - 0,00044840\ldots = 2,09455160\ldots$$

La méthode des parties proportionnelles donne à son tour pour les mêmes limites,

$$2,095 - 0,001\,\frac{f(2,095)}{f(2,094) + f(2,095)}$$
$$= 2,095 - 0,001\,\frac{0,005007375}{0,006153416 + 0,005007375}$$
$$= 2,095 - 0,00044865\ldots = 2,09455135\ldots.$$

La moyenne arithmétique des deux résultats obtenus est 2,09455147..., tandis que leur demi-différence est égale à 0,00000012.... On a donc, pour nouvelle valeur approchée de la racine, à moins de 0,000001, par excès ou par défaut,

$$2,094551.$$

Cette valeur, substituée à la place de x dans $f(x)$, conduisant au résultat négatif $-0,000005374703233849$, est nécessairement approchée par défaut, puisque la valeur par excès 2,095 nous a donné un résultat positif.

En poursuivant (si cela pouvait être nécessaire), la nouvelle valeur approchée contiendrait douze décimales exactes, et la racine, approchée par défaut à moins d'une unité du douzième ordre décimal, serait

$$2,094551481542.$$

Newton a indiqué pour cette racine, dans l'Ouvrage cité,

$$2,09455147.$$

1400. II. *Soit l'équation*

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Nous avons vu (1388) que la plus petite de ses deux racines positives était comprise entre 1,356 et 1,357, et nous avons trouvé

x	$f(x)$
1,356	+ 0,001326016
1,357	− 0,000153707

Cherchons s'il est possible d'approcher à 0,000001 *près de cette racine, par une seule appoximation.*

On a ici

$$f(x) = x^3 - 7x + 7, \qquad f'(x) = 3x^2 - 7, \qquad f''(x) = 6x.$$

$f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe pour 1,356 et de signes contraires pour 1,357. La nouvelle valeur approchée, toujours par défaut, sera donc (1391)

$$1,356 - \frac{f(1,356)}{f'(1,356)} = 1,356 - \frac{0,001326016}{-1,483792}$$
$$= 1,356 + 0,00089366\ldots = 1,35689366\ldots.$$

La méthode des parties proportionnelles donne dans ce cas (1385, 1397) la valeur approchée par excès [en prenant en valeur absolue toutes les valeurs de $f(x)$]

$$1,356 + 0,001 \frac{f(1,356)}{f(1,356) + f(1,357)}$$
$$= 1,356 + 0,001 \frac{0,001326016}{0,001326016 + 0,000153707}$$
$$= 1,356 + 0,00089612\ldots = 1,35689612\ldots.$$

La moyenne arithmétique des deux résultats obtenus est 1,35689489... et leur demi-différence est 0,00000123....

On ne peut donc pas affirmer, *en conservant les six premiers chiffres décimaux de la moyenne arithmétique*, que la valeur de la racine est 1,356894 à 0,000001 près, par excès ou par

défaut. Il est possible que le dernier chiffre 4 soit fautif d'une unité (1).

En substituant 1,356894 et 1,356895 dans $f(x)$, on obtient deux résultats positifs; mais, en substituant 1,356896, on obtient un résultat négatif. La racine, à 0,0000001 près par défaut, est donc finalement

1,356895.

---

(1) En consultant la limite supérieure du n° 1346, $(q-p)^2\frac{M}{m}$, on trouve ici $\frac{M}{m}=\frac{8,142}{2,967584}$, c'est-à-dire $\frac{M}{m}>1$.

CHAPITRE X.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES. — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGRANGE.

Méthode d'approximation de Lagrange.

1401. Nous ne pouvons passer sous silence la méthode d'approximation de Lagrange, donnée par ce grand géomètre comme complément de sa méthode de séparation des racines réelles (1306). Cette méthode d'approximation, qui consiste à développer chaque racine incommensurable en fraction continue (1), exige des calculs en général fort pénibles, et on lui préfère celle de Newton; mais elle a, du moins, l'avantage d'être parfaitement régulière et de conduire *directement* à une approximation certaine.

Comme la recherche des racines négatives d'une équation $f(x) = 0$ se ramène toujours à la recherche des racines positives de sa transformée en $-x$, nous supposerons dans ce qui suit qu'il s'agit seulement de racines positives.

1402. Soit l'équation de degré m

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Admettons qu'on ait trouvé (par l'un des procédés de séparation indiqués précédemment) que cette équation a une racine réelle x, et une seule, comprise entre les deux entiers consécutifs p et $p+1$. Il faut approcher davantage de cette racine.

(1) *Traité de la résolution des équations numériques*, Ch. III.

Pour cela, y étant une quantité positive plus grande que 1, posons

$$(\alpha) \qquad x = p + \frac{1}{y}.$$

Cela revient à diminuer d'abord de p les racines de l'équation donnée (1107), puis à former l'équation aux inverses des racines de la transformée obtenue (1113). Dans ces conditions, *la transformée en* $x + p$ (en conservant le même symbole x pour la nouvelle inconnue) *aura une racine positive, et une seule, plus petite que* 1; sans quoi l'équation $f(x) = 0$ aurait, contre l'hypothèse, plus d'une racine entre p et $p + 1$. Il en résulte que *l'équation aux inverses des racines de la transformée en* $x + p$ *aura, à son tour, une racine positive, et une seule, plus grande que* 1. Cette équation aux inverses étant représentée par $f_1(y) = 0$, on pourra donc découvrir la partie entière de son unique racine positive plus grande que 1, en substituant dans $f_1(y)$ la suite naturelle des nombres (1071).

On aura, en premier lieu (1107),

$$f(x+p) = f(p) + f'(p)x + \frac{f''(p)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^m(p)}{1.2.3\ldots m}x^m = 0.$$

On aura ensuite (1113)

$$(2) \quad f_1(y) = f(p)y^m + f'(p)y^{m-1} + \frac{f''(p)}{1.2}y^{m-2} + \ldots + \frac{f^m(p)}{1.2.3\ldots m} = 0$$

La règle pour passer, dans le premier calcul, de l'équation $f(x) = 0$ à la transformée $f_1(y)$ est évidente, et elle s'applique à toutes les opérations successives.

Supposons maintenant que l'unique racine positive supérieure à 1 de l'équation (2) tombe entre les entiers consécutifs q et $q + 1$. Nous poserons alors

$$(\beta) \qquad y = q + \frac{1}{z},$$

z étant une quantité positive supérieure à l'unité. En raisonnant sur q, y, z, comme on vient de le faire sur p, x, y, on parviendra à une transformée

$$(3) \quad f_2(z) = f_1(q)z^m + f_1'(q)z^{m-1} + \frac{f_1''(q)}{1.2}z^{m-2} + \ldots + \frac{f_1^m(q)}{1.2.3\ldots m} = 0$$

qui aura encore une racine positive, et une seule, supérieure à 1. Si cette racine tombe entre les entiers consécutifs r et $r+1$, on posera

$$(\gamma) \qquad z = r + \frac{1}{u},$$

u étant une quantité positive supérieure à l'unité, et l'on écrira la transformée en u, comme on vient d'écrire la transformée en z. Le calcul se poursuivra de la même manière jusqu'à ce que l'approximation jugée nécessaire soit atteinte. En rapprochant à ce moment les relations (α), (β), (γ), ..., on obtiendra

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ddots}}},$$

c'est-à-dire le développement de la racine cherchée *en fraction continue.*

Si x était *commensurable*, la fraction continue devrait se terminer, et l'une des transformées successives admettrait elle-même une racine entière. Mais, si x est *incommensurable*, comme nous le supposons, la fraction continue qui représente cette racine est nécessairement illimitée (183, 184).

1403. D'après les propriétés des fractions continues, ce développement spécial de la racine incommensurable cherchée présente les avantages suivants :

Si l'on forme les réduites consécutives de x (188), chacune d'elles exprime la valeur de la racine aussi simplement que possible, eu égard au degré d'approximation obtenu (199). Quant à ce degré d'approximation, on sait que x est toujours comprise entre deux réduites consécutives, la réduite de rang impair étant la plus petite (186). On sait aussi que, lorsqu'on s'arrête à une certaine réduite, l'erreur commise est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette réduite, ou encore, que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la réduite suivante. Par conséquent, en poursuivant les opérations, on pourra toujours parvenir à une réduite $\frac{R}{R'}$ donnant l'approxi-

mation voulue $\frac{1}{k}$. Il suffira d'avoir (198)

$$\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{k} \qquad \text{ou} \qquad R' > \sqrt{k}.$$

1404. Il est clair que, si les deux nombres entiers p et $p+1$ (1402) comprennent plusieurs racines réelles de l'équation $f(x)=0$, la transformée $f_1(y)=0$, obtenue en posant $x = p + \frac{1}{y}$, aura aussi nécessairement plusieurs racines positives supérieures à l'unité.

Admettons, par exemple, que p et $p+1$ comprennent deux racines réelles de $f(x)=0$. Ces deux racines étant représentées par

$$x = p + \frac{1}{y},$$

il faudra que y ait deux valeurs réelles supérieures à l'unité; et, si ces deux valeurs ont même partie entière q, il faudra, en posant

$$y = q + \frac{1}{z},$$

que z ait deux valeurs réelles supérieures à l'unité, etc. Mais, si les deux valeurs de y ont des parties entières différentes q et q', on aura à la fois

$$y = q + \frac{1}{z}, \qquad y = q' + \frac{1}{z},$$

et, à chacune de ces égalités, il ne correspondra qu'une seule valeur positive de z supérieure à l'unité, de sorte qu'on rentrera, pour le double calcul à effectuer, dans les conditions précédentes (1402).

D'ailleurs, lorsqu'on a opéré la séparation des racines de l'équation $f(x)=0$, et que ce cas de plusieurs racines comprises entre deux entiers consécutifs se présente, on peut toujours multiplier les racines de l'équation proposée (1103) par un nombre tel que les racines de l'équation substituée aient des parties entières différentes, de manière à appliquer à cette dernière équation la marche qu'on vient d'exposer (1402) sans aucun changement.

1405. Il peut arriver, en appliquant la méthode de Lagrange au calcul d'une racine incommensurable, qu'on obtienne une fraction continue périodique (207). C'est ce qui aura lieu lorsque, dans la suite constituée par la proposée et les transformées successives $f_1(y)$, $f_2(z)$, ..., il se trouvera deux équations ayant une même racine supérieure à l'unité. Par exemple, si la racine x cherchée pour l'équation $f(x) = 0$ appartient aussi à l'équation $f_2(z) = 0$, il est clair qu'au lieu d'écrire (1402)

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cdots}},$$

on pourra poser (174, 1°)

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}.$$

Or, toute fraction continue périodique est (174) l'une des racines irrationnelles d'une équation du second degré à coefficients rationnels, facile à établir. On a alors immédiatement l'expression exacte de la racine incommensurable cherchée, qui est de la forme $a + \sqrt{b}$. En outre, si les coefficients de l'équation $f(x) = 0$ sont commensurables, elle ne peut admettre la racine $a + \sqrt{b}$, sans posséder aussi (1079) la racine conjuguée $a - \sqrt{b}$. Par conséquent, dans l'hypothèse examinée, un seul calcul donne à la fois deux racines incommensurables de la proposée.

1406. Dans la pratique, lorsque la méthode de Lagrange conduit à une suite de quotients incomplets se reproduisant dans le même ordre, on ne peut pas affirmer *a priori* que la racine correspondante est bien exprimée par une fraction continue périodique. On peut obtenir d'abord un résultat qui semble indiquer une fraction continue périodique; mais, en continuant l'opération, la périodicité apparente peut se trouver rompue.

Pour lever cette difficulté sans être obligé à de trop longs calculs, il convient de former l'équation du second degré

$$\mu x^2 + \nu x + \lambda = 0,$$

qui répond à la fraction continue périodique *supposée*. Si les

coefficients de l'équation donnée $f(x) = 0$, sont commensurables, et si la fraction continue, développement de la racine cherchée, *est bien périodique,* le trinôme

$$\mu x^2 + \nu x + \lambda = 0$$

sera (1405) un diviseur commensurable du second degré de $f(x)$.

On devra donc effectuer la division de $f(x)$ par ce trinôme, jusqu'au reste du premier degré $Mx + N$, et, dans le cas de l'affirmative, ce reste devra être identiquement nul, c'est-à-dire qu'on devra avoir $M = 0$ et $N = 0$.

On connaîtra alors (1405) deux racines incommensurables de la proposée, et le quotient Q de la division représentera le premier membre de la nouvelle équation qu'on devra substituer à la proposée, dont le degré se trouvera ainsi abaissé de deux unités.

1407. En exposant le *théorème de* Fourier, nous avons vu (1305) que la difficulté (qu'il n'avait pu vaincre entièrement) était de décider, lorsque deux substitutions consécutives dans le premier membre $f(x)$ de l'équation donnée entraînaient la perte d'un nombre *pair* de variations, si cette perte indiquait ou non l'existence de racines réelles entre les deux substitutions.

Il faut ajouter néanmoins que Fourier, dans les *Mémoires de l'Institut* pour 1827, annonça qu'on pouvait appliquer immédiatement la méthode de Lagrange à ces racines douteuses et que, en essayant ainsi leur développement en fraction continue, la distinction entre les racines réelles et les racines imaginaires ne devait pas manquer de s'opérer. Mais cette assertion n'était appuyée d'aucune preuve.

C'est M. Vincent [1] qui l'a mise hors de doute, en démontrant une belle propriété des fractions continues. Voici l'énoncé même de l'auteur :

« Si, dans une équation numérique rationnelle en x dépourvue de racines égales, on fait successivement et conformément

---

[1] *Mémoires de la Société des Sciences de Lille,* 1834. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. I, 1836.

au procédé de Lagrange,

$$x = a + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = b + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = c + \frac{1}{x_3}, \qquad \ldots,$$

on parvient toujours par la suite des transformations, et quels que soient d'ailleurs les nombres a, b, c, ... [supposés toutefois positifs et plus grands que 1], à une équation transformée qui se trouve dans l'un de ces deux cas : ou de ne plus avoir que des permanences, ou de ne plus offrir qu'une variation.

» Dans ce second cas, l'équation en x a une racine réelle positive représentée par la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ddots}},$$

et n'en a qu'une seule de cette valeur; le premier cas, au contraire, arrive toutes les fois que l'équation n'a aucune racine susceptible de l'expression indiquée. »

En vertu de cette propriété remarquable, la méthode de Lagrange suffit pour reconnaître d'une manière certaine l'existence ou l'absence des racines réelles, lorsqu'il y a doute; et la séparation s'effectue bien d'elle-même, comme l'avait annoncé Fourier. Quand on parvient par cette méthode à une transformée qui n'a plus que des permanences, les deux substitutions considérées ne comprennent aucune racine réelle de l'équation proposée. Quand on parvient à une transformée qui n'a plus qu'une variation, les résultats successifs fournis par les transformées précédentes forment une fraction continue, dont les réduites successives représentent des valeurs de plus en plus approchées de l'une des racines réelles de la proposée comprises entre les deux substitutions indiquées.

Nous renverrons, pour la démonstration du théorème de M. Vincent, aux Mémoires de ce savant. Nous ne croyons pas devoir insister non plus sur les ingénieux perfectionnements apportés par Lagrange à sa méthode, dans le but de rendre l'approximation plus rapide. Au point de vue du calcul proprement dit, on peut, en effet, se servir de la méthode de Lagrange pour obtenir, avec une approximation déterminée,

les premiers chiffres de la racine cherchée; mais il est ensuite préférable d'avoir recours à la méthode d'approximation de Newton, combinée avec celle des parties proportionnelles, comme on l'a expliqué dans le Chapitre précédent.

Pour mieux faciliter la comparaison des méthodes, nous terminerons en appliquant la méthode de Lagrange à deux équations déjà traitées.

Applications.

1408. I. *Soit l'équation*

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0, \tag{1}$$

étudiée au n° 1353. Nous savons qu'elle admet une seule racine réelle comprise entre 2 et 3, et qu'on a $f(2) = -1$ et $f(3) = +16$.

Nous voulons obtenir cette racine à 0,000001 près. Nous avons donc ici (1403) $k = 1000000$, et il faudra parvenir à une réduite dont le dénominateur soit supérieur à $\sqrt{k}$ ou à 1000. Pour pouvoir nous arrêter juste à temps, nous formerons les réduites de la fraction continue d'après la règle connue (157), au fur et à mesure de la détermination des quotients incomplets, et nous écrirons ces réduites entre crochets, à côté des relations qui mettent les quotients incomplets en évidence.

Nous poserons (1402)

$$x = 2 + \frac{1}{y} \qquad \left[\frac{2}{1}\right]. \tag{\alpha}$$

La transformée en y sera, d'après ce qui précède,

$$f_1(y) = f(2)y^3 + f'(2)y^2 + \frac{f''(2)}{1.2}y + \frac{f'''(2)}{1.2.3} = 0,$$

c'est-à-dire, en changeant les signes pour rendre le premier terme positif,

$$f_1(y) = y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0. \tag{2}$$

Cette équation ayant une seule racine plus grande que 1, on peut y substituer les entiers 1, 2, 3, ...; mais, comme 0 et 10 donnent un résultat également négatif, on commencera les substitutions seulement à 10. On a $f_1(10) = -61$ et $f_1(11) = +54$. La racine cherchée tombant entre 10 et 11, on posera

$$y = 10 + \frac{1}{z} \qquad \left[\frac{21}{10}\right]. \tag{\beta}$$

La nouvelle transformée est

$$f_2(z) = f_1(10)z^3 + f'_1(10)z^2 + \frac{f''_1(10)}{1.2}z + \frac{f'''_1(10)}{1.2.3} = 0$$

ou, en changeant tous les signes,

$$(3) \qquad f_2(z) = 61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0.$$

On a $f_2(1) = -54$ et $f_2(2) = +71$. La valeur de z est donc comprise entre 1 et 2, et l'on posera

$$(\gamma) \qquad z = 1 + \frac{1}{u} \qquad \left[\frac{23}{11}\right].$$

La transformée en u est

$$f_3(u) = f_2(1)u^3 + f'_2(1)u^2 + \frac{f''_2(1)}{1.2}u + \frac{f'''_2(1)}{1.2.3} = 0$$

ou, en changeant tous les signes,

$$(4) \qquad f_3(u) = 54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0.$$

Cette équation a toujours une seule racine plus grande que 1. Comme on trouve $f_3(1) = -71$ et $f_3(2) = +293$, la valeur cherchée de u tombe entre 1 et 2, et l'on posera

$$(\delta) \qquad u = 1 + \frac{1}{v} \qquad \left[\frac{44}{21}\right].$$

La marche à suivre et les calculs à effectuer étant toujours les mêmes, nous nous contenterons maintenant d'écrire les résultats successifs. L'indice de f augmente d'une unité quand on passe d'une transformée à la suivante. Nous aurons (en changeant toujours les signes)

$$(5) \qquad f_4(v) = 71v^3 - 123v^2 - 187v - 54 = 0,$$

$$f_4(1) = -293, \qquad f_4(2) = -352, \qquad f_4(3) = +195,$$

$$(\varepsilon) \qquad v = 2 + \frac{1}{s} \qquad \left[\frac{111}{53}\right].$$

$$(6) \qquad f_5(s) = 352s^3 - 173s^2 - 303s - 71 = 0,$$

$$f_5(1) = -195, \qquad f_5(2) = +1447,$$

$$(\zeta) \qquad s = 1 + \frac{1}{t} \qquad \left[\frac{155}{74}\right].$$

$$(7) \qquad f_6(t) = 195t^3 - 407t^2 - 883t - 352 = 0,$$

$$f_6(1) = -1447, \quad f_6(2) = -2186, \quad f_6(3) = -1399, \quad f_6(4) = +2084,$$

$$(\eta) \qquad t = 3 + \frac{1}{w} \qquad \left[\frac{576}{275}\right].$$

$$(8) \qquad f_7(w) = 1399w^3 - 1940w^2 - 1348w - 195 = 0,$$

$$f_7(1) = -2084, \qquad f_7(2) = +541,$$

(θ) $$w = 1 + \frac{1}{r} \qquad \left[\frac{731}{349}\right].$$

(9) $$f_8(r) = 2084r^3 + 1031r^2 - 2257r - 1399 = 0,$$
$$f_8(1) = -541, \qquad f_8(2) = +14883,$$

(ι) $$r = 1 + \frac{1}{q} \qquad \left[\frac{1307}{624}\right].$$

(10) $$f_9(q) = 541q^3 - 6057q^2 - 7283q - 2084 = 0,$$
$$f_9(12) = -26840, \qquad f_9(13) = +68181,$$

(λ) $$q = 12 + \frac{1}{p} \qquad \left[\frac{16415}{7837}\right].$$

Le dénominateur de cette dernière réduite surpassant 1000, nous pouvons nous arrêter et prendre

$$x = \frac{16415}{7837}.$$

L'erreur, commise par excès puisque la dernière réduite est de rang pair, sera moindre que

$$\frac{1}{(7837)^2} \qquad \text{ou que} \qquad \frac{1}{61418569}.$$

Cette erreur n'atteindra donc même pas le chiffre des dix-millionièmes. Et, en effet, en réduisant la valeur de x en décimales, on trouve

$$x = 2,094551486\ldots,$$

valeur exacte, d'après ce qui précède (1399), jusqu'au chiffre des cent-millionièmes.

1409. II. *Soit l'équation*

(1) $$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0,$$

déjà considérée (1400, 1380). Nous savons que cette équation a deux racines positives entre 1 et 2 et une racine négative entre -4 et -3.

La première des deux racines positives étant comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$ et, la seconde, entre $\frac{3}{2}$ et 2, on peut facilement transformer l'équation (1) en une autre équation dont les racines positives n'aient plus la même partie entière (1404). Il suffit de multiplier par 2 les racines de l'équation (1), qui deviendra (1103) [en conservant le même symbole pour l'inconnue]

(2) $$f\left(\frac{x}{2}\right) = x^3 - 28x + 56 = 0.$$

L'équation (2) aura alors deux racines positives, la première entre 2 et 3, la seconde entre 3 et 4, et l'on pourra les calculer en suivant la marche ordinaire.

Rien n'empêche d'ailleurs de calculer les deux racines positives de l'équation (1), sans lui faire subir aucune transformation (1404). En effet, puisqu'elles sont toutes deux entre 1 et 2, on peut poser

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

et y n'aura que deux valeurs, l'une plus grande que 2 et correspondant à la plus petite valeur de x, l'autre plus petite que 2 et correspondant à la plus grande valeur de x.

Or, la transformée en y est ici

$$f_1(y) = f(1)y^3 + f'(1)y^2 + \frac{f''(1)}{1.2}y + \frac{f'''(1)}{1.2.3} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f_1(y) = y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

On a alors

$$f_1(1) = +1, \qquad f_1(2) = -1, \qquad f_1(3) = +1.$$

La transformée en y a donc bien une racine entre 2 et 3 et une racine entre 1 et 2. Par suite, en posant à la fois

$$y = 2 + \frac{1}{z}, \qquad y = 1 + \frac{1}{z},$$

les deux transformées en z n'auront chacune qu'une seule racine plus grande que 1, et les deux calculs, poursuivis parallèlement, conduiront aux deux racines positives de l'équation (1). Pour avoir ensuite sa racine négative, on remarquera que la somme de ses trois racines réelles est égale à zéro (1080).

Cherchons d'abord la plus petite racine positive x_1, en partant de $x = 2 + \frac{1}{z}$. On aura successivement

$$f_2(z) = z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0, \qquad z = 1 + \frac{1}{u};$$

$$f_3(u) = u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0, \qquad u = 4 + \frac{1}{v};$$

$$f_4(v) = v^3 - 20v^2 - 9v - 1 = 0, \qquad v = 20 + \frac{1}{w};$$

$$f_5(w) = 181w^3 - 391w^2 - 80w - 1 = 0, \qquad w = 2 + \frac{1}{t};$$

$$f_6(t) = 277t^3 - 528t^2 - 722t - 181 = 0, \qquad t = 2 + \frac{1}{s};$$

$$f_7(s) = 1521s^3 - 490s^2 - 1134s - 277 = 0, \qquad s = 1 + \frac{1}{r};$$

.....

La valeur de x_1 est donc

$$x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}},$$

et les réduites successives ont pour expressions

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{19}{14}, \quad \frac{384}{283}, \quad \frac{787}{580}, \quad \frac{1958}{1443}, \quad \frac{2745}{2023}, \quad \ldots.$$

En s'arrêtant à l'avant-dernière réduite (qui est de rang impair), on commet une erreur par défaut moindre que

$$\frac{1}{1443 \times 2023} = \frac{1}{2919189} = 0,00000034\ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1958}{1443} = 1,35689535\ldots.$$

Par conséquent

$$x_1 = 1,356895$$

est la plus petite racine positive de l'équation (1), à un millionième près par défaut.

Cherchons maintenant sa plus grande racine positive x_2, en partant de $y = 1 + \frac{1}{z}$. On aura successivement [d'après l'équation

$$f_1(y) = y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

et en conservant les mêmes notations pour ce second calcul]

$$f_2(z) = z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0, \qquad z = 2 + \frac{1}{u};$$

$$f_3(u) = u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0, \qquad u = 4 + \frac{1}{v};$$

Cette dernière transformée étant, par une propriété spéciale, identique à celle de même rang dans le calcul précédent, il est inutile d'aller plus loin. A partir du quotient incomplet 4, nous obtiendrons de part et d'autre les mêmes quotients incomplets dans le même ordre. La

valeur de x_2 est donc cette fois

$$x_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}},$$

et les réduites successives ont pour expressions

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{22}{13}, \quad \frac{445}{263}, \quad \frac{912}{539}, \quad \frac{2269}{1341}, \quad \frac{3181}{1880}, \quad \ldots.$$

En s'arrêtant à l'avant-dernière réduite, on commet une erreur par défaut moindre que

$$\frac{1}{1341 \times 1880} = \frac{1}{2521080} = 0,0000039\ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{2269}{1341} = 1,692020879\ldots.$$

Par conséquent,

$$x_2 = 1,692020$$

pourrait présenter une erreur par défaut supérieure à un millionième. On prendra donc, pour la plus grande racine positive de l'équation (1),

$$x_2 = 1,692021,$$

et l'erreur commise sera alors, par défaut ou par excès, inférieure à un millionième (il est facile de s'assurer que cette erreur est une très faible erreur par excès).

On aura enfin la racine négative x_3 de l'équation (1) en prenant en signe contraire la somme de ses deux racines positives. Cette racine négative sera donc

$$x_3 = -3,048916$$

et, d'après ce qui précède, elle se trouve ainsi obtenue à un millionième près par excès.

CHAPITRE XI.

RECHERCHE DES RACINES IMAGINAIRES.

Méthode de Lagrange pour le calcul des racines imaginaires.

1410. Nous avons déjà dit quelques mots de la recherche des racines imaginaires d'une équation.

Au point de vue algébrique, le mieux est de recourir à l'élimination, comme nous l'avons expliqué (1239). La recherche des racines imaginaires est alors ramenée à la recherche des racines réelles d'autres équations déduites de l'équation proposée, et toutes les méthodes précédentes sont applicables.

Le théorème de Sturm (1309) permet d'ailleurs de connaître exactement le nombre des racines réelles de l'équation proposée et, par suite, celui de ses racines imaginaires. Si l'équation a ses coefficients réels, ses racines imaginaires sont conjuguées deux à deux (1075).

1411. Lagrange, conformément à sa méthode (1306, 1401) procède comme il suit.

Supposons qu'on ait formé, relativement à l'équation considérée $f(z) = 0$, l'équation aux carrés des différences des racines (1192, 1193). Cette équation

$$F(u) = 0$$

a (1269) autant de racines négatives (et sa transformée en $-u$ autant de racines positives) que l'équation donnée a de couples de racines imaginaires conjuguées.

Si cette équation admet, par exemple, les deux racines ima-

ginaires conjuguées $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$, le carré de leur différence sera $-4\beta^2$, et la transformée en $-u$ de l'équation aux carrés des différences aura une racine positive égale à $4\beta^2$. Par suite, si les racines positives de cette transformée sont $u_1, u_2, u_3, \ldots$, les valeurs correspondantes de β seront

$$\frac{\sqrt{u_1}}{2}, \quad \frac{\sqrt{u_2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{u_3}}{2}, \quad \ldots.$$

Pour trouver maintenant les valeurs de α associées aux valeurs de β, on n'a qu'à substituer $x+yi$ à la variable z dans l'équation donnée $f(z)=0$; en égalant ensuite séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de son premier membre, on la remplacera (1239, 1240) par les deux équations

$$(A)\quad \begin{cases} f(x) - f''(x)\,\dfrac{y^2}{1.2} + f^{IV}(x)\,\dfrac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots = 0, \\ f'(x) - f'''(x)\,\dfrac{y^2}{1.2.3} + f^{V}(x)\,\dfrac{y^4}{1.2.3.4.5} - \ldots = 0. \end{cases}$$

L'une des valeurs de β étant substituée à y dans ces équations, les deux équations en x qui résulteront de cette substitution devront avoir pour racines communes les valeurs de α associées à la valeur choisie pour β. Par conséquent, si l'on regarde y comme connue, les premiers membres des équations (A) admettront un plus grand commun diviseur en x; et ce plus grand commun diviseur, égalé à zéro, aura précisément pour racines (1125) les valeurs de α associées à la valeur de β que y est supposée représenter.

Il y a plusieurs cas à distinguer.

Si toutes les valeurs de β *sont inégales*, chacune d'elles répondra à une seule valeur de α, et le plus grand commun diviseur dont nous venons de parler sera du premier degré. On devra donc poursuivre l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste du premier degré en x; et, en l'égalant à zéro, la valeur de x qu'on en déduira sera l'expression générale de α, c'est-à-dire que chaque valeur de β mise à la place de y dans cette expression fera connaître la valeur correspondante de α.

L'équation donnée étant débarrassée de ses racines égales, *si* β *présente plusieurs valeurs égales*, les valeurs correspon-

dantes de α seront différentes pour chacune d'elles : le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations (A) sera alors d'un degré indiqué par le nombre de ces valeurs égales de β. Il faudra donc pousser l'opération jusqu'à un reste de ce degré, qu'on égalera à zéro, et dont les racines (y étant remplacé dans le premier membre de l'équation formée, par la valeur multiple de β) seront les valeurs cherchées de α.

1412. Tant que les *parties réelles* des racines imaginaires de l'équation donnée, $f(z)=0$, diffèrent aussi bien entre elles que des racines réelles de cette équation, il n'y a rien à ajouter à ce qui précède. Mais il peut arriver que cette condition ne soit pas remplie. Dans cette hypothèse, *l'équation aux carrés des différences peut avoir plus de racines négatives que la proposée n'a de couples de racines imaginaires conjuguées;* et il faut alors faire attention que, si la méthode conduit à des valeurs *imaginaires* pour les parties *réelles* des racines imaginaires, ces valeurs doivent nécessairement être rejetées comme inadmissibles d'après l'hypothèse.

Supposons, par exemple, que l'équation $f(z)=0$ ait en même temps les deux racines imaginaires conjuguées

$$\alpha+\beta i \quad \text{et} \quad \alpha-\beta i,$$

et une racine réelle $a=\alpha$. L'équation aux carrés des différences aura les deux racines

$$(\alpha-a+\beta i)^2 \quad \text{et} \quad (\alpha-a-\beta i)^2,$$

c'est-à-dire, puisque $a=\alpha$, les deux racines négatives égales $-\beta^2$, en outre de la racine négative $-4\beta^2$, qui correspond aux deux racines imaginaires conjuguées. Or, les deux racines négatives égales $-\beta^2$, qu'on vient de trouver à cause de la racine réelle a égale à α, pourraient répondre également à ces deux couples de racines imaginaires conjuguées :

$$\alpha_1+\frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_1-\frac{\beta}{2}i, \quad \alpha_2+\frac{\beta}{2}i \quad \text{et} \quad \alpha_2-\frac{\beta}{2}i.$$

Ainsi, l'équation aux carrés des différences ayant trois racines négatives, dont une double, la proposée peut avoir une seule couple ou trois couples de racines imaginaires conjuguées.

On voit par là que, si la transformée en $-u$ de l'équation aux carrés des différences $F(u)$ admet, parmi ses racines positives, des racines égales, toute racine positive simple conduit bien, comme précédemment, à une couple de racines imaginaires conjuguées de la proposée; mais que chaque racine positive multiple peut conduire à un nombre de couples de racines imaginaires conjuguées de la proposée, qui dépend de son ordre de multiplicité, sans être toujours égal à cet ordre.

Supposons, pour préciser, que $F(-u)=0$ ait une racine positive double égale à β. Pour cette racine, il faudra poursuivre, comme nous l'avons dit, la recherche du plus grand commun diviseur des premiers membres des équations (A) [1411], jusqu'à un reste du second degré en x. Les racines de ce reste, égalé à zéro, seront les valeurs de α qu'on doit associer successivement à β. Or, cette équation du second degré pouvant avoir ses deux racines réelles *ou* imaginaires, la valeur double de β répondra à deux couples de racines imaginaires conjuguées de la proposée *ou* à aucune.

De même, si $F(-u)=0$ a une racine positive triple égale à β, il faudra, pour cette racine, poursuivre la recherche du plus grand commun diviseur jusqu'à un reste du troisième degré en x. Les racines de ce reste, égalé à zéro, seront les valeurs de α qu'on doit associer successivement à β. Or, cette équation du troisième degré pouvant avoir une racine réelle et deux racines imaginaires *ou* trois racines réelles, la valeur triple de β répondra à une seule couple *ou* à trois couples de racines imaginaires conjuguées de la proposée, etc.

Exemple.

1413. En remplaçant par z le symbole x, appliquons ce qui précède à l'équation déjà considérée (1408)

$$f(z)=z^3-2z-5=0.$$

Elle a une racine positive que nous avons évaluée et deux racines imaginaires conjuguées, que nous nous proposons de calculer avec quatre chiffres décimaux à leur partie réelle et au coefficient de leur partie imaginaire. Nous avons déjà remarqué que l'équation donnée a pour équation aux carrés des différences (1399) l'équation

$$F(u)=u^3-12u^2+36u+643=0.$$

dont la transformée en $-u$ est

$$F(-u) = \chi(u) = u^3 + 12u^2 + 36u - 643 = 0.$$

Cette équation a une seule racine positive u_1, dont la détermination résoudra la question. Cherchons à approcher de cette racine, d'après la méthode de Lagrange (1402). Nous aurons successivement (1408, 1409)

$$\chi(5) = -38, \qquad \chi(6) = +221,$$

$$u = 5 + \frac{1}{v} \qquad \left[\frac{5}{1}\right].$$

$$\chi_1(v) = 38v^3 - 231v^2 - 27v - 1 = 0,$$

$$\chi_1(6) = -271, \qquad \chi_1(7) = +1525,$$

$$v = 6 + \frac{1}{w} \qquad \left[\frac{31}{6}\right].$$

$$\chi_2(w) = 271w^3 - 1305w^2 - 453w - 38 = 0,$$

$$\chi_2(5) = -1053, \qquad \chi_2(6) = +8837,$$

$$w = 5 + \frac{1}{t} \qquad \left[\frac{160}{31}\right].$$

$$\chi_3(t) = 1053t^3 - 6822t^2 - 2760t - 271 = 0,$$

$$\chi_3(6) = -34975, \qquad \chi_3(7) = +73159,$$

$$t = 6 + \frac{1}{s} \qquad \left[\frac{991}{192}\right].$$

La racine positive u_1 que l'on cherche a donc pour développement en fraction continue

$$u_1 = 5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}$$

La dernière réduite $\frac{991}{192}$ étant de rang pair, l'erreur commise par excès en s'y arrêtant est moindre que $\frac{1}{(192)^2}$ ou que

$$\frac{1}{36864} = 0{,}000027\ldots.$$

En prenant

$$u_1 = \frac{991}{192} = 5{,}161453\ldots$$

et en négligeant les deux derniers chiffres, on commet donc une erreur par défaut certainement moindre qu'un dix-millième. On a, *avec la*

même approximation,

$$4\beta^2 = u_1 = 5,1614$$

et (*Arithm.*

$$\beta = \frac{\sqrt{5,1614}}{2} = 1,1359.$$

Si l'on substitue maintenant $x + yi$ à la place de z dans l'équation donnée, on en déduit (1411) les deux équations

$$(A) \qquad \begin{cases} x^3 - (3y^2 + 2)x - 5 = 0, \\ 3x^2 - y^2 - 2 \qquad = 0. \end{cases}$$

On doit chercher le plus grand commun diviseur en x des premiers membres de ces équations et arrêter l'opération au reste du premier degré. Ce reste, égalé à zéro, conduit à la relation

$$-8y^2x - 4x - 15 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{15}{4 + 8y^2}.$$

En remplaçant y par β ou $8y^2$ par $8\beta^2$, on doit prendre alors (*Arithm.*

$$\alpha = -\frac{15}{14,3228} = -1,0473,$$

valeur obtenue à un dix-millième près par excès ou par défaut. Les deux racines imaginaires cherchées ont donc pour expression, jusqu'à l'ordre décimal indiqué,

$$-1,0473 \pm 1,1359i.$$

Élimination et méthode d'approximation de Newton combinées.

1414. Quand on opère par voie d'élimination pour arriver à la détermination des racines imaginaires d'une équation (1239, 1240), on peut, après les premières substitutions, recourir à la méthode de Newton pour obtenir rapidement des résultats plus approchés. Cette marche semble devoir être préférée dans la pratique.

Nous nous contenterons de l'appliquer à l'exemple suivant.

1415. *Soit à chercher les racines de l'équation*

$$(1) \qquad f(z) = z^4 - 27z + 81 = 0.$$

D'après le théorème des lacunes (1261), cette équation a au moins deux racines imaginaires. Le théorème de Sturm

(1309) montre facilement qu'elle a ses quatre racines imaginaires. La suite des fonctions donne, en effet, ce tableau :

	$-\infty$.	$+\infty$.
$Z = z^4 - 27z + 81 \ldots\ldots$	+	+
$Z_1 = 4z^3 - 27 \ldots\ldots$	−	+
$Z_2 = 81z - 324 \ldots\ldots$	−	+
$Z_3 = -18549 \ldots\ldots$	−	−

Pour trouver les racines dont il s'agit, nous poserons $z = x + yi$, et nous obtiendrons (1239, 1240) les deux équations

$$f(x) - f''(x)\frac{y^2}{1.2} + f^{IV}(x)\frac{y^4}{1.2.3.4} = 0,$$

$$f'(x) - f'''(x)\frac{y^2}{1.2.3} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 6y^2x^2 - 27x + y^4 + 81 = 0, \tag{2}$$

$$4x^3 - 4y^2x - 27 = 0. \tag{3}$$

On déduit de l'équation (3)

$$y^2 = \frac{4x^3 - 27}{4x} \tag{4}$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation (2), y est éliminée. On trouve ainsi, en changeant les signes des deux membres,

$$64x^6 - 1296x^2 - 729 = 0,$$

équation qui n'a, comme racines réelles (1256), qu'une racine positive et une racine négative. On pourrait la résoudre directement à ce point de vue; mais les calculs sont plus simples, si l'on change de variable en posant

$$x = \frac{\sqrt{v}}{2}. \tag{5}$$

On a alors $64x^6 = v^3$, $1296x^2 = 324v$, et l'équation en x devient

$$\varphi(v) = v^3 - 324v - 729 = 0. \tag{6}$$

Cette dernière équation n'a qu'une racine positive, et c'est

celle-là qu'il faut calculer. En mettant le premier membre de l'équation (6) sous la forme

$$v(v^2 - 324) - 729,$$

on voit qu'il faut commencer à 18 les substitutions entières. On a successivement

$$\varphi(18) = -729, \qquad \varphi(19) = -26, \qquad \varphi(20) = +791.$$

La racine positive cherchée tombe donc entre 19 et 20; comme on a $\varphi(19,1) = +50,471$, elle tombe entre 19 et 19,1. On passe alors aux centièmes, et, comme on a

$$\varphi(19,03) = -3,178673, \qquad \varphi(19,04) = +4,451264,$$

cette même racine est comprise entre 19,03 et 19,04. Une première application de la formule de Newton (1391, 1392) donne

$$-\frac{\varphi(19,03)}{\varphi'(19,03)} = -\frac{-3,178673}{762,4227} = 0,0041.$$

On a donc les deux limites 19,0341 et 19,0342, pour lesquelles on trouve

$$\varphi(19,0341) = -0,051780178179$$

et

$$\varphi(19,0342) = +0,024509481688.$$

Une nouvelle application de la formule donne

$$-\frac{\varphi(19,0341)}{\varphi'(19,0341)} = -\frac{-0,051780178179}{762,89088843} = 0,00006787.$$

On a donc, comme nouvelles limites, 19,03416787 et 19,03416788, de sorte qu'on prendra, par défaut,

$$v = 19,03416787.$$

La relation (5) conduira ensuite, avec la même approximation (*Arithm.*, 343), à la valeur

$$x = \frac{\sqrt{v}}{2} = \pm 2,1814\,0825.$$

L'équation (4) donnera alors, *pour la valeur positive de x* (*Arithm.*, 332),

$$y^2 = 1,664210,$$

c'est-à-dire (*Arithm.*, 343)

$$y = \pm 1,290042;$$

et, *pour la valeur négative de x*,

$$y^2 = 7,852873,$$

c'est-à-dire

$$y = \pm 2,802297.$$

On a donc, finalement, pour les quatre racines imaginaires de l'équation (1),

$$z = +2,181408 \pm 1,290042\,i,$$
$$z = -2,181408 \pm 2,802297\,i.$$

La marche qu'on vient d'exposer est également applicable aux équations dont tous les coefficients ne sont pas réels.

LIVRE QUINZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

1416. Nous avons marqué (1041) la distinction nécessaire entre la résolution des équations numériques et celle des équations générales, et nous avons dit que, au delà du quatrième degré, la résolution algébrique des équations *générales* devenait impossible.

Après avoir traité complètement de la résolution numérique des équations de tous les degrés dans le Livre précédent, nous allons consacrer celui-ci à l'exposition des méthodes spécialement applicables aux équations du troisième et du quatrième degré, et à certaines classes d'équations de tous les degrés. Mais là, nous serons forcé de nous borner, le champ à parcourir devenant beaucoup trop étendu.

Il convient d'abord de remarquer que toutes les méthodes qui ont été employées jusqu'à LAGRANGE, pour résoudre les équations générales du troisième et du quatrième degré, consistent à ramener leur résolution (par des substitutions ou transformations convenables) à celle d'une équation de *degré inférieur*, qu'on appelle la *réduite* ou la *résolvante* de la proposée. Les racines de la résolvante étant déterminées, celles de la proposée s'ensuivent. La résolution de l'équation du second degré elle-même n'échappe pas au fond à cette marche (*Alg. élém.*, 232).

Les racines de l'équation donnée étant ainsi des fonctions des racines de la résolvante, celles de la résolvante sont à leur

tour des fonctions des racines de la proposée. Il en résulte que les méthodes dont il s'agit reviennent à trouver une fonction des racines de l'équation considérée qui puisse dépendre d'une équation de degré inférieur, et faire ensuite connaître facilement les racines de la proposée.

C'est d'après ces principes que LAGRANGE [1] a donné une méthode uniforme très remarquable pour la résolution algébrique des équations des quatre premiers degrés, méthode qui peut s'appliquer également aux équations binômes de tous les degrés.

Malheureusement, passé le quatrième degré, cette méthode ne conduit plus qu'à des résolvantes dont le degré est supérieur à celui de l'équation donnée et qui, par conséquent, ne peuvent plus utilement être employées à sa résolution.

Nous laisserons donc de côté la méthode de LAGRANGE, d'ailleurs plus longue, et nous nous en tiendrons aux méthodes spéciales par lesquelles on est parvenu en premier lieu à résoudre algébriquement les équations du troisième et du quatrième degré.

---

[1] LAGRANGE, *Traité de la résolution des équations numériques*, Note XIII, et *Mémoires de l'Académie de Berlin* (1770, 1771).

Comme l'illustre auteur l'indique, VANDERMONDE, par une méthode plus directe (c'est Lagrange qui parle), était arrivé en même temps que lui aux mêmes résultats (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1771).

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Cas particulier de l'équation du troisième degré.

1117. Comme nous l'avons fait pour le second degré (*Algèbre élém.*), nous considérerons d'abord un cas particulier.

Supposons que l'équation proposée n'ait ni terme du second degré, ni terme du premier, c'est-à-dire qu'elle se réduise à la forme binôme (*Alg. élém.*, 231)

$$x^3 - A = 0, \tag{1}$$

A étant une quantité quelconque, réelle ou imaginaire. On en déduit

$$x = \sqrt[3]{A},$$

et l'inconnue est l'une quelconque (117) des racines cubiques de A.

Si l'on pose (107)

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

on a, par la formule de Moivre (114 et suiv.),

$$x = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right),$$

et l'on trouvera les trois valeurs de x ou les trois racines de l'équation (1), en substituant à l'entier k les valeurs 0, 1, 2.

On peut aussi se servir de cette propriété fondamentale, que, *dans tous les ordres, les racines d'une quantité quelconque s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles par les racines correspondantes de l'unité* (121).

Or, si l'on part de l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

dont l'une des racines est évidemment égale à 1, on a, en la supprimant, c'est-à-dire en divisant le premier membre $x^3 - 1$ par $x - 1$, à résoudre l'équation du second degré

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

d'où résultent les deux autres racines (1)

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};$$

et il est facile de vérifier, comme on l'a déjà fait (122), que *chacune d'elles est le carré de l'autre*. Ainsi, l'unité a trois racines cubiques, dont deux sont imaginaires, et si l'une de ces racines imaginaires est désignée par α, l'autre le sera par α^2.

Par suite, en revenant à l'équation (1) ou $x^3 - A = 0$, si a est l'une quelconque des trois racines cubiques de A, les trois racines de l'équation (1) ont pour expressions

$$a, \quad a\alpha, \quad a\alpha^2.$$

Cas général de l'équation du troisième degré.

1418. Prenons maintenant l'équation du troisième degré sous sa forme la plus générale

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Nous ramènerons d'abord le coefficient de son premier terme à l'unité en multipliant ses racines par $3A_0$ (1103) ou en remplaçant x par

$$\frac{x}{3A_0}.$$

---

(1) On trouverait facilement les mêmes résultats, à l'aide de la formule de Moivre appliquée à l'unité, c'est-à-dire à l'aide de la formule (118)

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

$k = 0$ donne $\sqrt[3]{1} = 1$; $k = 1$ donne $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $k = 2$ donne $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*Trigon.*).

Il viendra

$$A_0 x^3 + 3A_0A_1 x^2 + 9A_0^2A_2 x + 27A_0^3A_3 = 0$$

ou, en divisant par A_0,

$$x^3 + 3A_1 x^2 + 9A_0A_2 x + 27A_0^2A_3 = 0.$$

Pour faire disparaître le second terme de cette première transformée, il faut (1110) remplacer x par

$$x - \frac{3A_1}{3} \qquad \text{ou par} \qquad x - A_1.$$

On voit que cette double transformation revient à remplacer immédiatement, dans l'équation proposée, x par

$$\frac{x - A_1}{3A_0}.$$

Qu'on opère d'une manière ou de l'autre (en chassant les dénominateurs dans l'hypothèse de la transformation immédiate), on trouve pour nouvelle transformée

$$x^3 + 3(3A_0A_2 - A_1^2)x + (2A_1^3 - 9A_0A_1A_2 + 27A_0^2A_3) = 0.$$

On peut donc réduire toute équation complète du troisième degré à la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

en posant

$$p = 3(3A_0A_2 - A_1^2), \qquad q = 2A_1^3 - 9A_0A_1A_2 + 27A_0^2A_3;$$

et, lorsqu'on aura obtenu les racines de cette dernière équation, il faudra les *augmenter* de $-A_1$, puis *diviser* les résultats par $3A_0$, pour avoir les racines de la proposée.

1419. Nous n'avons donc plus qu'à chercher les formules générales de résolution de l'équation

(1) $$x^3 + px + q = 0.$$

Pour cela, posons

(2) $$y + z.$$

L'équation (1) devient, par substitution,

$$(y + z)^3 + p(y + z) + q = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0$$

ou, en groupant les termes,

(1 *bis*) $$y^3+z^3+q+(y+z)(3yz+p)=0.$$

Mais le partage d'une quantité x en deux autres, y et z, peut se faire d'une infinité de manières ou, si l'on veut, les inconnues auxiliaires y et z n'étant assujetties qu'à la condition (2) on peut les soumettre à cette seconde condition, d'ailleurs arbitraire,

(3) $$3yz+p=0 \qquad \text{ou} \qquad z=-\frac{p}{3y}.$$

L'équation (1 *bis*) devient alors

(4) $$y^3-\frac{p^3}{27y^3}+q=0 \qquad \text{ou} \qquad y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

équation qui peut se résoudre comme les équations du second degré, en regardant y^3 comme l'inconnue. Elle fera donc connaître y, d'où l'on déduira ensuite z par la relation (3), et l'on aura l'inconnue principale x par la relation (2).

Comme on a à la fois, d'après ce qui précède,

$$y^3+z^3=-q \qquad \text{et} \qquad y^3z^3=-\frac{p^3}{27},$$

on peut remarquer aussi qu'on connaît la somme et le produit des deux quantités y^3 et z^3, et qu'elles sont, par suite, les racines de l'équation du second degré (*Alg. élém.*)

(4 *bis*) $$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0,$$

réduite qui remplace alors la *résolvante* (4) en y (1416).

On a donc finalement

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \qquad z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

c'est-à-dire

(5) $$\begin{cases} y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \end{cases}$$

et, d'après (2),

$$6)\quad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Telle est la formule générale de résolution de l'équation du troisième degré privée de son second terme. Cette formule est attribuée à TARTAGLIA, mais elle porte le nom de CARDAN (1), qui lui a certainement donné une plus grande extension. VIÈTE et ALBERT GIRARD s'en sont ensuite occupés.

Les deux radicaux cubiques qui entrent dans la valeur de x sont respectivement susceptibles de trois déterminations distinctes (117, 1417). En réunissant ces déterminations deux à deux de toutes les manières possibles, on obtiendrait donc *neuf* valeurs pour l'inconnue, qui n'en admet que *trois* (1061). On remarque alors que, en vertu de l'équation de condition (3), on ne doit assembler que les déterminations dont le produit est égal à $-\frac{p}{3}$.

Si l'on désigne alors par A et par B deux déterminations respectives satisfaisant à cette condition, par α et par α^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, les déterminations du premier radical cubique de la valeur de x seront (121, 1417)

$$A,\quad A\alpha,\quad A\alpha^2,$$

et celles du second,

$$B,\quad B\alpha,\quad B\alpha^2.$$

Le produit AB étant, par hypothèse, égal à $-\frac{p}{3}$, et α^3 étant l'unité, le produit des déterminations à associer pour avoir les valeurs de x devra nécessairement être égal à $AB\alpha^3$ ou à AB, et l'on aura ainsi, pour les *trois* valeurs de x [équation (6)]

$$x_1 = A + B,$$
$$x_2 = A\alpha + B\alpha^2,$$
$$x_3 = A\alpha^2 + B\alpha,$$

(1) CARDAN et TARTAGLIA, savants italiens, nés au commencement du XVI^e siècle; VIÈTE, profond mathématicien français (1540-1603); ALBERT GIRARD, géomètre hollandais, mort en 1634.

ou, en remplaçant α et α^2 par leurs valeurs (1417),

$$(7)\quad \begin{cases} x_1 = A + B, \\ x_2 = A\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} + B\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{A+B}{2} + i\dfrac{(A-B)\sqrt{3}}{2}, \\ x_3 = A\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} - B\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{A-B}{2} - i\dfrac{A-B}{2}\sqrt{3}. \end{cases}$$

1420. Les six autres valeurs de x qu'on doit rejeter sont, d'une part

$$A + B\alpha, \quad A\alpha + B, \quad A\alpha^2 + B\alpha^2,$$

et, de l'autre,

$$A + B\alpha^2, \quad A\alpha^2 + B, \quad A\alpha + B\alpha.$$

Le produit des déterminations associées est $AB\alpha$ ou $-\frac{p\alpha}{3}$, pour les premières (puisque $\alpha^3 = \alpha^3\alpha = \alpha$); il est $AB\alpha^2$ ou $-\frac{p\alpha^2}{3}$ pour les secondes.

Par conséquent, la *formule de Cardan* résout à la fois les trois équations (1419)

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^3 + p\alpha x + q = 0, \quad x^3 + p\alpha^2 x + q = 0;$$

et, en égalant à zéro le produit de leurs premiers membres, on obtient l'équation *résultante* du *neuvième degré* qui, d'après les valeurs de α, α^2, α^3, se réduit à

$$x^9 + 3qx^6 + (p^3 + 3q^2)x^3 + q^3 = 0.$$

1421. La méthode exposée (1419) pour la résolution générale de l'équation du troisième degré privée de son second terme est due à Hudde (1), et elle est applicable, que les coefficients p et q soient réels ou imaginaires. Nous allons maintenant pousser plus loin la discussion de la formule de Cardan, en supposant ces coefficients réels.

---

(1) Savant géomètre hollandais (1633-1704).

Discussion de la formule de Cardan, lorsque les coefficients p et q sont réels.

1422. Nous distinguerons trois cas.

Premier cas. — On a

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Dans ce cas, l'équation (1) [1419] a nécessairement (1286) une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. C'est ce que les formules (5) et (7) [1419] vérifient immédiatement.

En effet, dans les valeurs (5) de y et de z, les radicaux cubiques recouvrant alors chacun une quantité réelle ont une de leurs déterminations réelle, et l'on peut désigner respectivement ces deux déterminations par A et par B. On voit donc, par les formules (7), que la racine x_1 est réelle et que les deux autres racines x_2 et x_3 sont imaginaires conjuguées; car l'hypothèse adoptée empêche qu'on puisse avoir $A = B$.

Deuxième cas. — On a

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

L'équation (1) a, dans ce cas, trois racines réelles, dont deux sont égales entre elles (1286).

En effet, d'après les valeurs (5) de y et de z, on a alors

$$A = B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

et les formules (7) donnent

$$x_1 = A + B, \qquad x_2 = x_3 = -\frac{A+B}{2},$$

ou, si l'on veut, en conservant seulement la valeur arithmétique du radical,

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \qquad x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

TROISIÈME CAS. — On a

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Dans ce cas, l'équation (1) a ses trois racines réelles et inégales (1286).

Au premier abord, les formules (5) et (7) [1419] semblent contredire ce résultat connu, puisque, dans les valeurs (5) de y et de z, les deux radicaux cubiques recouvrent une *quantité imaginaire* et n'ont, respectivement, aucune détermination réelle (1). Mais il est facile de lever cette première difficulté.

La racine cubique d'une quantité imaginaire étant, d'une manière générale, une imaginaire de même forme (117),

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

et

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ont trois valeurs imaginaires, évidemment conjuguées (114). On peut donc (121) représenter les premières par

$$a + bi, \quad (a + bi)\alpha, \quad (a + bi)\alpha^2,$$

et, les secondes, par

$$a - bi, \quad (a - bi)\alpha, \quad (a - bi)\alpha^2.$$

Il vient alors, en se rappelant qu'on a

$$\alpha + \alpha^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -1,$$

$$\alpha - \alpha^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3},$$

---

(1) Il n'y a pas lieu de s'étonner de ce qui arrive ici ; car, en posant

$$x = y + z, \qquad yz = -\frac{p}{3},$$

rien n'exprime ou n'exige que les quantités y et z soient réelles. Et nos calculs montrent que ces quantités sont imaginaires, précisément quand les trois racines de l'équation donnée sont réelles.

et en associant toujours les déterminations dont le produit est $-\frac{p}{3}$ (condition qu'on suppose remplie par les deux déterminations $a+bi$ et $a-bi$),

$$x_1=(a+bi)\quad+(a-bi)\quad=2a,$$
$$x_2=(a+bi)\alpha+(a-bi)\alpha^2=-a-b\sqrt{3},$$
$$x_3=(a+bi)\alpha^2+(a-bi)\alpha=-a+b\sqrt{3}.$$

Les trois racines de l'équation donnée sont donc bien réelles, quoiqu'elles se présentent sous forme imaginaire. On peut montrer, en outre, qu'elles sont *inégales*.

On ne peut pas avoir $x_2=x_3$, car b serait alors nul, et les trois racines cubiques des quantités imaginaires

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

ne seraient pas *toutes* imaginaires; ce qui est impossible.

On ne peut pas avoir non plus $x_1=x_2$ ou $x_1=x_3$; car, de $2a=-a\mp b\sqrt{3}$, il résulterait

$$3a=\mp b\sqrt{3}\qquad\text{ou}\qquad b=\mp a\sqrt{3}.$$

On aurait donc

$$a+bi=a(1\mp i\sqrt{3})$$

ou, à cause de $\alpha=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ (puisque α est l'une quelconque des deux racines cubiques imaginaires de l'unité),

$$a+bi=-2a\alpha.$$

Il viendrait alors, en élevant au cube,

$$(a+bi)^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-8a^3,$$

égalité impossible d'après l'hypothèse $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, puisque le dernier membre est réel.

Cas irréductible.

1423. Le troisième cas qu'on vient d'examiner est très remarquable. Les racines de l'équation donnée sont alors toutes les trois réelles et inégales, et la formule de Cardan cache cette réalité sous une forme compliquée d'imaginaires.

Il y a plus. Essayons de mettre *effectivement* les radicaux cubiques qui entrent dans la formule de Cardan sous la forme $a + bi$ que nous avons, *théoriquement*, supposée acquise dans ce qui précède.

Les trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ont alors pour expressions (1422, 3e cas)

$$x_1 = 2a, \qquad x_2 = -a - b\sqrt{3}, \qquad x_3 = -a + b\sqrt{3}.$$

Les relations connues entre les racines (1080) donnent d'ailleurs

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$
$$x_1x_2x_3 = -q.$$

La première est satisfaite d'elle-même, et les deux autres deviennent, par substitution,

$$a^2 + b^2 = -\frac{p}{3}, \qquad 2a^3 - 6ab^2 = q.$$

En éliminant b^2 entre ces deux équations de condition, il vient

$$2a^3 - 6a\left(-\frac{p}{3} - a^2\right) = q$$

ou

$$a^3 + \frac{p}{4}a - \frac{q}{8} = 0.$$

Or, la fonction qui caractérise la nature des racines de cette équation en a est précisément (1286)

$$4\frac{p^3}{64} + 27\frac{q^2}{64}$$

ou, en multipliant par la quantité positive 64, ce qui est permis,

$$4p^3 + 27q^2.$$

On retombe ainsi sur la fonction qui caractérise la nature des racines de l'équation proposée. Il en résulte que l'équation d'où a dépend a ses trois racines réelles et inégales comme l'équation en x, et que la difficulté pour calculer a est identiquement la même que pour calculer l'inconnue x. Si l'on essayait de calculer b au lieu de a, on parviendrait à un résultat analogue. C'est à cause de cette curieuse circonstance qu'on a donné à ce troisième cas, véritable impasse mathématique, le nom de *cas irréductible*.

On pourrait, il est vrai, développer en série la racine cubique ou la puissance fractionnaire (98)

$$\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Dans ce développement, la partie réelle représenterait a et le coefficient de i représenterait b. Mais il est bien préférable de ramener à la forme trigonométrique les deux radicaux cubiques de la formule de Cardan. C'est ce que nous montrerons dans un instant (1426).

Calcul des racines de l'équation du troisième degré, lorsqu'elle n'a qu'une seule racine réelle.

1424. L'équation donnée étant

$$x^3 + px + q = 0,$$

reprenons la formule de Cardan

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

On a ici $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Par conséquent, chaque radical cubique est susceptible d'une détermination réelle, et d'une seule; et, en désignant ces déterminations par A et par

B, on a, pour les trois racines de l'équation (1419),

$$x_1 = A + B,$$
$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2},$$
$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}.$$

On n'aura donc qu'à calculer séparément, en s'aidant des Tables de logarithmes, les deux déterminations A et B, et la question sera résolue par les formules précédentes.

On pourrait avoir recours aux transformations trigonométriques pour rendre A et B directement calculables par logarithmes ; mais la marche que nous indiquons est incontestablement plus rapide. Nous donnerons un exemple.

1425. Exemple. — Soit l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

déjà considérée (1413), et qui n'a qu'une seule racine réelle positive et deux racines imaginaires conjuguées. Nous avons trouvé pour ces racines les valeurs

$$x_1 = \quad 2,094551\ldots,$$
$$x_2 = -1,0473 \quad \ldots + 1,1359\ldots i,$$
$$x_3 = -1,0473 \quad \ldots - 1,1359\ldots i.$$

Nous allons les vérifier en appliquant la formule de Cardan, c'est-à-dire les expressions du numéro précédent. On a ici

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{8}{27}}},$$
$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{8}{27}}},$$

c'est-à-dire, en réduisant en décimales et en extrayant la racine carrée,

$$A = \sqrt[3]{2,5 + \sqrt{5,95370370}} = \sqrt[3]{4,9400212},$$
$$B = \sqrt[3]{2,5 - \sqrt{5,95370370}} = \sqrt[3]{0,0599788}.$$

L'emploi des logarithmes pour extraire les racines cubiques donne ensuite

$$A = 1,7031108\ldots, \qquad B = 0,3914406\ldots;$$

et il en résulte comme ci-dessus, avec quelques décimales de plus,

$$x_1 = A + B = 2,0945514\ldots,$$

$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}\,i = -1,0472757 + 1,1359397\,i,$$

$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}\,i = -1,0472757 - 1,1359397\,i.$$

Calcul des racines de l'équation du troisième degré, lorsqu'elle a ses trois racines réelles : cas irréductible.

1426. **La condition $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ est supposée remplie.** La quantité placée sous les radicaux du second degré de la formule de Cardan

$$(1)\qquad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

est donc négative, et la valeur de x se présente comme somme de deux quantités imaginaires : c'est le cas irréductible (1422).

Pour ramener chaque imaginaire à la forme trigonométrique (107), nous poserons [en désignant par ρ le module et par φ l'argument qui sont communs aux deux imaginaires conjuguées]

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\varphi, \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2\sin^2\varphi.$$

Il viendra

$$x = \sqrt[3]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + \sqrt[3]{\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$$

ou, en appliquant la formule de Moivre (117),

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\varphi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi+\varphi}{3}\right) \\ \quad + \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\varphi}{3} - i\sin\dfrac{2k\pi+\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

Dans cette formule, on doit donner à l'entier k les valeurs successives 0, 1, 2, et il doit recevoir la même valeur dans les deux parenthèses du second membre.

Il faut, en effet, que le produit yz soit égal à $-\frac{p}{3}$, c'est-à-dire réel et même positif, puisque p est négatif. Or, ce produit est celui des deux radicaux cubiques de la formule (1) ou des deux parties de la somme qui constitue le second membre de la formule (2). En substituant à k la même valeur dans les deux parenthèses, on obtient évidemment comme produit, puisqu'il s'agit d'imaginaires conjuguées (91),

$$\sqrt[3]{\rho^2}.$$

Si l'on donnait, au contraire, à k des valeurs différentes dans les deux parenthèses de la formule (2), les imaginaires ne disparaîtraient plus.

k ayant ainsi la même valeur dans tous les termes du second membre de la formule (2), cette formule se réduit à

$$x = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2k\pi + \varphi}{3}. \tag{3}$$

Des deux relations

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\varphi, \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2\sin^2\varphi,$$

on tire d'ailleurs

$$\frac{q^2}{4} = \rho^2\cos^2\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p^3}{27} = -\rho^2.$$

On a donc

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \text{d'où} \qquad 2\sqrt[3]{\rho} = 2\sqrt[6]{-\frac{p^3}{27}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos\varphi = \frac{-q}{2\rho} = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Quant aux racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, on aura les trois valeurs de x en faisant successivement k égal à 0, 1, 2,

dans la relation (3). Elles prendront donc la forme

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right), \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{4\pi+\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

En se rappelant que les cosinus de deux arcs dont la somme est π sont égaux et de signes contraires, tandis que les cosinus de deux arcs dont la somme est 2π sont égaux et de même signe (*Trigon.*, 17), on peut prendre plus simplement

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right), \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(120^\circ-\frac{\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

Les trois racines obtenus sont bien réelles, et leurs expressions sont calculables par logarithmes.

Si la formule

$$(5)\quad \cos\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

conduit pour $\cos\varphi$ à une valeur négative, on doit chercher dans les Tables, comme on le sait, l'arc φ' qui a le même cosinus pris positivement : φ est le supplément de φ'.

En résumé, *pour traiter le cas irréductible, on détermine d'abord l'angle* φ *compris entre* 0 *et* π, *qui répond à la relation* (5) *indiquée ci-dessus, et l'on n'a qu'à porter sa valeur dans les formules* (4) *ou* (4 *bis*), *pour pouvoir calculer directement par logarithmes les trois racines de l'équation donnée.*

Comme vérification, la somme trouvée pour leurs valeurs doit être nulle ou très approximativement nulle (1080).

1427. Les trois racines étant toujours réelles, si l'on avait

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0,$$

deux des racines deviendraient égales entre elles (1286, 1422). Reprenons les relations

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi, \qquad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\varphi.$$

La deuxième donne alors $\sin^2\varphi=0$, c'est-à-dire $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$. Comme le module ρ est essentiellement positif, la première relation montre que φ sera égal à 0 si q est négatif, et à π si q est positif.

Pour $q<0$, les expressions des trois racines deviennent donc (1426)

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$x_2=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos 60^\circ=-\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos 120^\circ=x_2.$$

Pour $q>0$, ces expressions deviennent

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos 60^\circ=\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$x_2=-2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos 60^\circ=x_1.$$

L'équation du troisième degré admettant, dans cette hypothèse, une seule racine simple et une seule racine double, ces racines doivent être *commensurables* (1376). C'est ce qu'il est facile de vérifier. De l'équation de condition, on déduit

$$\frac{q^2}{4}=-\frac{p^3}{27} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2=\left(-\frac{p}{3}\right)^3.$$

Il en résulte, en remarquant que p est négatif et en

extrayant la racine carrée des deux membres

$$\pm\frac{q}{2}=\pm\left(-\frac{p}{3}\right)\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Si q est <0, il faut croiser les signes des deux membres de cette égalité, et prendre

$$-\frac{q}{2}=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On a alors, d'après les formules précédentes,

$$x_1=\frac{3q}{p} \qquad \text{et} \qquad x_2=x_3=-\frac{3q}{2p}$$

Si q est >0, il faut assembler les signes supérieurs et les signes inférieurs des deux membres de l'égalité et prendre

$$\frac{q}{2}=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On a alors, d'après les formules correspondantes,

$$x_2=\frac{3q}{p} \qquad \text{et} \qquad x_1=x_3=-\frac{3q}{2p}.$$

Ces résultats sont d'accord avec les formules connues (1082, 2°).

1428. On peut indiquer d'avance (ce qui est utile dans certains cas) l'ordre de grandeur des trois racines, *lorsqu'elles sont inégales.*

De la condition (1426)

$$0<\varphi<\pi,$$

on déduit successivement (par division d'abord et par addition ensuite)

$$0<\frac{\varphi}{3}<\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi+\varphi}{3}<\pi,$$

$$\frac{4\pi}{3}<\frac{4\pi+\varphi}{3}<\frac{5\pi}{3}.$$

Le cosinus diminuant quand l'arc augmente de 0 à π, et

augmentant quand l'arc augmente de π à 2π, on a, en prenant les cosinus des arcs comparés,

$$1 > \cos\frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} > \cos\frac{2\pi+\varphi}{3} > -1,$$

$$\frac{1}{2} > \cos\frac{4\pi+\varphi}{3} > -\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\cos\frac{\varphi}{3} > \cos\frac{4\pi+\varphi}{3} > \cos\frac{2\pi+\varphi}{3};$$

et il en résulte immédiatement (1426)

$$x_1 > x_3 > x_2.$$

Ce résultat concorde avec les résultats obtenus au numéro précédent. x_3 étant toujours comprise entre x_1 et x_2 peut, dans le cas d'une racine double, devenir égale, soit à sa limite inférieure x_2 [$q < 0$ et $\varphi = 0$], soit à sa limite supérieure x_1 [$q > 0$ et $\varphi = \pi$].

Applications.

1429. A cause de l'importance de la résolution directe de l'équation du troisième degré, nous indiquerons complètement la marche des calculs dans les exemples suivants :

1° *Soit à résoudre l'équation*

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

déjà considérée (1409), *et dont les trois racines sont réelles.*

Nous aurons d'abord (1426)

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{343}{27}} \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{-7}{2\rho}.$$

$\cos\varphi$ étant ici négatif, il faudra chercher l'angle supplémentaire

$$\varphi' = 180° - \varphi.$$

Nous indiquerons toujours par la notation $\bar{L}$ les logarithmes *préparés*,

ou les logarithmes négatifs dont la caractéristique seule a été rendue négative (*Alg. élém.*, 396).

CALCUL DE ρ.	CALCUL DE φ.
$\log 343 = 2,5352941$	$\log 7 = 0,8450980$
$\overline{\mathrm{L}}.27 = \overline{2},5686362$	$\overline{\mathrm{L}}.2 = \overline{1},6989700$
$\log \rho^2 = 1,1039303$	$\overline{\mathrm{L}}\rho = \overline{1},4480349$
$\log \rho = 0,5519651$	$\log\cos\varphi' = \overline{1},9921029$
$\varphi' = 10°53'36'',1,$	$\varphi = 180° - \varphi' = 169°6'23'',9,$

$$\frac{\varphi}{3} = 56°22'7'',97, \quad 60° - \frac{\varphi}{3} = 3°37'52''.03, \quad 120° - \frac{\varphi}{3} = 63°37'52'',03.$$

Nous aurons ensuite $\left[\text{puisque } \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\rho}\ (1426)\right]$

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(60° - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120° - \frac{\varphi}{3}\right).$$

Nous chercherons $-x_2$, et nous changerons le signe du résultat.

CALCUL DE x_1.	CALCUL DE x_2.	CALCUL DE x_3.
$\log 2 = 0,3010300$	$\log 2 = 0,3010300$	$\log 2 = 0,3010300$
$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$	$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$	$\log\sqrt[3]{\rho} = 0,1839884$
$\log\cos\frac{\varphi}{3} = \overline{1},7433873$	$\log\cos\left(60° - \frac{\varphi}{3}\right) = \overline{1},9991272$	$\log\cos\left(120° - \frac{\varphi}{3}\right) = \overline{1},6475283$
$\log x_1 = 0,2284057$	$\log(-x_2) = 0,4841456$	$\log x_3 = 0,1325467$
$x_1 = 1,692021$	$x_2 = -3,048917$	$x_3 = 1,356896$

Les valeurs des racines sont les mêmes que celles que nous avons trouvées au n° 1409, et l'on a bien (1428)

$$x_1 > x_3 > x_2.$$

2° *Partager un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle au grand cercle qui lui sert de base.*

Le plan sécant partage l'hémisphère en deux parties : l'une d'elles est un segment sphérique à une base, qui s'appuie sur le cercle déterminé par le plan sécant, et dont nous désignerons la hauteur par x. Le volume de ce segment sphérique à une base devant être la moitié de celui

de l'hémisphère, nous aurons, en appelant R le rayon de la sphère (*Géom.*, 596, 589),

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x) = \frac{1}{3}\pi R^3$$

L'équation du problème est donc

$$x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0.$$

Si l'on prend pour plus de simplicité le rayon de la sphère pour unité, cette équation devient

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0,$$

et c'est celle qu'il faut résoudre. On fera disparaître son second terme en posant (1110)

$$x = y + \frac{3}{3} \qquad \text{ou} \qquad x = y + 1,$$

d'où

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

Cette dernière équation a ses trois racines réelles (1422), puisqu'on a

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 < 0;$$

d'après le théorème de Descartes, elle a une seule racine positive et deux racines négatives. Au point de vue de la question posée, x doit être positif et moindre que le rayon 1. La relation $x = y + 1$ montre alors qu'il faut rejeter la valeur positive de y et n'admettre, de ses deux valeurs négatives, que celle qui est moindre que 1 en valeur absolue.

On a, pour l'équation en y (1426),

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{27}{27}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi = \frac{-q}{2\rho} = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte

$$\varphi = 60^\circ \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi}{3} = 20^\circ.$$

Les trois racines de l'équation en y sont donc

$$y_1 = 2\cos 20^\circ, \qquad y_2 = -2\cos 40^\circ, \qquad y_3 = 2\cos 100^\circ.$$

En se servant des Tables des *lignes trigonométriques naturelles* qui terminent le t. II (*Trigon.*, p. 763), on a

$$\cos 20^\circ = 0{,}93969, \qquad \cos 40^\circ = 0{,}76604,$$
$$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ = -0{,}17365,$$

c'est-à-dire

$$y_1 = 1{,}87938, \qquad y_2 = -1{,}53208, \qquad y_3 = -0{,}34730.$$

On a, par suite ($x = y + 1$),

$$x_1 = 2,87938, \qquad x_2 = -0,53208, \qquad x_3 = 0,65270.$$

D'après ce qui précède, la seule racine x_3 répond au problème tel qu'il a été énoncé. On en déduit, si l'on veut, pour la distance du plan sécant au centre de la sphère,

$$1 - x_3 = 0,34730 = -y_3.$$

Résolution trigonométrique du cas irréductible.

1430. Quand l'équation du troisième degré à coefficients réels a ses trois racines réelles, il est facile de la résoudre en se reportant au problème de la *Trisection de l'angle*.

Nous avons vu, en effet (*Trigon.*, 73), que, lorsqu'on cherche $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$, l'inconnue, $x = \cos\frac{a}{3}$, est déterminée par l'équation du troisième degré

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos a}{4} = 0. \tag{1}$$

On trouve alors, par la Trigonométrie, que les trois racines de cette équation sont réelles et ont pour expressions

$$\cos\frac{a}{3}, \quad \cos\left(120^\circ + \frac{a}{3}\right), \quad \cos\left(240^\circ + \frac{a}{3}\right)$$

ou, d'une manière générale,

$$\cos\frac{2k\pi + a}{3},$$

en faisant successivement k égal à 0, 1, 2.

Si l'on pouvait identifier l'équation donnée du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

avec l'équation (1), ses racines seraient donc immédiatement connues. Or l'équation (2) renferme deux paramètres arbitraires p et q, tandis que l'équation (1) n'en renferme qu'un seul, $\cos a$. Pour rendre l'identification possible, il faut donc introduire une nouvelle quantité dans l'équation (1). C'est à quoi l'on arrivera en multipliant ses racines par un paramètre

indéterminé ρ. On obtient ainsi la transformée (1103)

$$x^3 - \frac{3}{4}\rho^2 x - \rho^3 \frac{\cos a}{4} = 0, \tag{1 bis}$$

et les racines de cette nouvelle équation ont, à leur tour, pour expressions

$$\rho \cos \frac{2k\pi + a}{3} \qquad [k = 0, 1, 2]. \tag{3}$$

L'identification des équations (2) et (1 *bis*), devenue possible, conduit aux relations

$$p = -\frac{3}{4}\rho^2, \qquad q = -\frac{1}{4}\rho^3 \cos a.$$

Il en résulte

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos a = \frac{-4q}{\rho^3} = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Ainsi, en donnant à ρ et à $\cos a$ ces valeurs, les racines de l'équation (2) se confondront avec celles de l'équation (1 *bis*), de sorte qu'elles seront exprimées par la formule (3). On est ramené, par conséquent, d'une manière très simple, aux valeurs déjà obtenues (1426).

D'ailleurs, *pour que ces valeurs soient admissibles*, il faut, puisque $\cos a$ est réel, que ρ le soit aussi, c'est-à-dire que p soit négatif. Il faut, de plus, que le carré de $\cos a$ soit moindre que l'unité, puisque $\cos a$ est compris entre -1 et $+1$. On en conclut

$$\frac{q^2}{4} < -\frac{p^3}{27} \qquad \text{ou} \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

ce qui est précisément la condition pour que l'on se trouve effectivement *dans le cas irréductible* (1426).

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Méthode de Ferrari.

1431. La méthode la plus anciennement connue pour résoudre l'équation du quatrième degré est celle de Louis Ferrari (1), élève de Cardan. Cette méthode réduit finalement la résolution de l'équation du quatrième degré à celle de deux équations du second degré : voici en quoi elle consiste.

Supposons qu'on ait ramené l'équation donnée à la forme

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0 \qquad (1)$$

ou

$$x^4 + Px^3 = -Qx^2 - Rx - S.$$

Si l'on ajoute aux deux membres $\frac{P^2x^2}{4}$, le premier membre deviendra un carré, et l'on aura

$$\left(x^2 + \frac{P}{2}x\right)^2 = \left(\frac{P^2}{4} - Q\right)x^2 - Rx - S.$$

Cherchons maintenant à rendre également le second membre un carré, sans que le premier membre cesse de remplir cette condition. Pour cela, y étant une indéterminée, ajoutons aux deux membres de la dernière équation la quantité

$$\left(x^2 + \frac{P}{2}x\right)y + \frac{y^2}{4}.$$

(1) Mathématicien italien de la première partie du XVI^e siècle.

Il viendra

$$(2)\quad \left(x^2+\frac{P}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{P^2}{4}-Q+y\right)x^2+\left(\frac{Py}{2}-R\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-S\right)$$

Pour que le second membre de l'équation (2) soit aussi un carré, il suffit que y satisfasse (*Alg. élém.*) à la relation

$$(3)\quad \left(\frac{Py}{2}-R\right)^2=\left(\frac{P^2}{4}-Q+y\right)(y^2-4S),$$

c'est-à-dire, en développant, à l'équation du troisième degré

$$(3\,bis)\quad y^3-Qy^2+(PR-4S)y-S(P^2-4Q)-R^2=0.$$

Cette équation du troisième degré est la *réduite* ou la *résolvante* de l'équation donnée.

La connaissance d'une seule racine de la résolvante entraîne la résolution de l'équation (1), ou de l'équation (2) qui n'en diffère que par la forme.

En effet, l'équation (2) peut alors s'écrire [d'après l'équation (3)]

$$\left(x^2+\frac{P}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{P^2}{4}-Q+y\right)\left[x+\frac{\frac{Py}{2}-R}{2\left(\frac{P^2}{4}-Q+y\right)}\right]^2=0;$$

et, son premier membre étant la différence de deux carrés, elle se décompose (en ordonnant), dans ces deux équations du second degré

$$(4)\quad \begin{cases} x^2+\left(\frac{P}{2}+\sqrt{\frac{P^2}{4}-Q+y}\right)x+\frac{y}{2}+\dfrac{\frac{Py}{2}-R}{2\sqrt{\frac{P^2}{4}-Q+y}}=0 \\ x^2+\left(\frac{P}{2}-\sqrt{\frac{P^2}{4}-Q+y}\right)x+\frac{y}{2}-\dfrac{\frac{Py}{2}-R}{2\sqrt{\frac{P^2}{4}-Q+y}}=0, \end{cases}$$

qui, résolues, à l'aide d'une seule valeur de y, font connaître les quatre racines de l'équation (1).

On voit que *les racines de l'équation générale du quatrième*

degré sont, comme celles des équations générales du troisième et du second degré, *exprimées par des radicaux.*

Les deux équations (4) ayant respectivement pour racines x_1 et x_2, x_3 et x_4, on a

$$x_1x_2 = \frac{y}{2} + \frac{\frac{Py}{2} - R}{2\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q + y}},$$

$$x_3x_4 = \frac{y}{2} - \frac{\frac{Py}{2} - R}{2\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q + y}},$$

c'est-à-dire, en ajoutant,

$$y = x_1x_2 + x_3x_4.$$

Ainsi, la résolvante (3 *bis*) a pour racine la fonction ci-dessus des quatre racines de la proposée, fonction qui n'est susceptible que de trois valeurs différentes, lorsqu'on varie la substitution des racines de toutes les manières possibles.

Méthode de Descartes.

1432. Nous avons déjà indiqué cette méthode (1133). En exprimant que le trinôme $x^2 + px + q$ est un diviseur du premier membre de l'équation proposée, soit par division, soit par identification (1131), on obtient deux équations entre les inconnues p et q et, en éliminant l'une d'elles, on parvient à une équation du sixième degré qu'on peut toujours (que l'équation donnée du quatrième degré soit ou non privée de son second terme) ramener au troisième degré comme nous l'avons expliqué (1133). Cette équation du troisième degré est la *résolvante*, et elle ne diffère pas au fond de celle de Ferrari. Une seule racine de la résolvante étant déterminée, la résolution de l'équation générale du quatrième degré est encore ramenée à celle de deux équations du second degré.

Reprenons ici la question, en supposant l'équation donnée privée de son second terme, c'est-à-dire de la forme

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{1}$$

et en simplifiant un peu l'élimination. Si l'un des diviseurs du second degré du premier membre est x^2+px+q, celui qui lui sera associé sera de la forme x^2-px+q', puisque, l'équation donnée étant privée de son second terme, la somme de ses racines doit être nulle (1080, 1133). On peut donc écrire identiquement

$$x^4+Ax^2+Bx+C=(x^2+px+q)(x^2-px+q')$$

ou

$$x^4+Ax^2+Bx+C=x^4+p\left|\begin{matrix}x^3+q\\-p^2\\+q'\end{matrix}\right|\begin{matrix}x^2-pq\\+pq'\end{matrix}\Bigg|\,x+qq'.$$

Les équations de condition sont, par suite,

$$q-p^2+q'=A,\qquad pq'-pq=B,\qquad qq'=C.$$

On en déduit

$$q'+q=A+p^2,\qquad q'-q=\frac{B}{p},$$

et, en retranchant ces deux relations membre à membre, après les avoir élevées au carré, il vient, d'après la troisième équation de condition,

$$4qq'=(A+p^2)^2-\frac{B^2}{p^2}=4C.$$

L'inconnue principale p sera donc donnée par l'équation

$$(A+p^2)^2p^2-4Cp^2-B^2=0,$$

qui ne contient que des puissances paires de p, et qui s'abaisse par conséquent du sixième au troisième degré. Si l'on pose $p^2=z$, la résolvante devient, comme précédemment (1133),

$$(2)\qquad z^3+2Az^2+(A^2-4C)z-B^2=0.$$

Si les coefficients de l'équation (1) sont réels, cette résolvante (2) a toujours une racine positive, qui résout la question.

Méthode de Lagrange, formule d'Euler.

1433. Lagrange (¹) a employé pour le quatrième degré la même marche que Hudde pour le troisième degré (1421), en partant de l'équation du quatrième degré privée de son second terme.

Soit donc l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{1}$$

dont nous supposerons immédiatement les coefficients réels.

Posons

$$x = u + v + t. \tag{2}$$

En élevant une première fois au carré, il vient

$$x^2 = u^2 + v^2 + t^2 + 2(uv + ut + vt)$$

ou

$$x^2 - (u^2 + v^2 + t^2) = 2(uv + ut + vt).$$

Si l'on élève une seconde fois au carré, on trouve

$$\begin{aligned} x^4 - 2(u^2 + v^2 + t^2)x^2 + (u^2 + v^2 + t^2)^2 \\ = 4(u^2v^2 + u^2t^2 + v^2t^2) + 8uvt(u + v + t). \end{aligned}$$

En remplaçant dans le dernier terme $u + v + t$ par x et en transposant, on arrive finalement à l'équation

$$\left\{ \begin{aligned} &x^4 - 2(u^2 + v^2 + t^2)x^2 - 8uvtx \\ &+ (u^2 + v^2 + t^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2t^2 + v^2t^2) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1 bis}$$

En raison des trois indéterminées u, v, t, on peut chercher à identifier les équations (1) et (1 *bis*). Les conditions d'identification sont les suivantes :

$$u^2 + v^2 + t^2 = -\frac{p}{2},$$

$$uvt = -\frac{q}{8},$$

$$(u^2 + v^2 + t^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2t^2 + v^2t^2) = r.$$

(¹) *Leçons de Mathématiques données à l'École Normale en* 1795. Leçon troisième.

On en déduit facilement, en élevant la seconde équation au carré et en renversant ensuite l'ordre des deux dernières,

$$(3)\qquad \begin{cases} -(u^2+v^2+t^2)=\dfrac{p}{2}, \\ u^2v^2+u^2t^2+v^2t^2=\dfrac{p^2}{16}-\dfrac{r}{4}=\dfrac{p^2-4r}{16}, \\ u^2v^2t^2=\dfrac{q^2}{64}. \end{cases}$$

Les équations (3) prouvent (1080) que, si l'on prend u^2, v^2, t^2, pour inconnues, ces trois quantités sont racines de l'équation complète du troisième degré

$$(4)\qquad z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0,$$

qui est alors la *réduite* ou la *résolvante* de l'équation (1).

Si l'on désigne par z_1, z_2, z_3, les trois racines de cette résolvante, on aura

$$u^2=z_1, \qquad v^2=z_2, \qquad t^2=z_3,$$

c'est-à-dire

$$u=\sqrt{z_1}, \qquad v=\sqrt{z_2}, \qquad t=\sqrt{z_3}.$$

La valeur de $x=u+v+t$ est donc déterminée, et l'on a, d'une manière générale,

$$(5)\qquad x=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3},$$

formule élégante indiquée pour la première fois par Euler.

Chaque radical carré ayant deux valeurs égales et de signes contraires, si l'on combine ces valeurs de toutes les manières possibles, on trouve pour l'équation (1) *huit* racines au lieu de *quatre*. Mais il faut observer qu'on a élevé au carré les deux membres de la seconde équation de condition obtenue directement,

$$uvt=-\frac{q}{8},$$

et qu'on a doublé par cela même le nombre des solutions (*Alg. élém.*, 104). Il s'ensuit que, pour avoir les véritables racines de l'équation (1), il faut que les radicaux carrés qui entrent dans la valeur (5) de x soient pris *avec des signes*

explicites, tels qu'on ait

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -\frac{q}{8},$$

c'est-à-dire *que le produit des trois valeurs associées soit de signe contraire à q.*

Il est nécessaire de discuter avec soin la formule d'Euler.

Discussion.

1434. Trois cas peuvent se présenter (1), et ces trois cas conduisent pour les racines de l'équation (1) à des formules différentes, suivant que q est positif ou négatif.

La réduite (4) (1433) ayant son dernier terme négatif, quel que soit q, a toujours une racine positive (1054). Par conséquent, les trois cas à examiner sont les suivants : 1° la réduite a ses trois racines positives; 2° la réduite a une racine positive et deux racines négatives; 3° la réduite a une racine positive et deux racines imaginaires conjuguées.

Premier cas. — La réduite ayant ses trois racines z_1, z_2, z_3, positives, nous admettrons que les trois radicaux correspondants $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$, représentent des déterminations positives. Nous aurons alors, pour les quatre racines x_1, x_2, x_3, x_4 de l'équation (1), les deux Tableaux suivants, puisque le produit uvt doit toujours être de signe contraire à q (1433).

q positif...

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

q négatif...

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

(1) La discussion de ces trois cas et de la formule d'Euler a été donnée pour la première fois, d'une manière complètement exacte, par M. Bret (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II).

On voit en même temps que, *lorsque la résolvante a ses trois racines positives, l'équation proposée a ses quatre racines réelles.*

Deuxième cas. — La réduite ayant une racine positive z_1 et deux racines négatives z_2 et z_3, nous admettrons que $\sqrt{z_1}$ représente une détermination positive, tandis que $\sqrt{z_2}$ et $\sqrt{z_3}$ seront des quantités imaginaires qu'on peut mettre sous la forme $i\sqrt{-z_2}$ et $i\sqrt{-z_3}$, en supposant également les deux radicaux positifs. Quand on multipliera les *valeurs* des trois radicaux pour vérifier la condition $uvt = -\frac{q}{8}$, on obtiendra donc dans le premier membre un facteur $i^2 = -1$ qui permettra de changer le signe des deux membres, sans modifier les signes des *valeurs* des radicaux. Par suite, il faudra ici que le produit des trois déterminations choisies ait au contraire le même signe que q. Il en résulte les deux Tableaux suivants pour les valeurs des racines de l'équation (1) :

$$q \text{ positif} \ldots \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

$$q \text{ négatif} \ldots \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

On trouve les mêmes Tableaux que dans le premier cas, mais renversés, c'est-à-dire que celui qui correspondait à q positif correspond maintenant à q négatif, et inversement.

On voit seulement que, *lorsque la résolvante a une racine positive et deux racines négatives, la proposée a,* en général, *ses quatre racines imaginaires.*

Nous disons, *en général,* parce qu'il peut arriver que les deux racines négatives de la réduite soient égales entre elles. Si l'on a $z_2 = z_3$, l'équation proposée présente, à son tour, deux racines réelles égales et deux racines imaginaires conjuguées.

Si q est positif, on a

$$x_3 = x_4 = -\sqrt{z_1},$$
$$x_1 = +\sqrt{z_1} + 2\sqrt{z_2}, \qquad x_2 = +\sqrt{z_1} - 2\sqrt{z_2}.$$

Si q est négatif, on a

$$x_1 = x_2 = +\sqrt{z_1},$$
$$x_3 = -\sqrt{z_1} + 2\sqrt{z_2}, \qquad x_4 = -\sqrt{z_1} - 2\sqrt{z_2}.$$

Troisième cas. — La réduite ayant une racine positive z_1 et deux racines imaginaires conjuguées z_2 et z_3, nous admettrons que $\sqrt{z_1}$ représente une détermination positive, et qu'il en est de même pour $\sqrt{z_2}$ et $\sqrt{z_3}$, qui sont aussi des quantités imaginaires conjuguées quand on prend leurs signes parallèlement (102, 103). On aura donc

$$\sqrt{z_2} = +(a + bi), \qquad \sqrt{z_3} = +(a - bi).$$

Le produit des trois déterminations choisies pour u, v, t, devant être égal à $-\frac{q}{8}$, et le produit de $a + bi$ par $a - bi$ étant la quantité essentiellement positive $a^2 + b^2$, les quatre racines de l'équation (1) auront absolument la même expression que *dans le premier cas.* On n'a donc qu'à se reporter aux deux Tableaux qui répondent à ce premier cas.

En consultant ces Tableaux, et la différence de deux imaginaires conjuguées étant une quantité imaginaire simple, tandis que leur somme est une quantité *réelle,* on voit que, *lorsque la résolvante a une racine positive et deux racines imaginaires conjuguées, l'équation proposée a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.*

Si q est positif, les deux racines réelles sont

$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = -\sqrt{z_1} + 2a,$$
$$x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = -\sqrt{z_1} - 2a,$$

et les deux racines imaginaires conjuguées ont pour expression

$$x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = +\sqrt{z_1} + 2bi,$$
$$x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = +\sqrt{z_1} - 2bi.$$

Si q est négatif, les deux racines réelles sont

$$x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = +\sqrt{z_1} + 2a,$$
$$x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = +\sqrt{z_1} - 2a,$$

et les deux racines imaginaires conjuguées ont pour expressions

$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = -\sqrt{z_1} + 2bi,$$
$$x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = -\sqrt{z_1} - 2bi.$$

Remarque.

1435. Nous avons trouvé pour résolvante (1433) l'équation complète du troisième degré

$$(4) \qquad z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Pour la résoudre *à l'aide des formules démontrées au Chapitre précédent*, il faut faire disparaître son second terme en remplaçant z par $z - \frac{p}{6}$. On obtient comme transformée

$$(4\,bis) \qquad z^3 - \frac{p^2 + 12r}{48}z - \frac{p^3}{864} + \frac{pr}{24} - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Lorsqu'on aura trouvé les racines de cette transformée, il faudra les augmenter de $-\frac{p}{6}$ ou les diminuer de $\frac{p}{6}$ pour avoir d'abord les racines de la résolvante (4) et, ensuite, en consultant les tableaux qui répondent à la nature des racines de la résolvante (1434), les racines mêmes de l'équation proposée.

Exemple.

1436. *Soit à résoudre l'équation*

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$$

La résolvante (4) (1389) est ici

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{3600}{64} = 0,$$

ou, en remarquant que $\frac{3600}{64} = \frac{900}{16}$ et en multipliant les deux membres de l'équation par 16,

$$16z^3 - 200z^2 + 769z - 900 = 0.$$

On vérifie facilement que cette résolvante admet la racine 2,25. En divisant alors son premier membre par $z - 2{,}25$, on trouve pour quotient le trinôme $16z^2 - 164z + 400$ qui, égalé à zéro, fait connaître les deux autres racines de la résolvante; ces racines sont 6,25 et 4. On a ainsi

$$z_1 = 2{,}25, \qquad z_2 = 6{,}25, \qquad z_3 = 4.$$

On a d'ailleurs $q = 60$ ou $q > 0$. En se reportant au premier cas de la discussion (1388), il vient donc, pour les quatre racines réelles de l'équation proposée,

$$x_1 = +\sqrt{2{,}25} + \sqrt{6{,}25} - \sqrt{4} = 1{,}50 + 2{,}50 - 2 = 2,$$
$$x_2 = +\sqrt{2{,}25} - \sqrt{6{,}25} + \sqrt{4} = 1{,}50 - 2{,}50 + 2 = 1,$$
$$x_3 = -\sqrt{2{,}25} + \sqrt{6{,}25} + \sqrt{4} = -1{,}50 + 2{,}50 + 2 = 3,$$
$$x_4 = -\sqrt{2{,}25} - \sqrt{6{,}25} - \sqrt{4} = -1{,}50 - 2{,}50 - 2 = -6.$$

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET DE L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES AU DELÀ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Observations préliminaires.

1437. Le premier savant qui ait essayé de prouver cette impossibilité est le géomètre RUFFINI [1]; mais c'est ABEL qui donna, de ce fait important, la première démonstration rigoureuse [2]. WANTZEL [3] simplifia depuis cette démonstration en quelques points. A l'exemple de J.-A. SERRET [4], nous réunirons et nous fondrons dans une exposition continue les deux Mémoires si remarquables d'Abel et de Wantzel.

Nous croyons devoir reproduire d'abord textuellement les réflexions qui ouvrent une nouvelle étude posthume d'ABEL [5] sur cette question délicate, et qui la posent sur son véritable terrain.

« Un des problèmes les plus intéressants de l'Algèbre est celui de la résolution algébrique des équations. Aussi, on trouve que presque tous les géomètres d'un rang distingué ont traité ce sujet. On parvint sans difficulté à l'expression

---

[1] RUFFINI, médecin et mathématicien italien (1765-1822).

[2] *Journal de Crelle*, t. I, 1826. — *Œuvres complètes de* NIELS HENRIK ABEL, nouvelle édition publiée aux frais de l'État norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. Christiania, M DCCC LXXXI. [Abel est mort à vingt-sept ans (1802-1829).]

[3] *Démonstration de l'impossibilité de résoudre toutes les équations algébriques avec des radicaux*, par L. WANTZEL. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. IV, 1845.

[4] J.-A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, troisième édition. Gauthier-Villars, 1866.

[5] *Œuvres complètes*, nouvelle édition, t. II.

générale des racines des équations des quatre premiers degrés. On découvrit, pour résoudre ces équations, une méthode uniforme (1416) et qu'on croyait pouvoir appliquer à une équation d'un degré quelconque; mais, malgré tous les efforts d'un *Lagrange* et d'autres géomètres distingués, on ne put parvenir au but proposé. Cela fit présumer que la résolution des équations générales était impossible algébriquement; mais c'est ce qu'on ne pouvait pas décider, attendu que la méthode adoptée n'aurait pu conduire à des conclusions certaines que dans le cas où les équations étaient résolubles. En effet, on se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si, par malheur, la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité, sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle, qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible.... »

1438. Comme le remarque Abel, il faut, avant tout, définir ce qu'on entend par résoudre algébriquement une équation algébrique.

Ainsi que nous l'avons déjà dit (1041), la résolution d'une équation générale de degré m consiste à trouver les expressions qui, composées algébriquement avec les coefficients de l'équation, satisfont à cette équation. En d'autres termes, il faut parvenir à exprimer ses racines par des fonctions algébriques de ses coefficients. Il y a donc lieu de chercher préalablement la forme la plus générale de pareilles fonctions; et, pour cela, de revenir sur leur nature même. Nous suivrons ici l'analyse d'Abel.

Fonctions algébriques.

1439. Désignons par x_1, x_2, x_3, ..., un nombre fini de quantités quelconques indépendantes, et par v une fonction de ces quantités.

v est une *fonction algébrique* des quantités considérées, lorsqu'on peut exprimer v par ces quantités à l'aide des *six opérations arithmétiques*, effectuées ou répétées dans un ordre quelconque : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances entières et extraction des racines. L'addition comprend d'ailleurs la soustraction, la multiplication comprend l'élévation aux puissances entières, et l'extraction des racines d'indices composés dépend immédiatement de l'extraction des racines d'indices premiers (137), de sorte que les six opérations indiquées se réduisent en réalité à *quatre*.

1440. Lorsque les deux premières opérations (addition et multiplication) interviennent seules, la fonction v formée avec les quantités considérées est dite *rationnelle et entière* ou, simplement, *entière*.

Soit le terme

$$A x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots,$$

où A est une constante, et les exposants m_1, m_2, m_3, ..., des entiers positifs; toute fonction

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

constituée par la somme d'un nombre fini de termes analogues est une fonction entière.

Soient v_1, v_2, v_3, ..., plusieurs fonctions entières des mêmes quantités x_1, x_2, x_3, ... Il est clair que, si on les soumet aux mêmes opérations que ces quantités elles-mêmes, la fonction

$$f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$$

conservera la même forme que la fonction $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Les mêmes opérations (addition et multiplication) répétées un nombre quelconque de fois, pourvu que ce nombre soit fini, conduiront donc toujours, comme résultat, à une somme de termes de la forme indiquée ci-dessus, ou à une fonction entière.

1441. Lorsque les trois premières opérations (addition, multiplication, division) interviennent seules, la fonction v formée avec les quantités x_1, x_2, x_3, ..., est dite *rationnelle et fractionnaire* ou, simplement, *rationnelle*.

Si l'on a deux fonctions entières, telles que

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots), \quad \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

leur quotient

$$v = \frac{f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)}$$

est un cas particulier des fonctions rationnelles, et toute fonction rationnelle sera le résultat de la répétition de l'opération indiquée pour obtenir v. Si l'on a plusieurs fonctions v_1, v_2, v_3, ..., de la forme ci-dessus, il est évident que la fonction

$$\frac{f(v_1, v_2, v_3, \ldots)}{\mathrm{F}(v_1, v_2, v_3, \ldots)}$$

peut être ramenée à cette même forme, qui est, par conséquent, la forme générale des fonctions rationnelles.

1442. Supposons, enfin, que les quatre opérations réellement fondamentales (addition, multiplication, division, extraction des racines d'indices premiers) interviennent dans la composition de la fonction v formée avec les quantités x_1, x_2, x_3, ... Cette fonction deviendra, par opposition aux précédentes, une *fonction algébrique irrationnelle* ou une *fonction algébrique générale*.

Pour avoir cette fonction, il faudra combiner la fonction rationnelle quelconque

$$p = f(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

ou l'opération désignée par f, avec l'opération indiquée par le signe $\sqrt[m]{\ }$, m étant supposé *un nombre premier*.

Désignons alors par p_1, p_2, p_3, ..., des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3, ...; par n_1, n_2, n_3, ..., des nombres premiers, et posons

$$p' = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \sqrt[n_3]{p_3}, \ldots\right).$$

p' sera la forme générale des fonctions algébriques de x_1, x_2, x_3, ..., où l'opération représentée par le signe $\sqrt[m]{\ }$ ne porte que sur des fonctions rationnelles, et les fonctions telles que p' seront dites *fonctions algébriques du premier ordre* (ou fonctions irrationnelles du premier ordre).

Désignons par p'_1, p'_2, p'_3, ..., des fonctions algébriques du premier ordre; par n'_1, n'_2, n'_3, ..., des nombres premiers, et posons

$$p'' = f(x_1, x_2, \ldots, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \ldots, \sqrt[n_1]{p'_1}, \sqrt[n_2]{p'_2}, \ldots).$$

p'' sera la forme générale des fonctions algébriques de x_1, x_2, x_3, ..., où l'opération représentée par le signe $\sqrt[n]{\ }$ peut porter à la fois, mais seulement, sur des fonctions rationnelles et sur des fonctions algébriques du premier ordre; et les fonctions telles que p'' seront dites *fonctions algébriques du deuxième ordre* (ou fonctions irrationnelles du deuxième ordre).

En continuant par voie d'extension, on obtiendra des fonctions algébriques du troisième, du quatrième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre (ou des fonctions irrationnelles du troisième, du quatrième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre), dont les notations seront p''', p^{IV}, ..., $p^{(n)}$; et il est clair que l'expression des fonctions du $n^{\text{ième}}$ ordre se confondra avec l'expression des fonctions algébriques générales. Dans une pareille expression, l'opération représentée par le signe $\sqrt[n]{\ }$ peut porter à la fois, mais seulement, sur des fonctions rationnelles et sur des fonctions algébriques du premier, du deuxième, du troisième, ..., du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre.

On aura donc, pour une fonction algébrique d'ordre μ, désignée par v, l'expression

$$(1) \qquad v = f(r_1, r_2, \ldots, \sqrt[n_1]{p_1^{(\mu-1)}}, \sqrt[n_2]{p_2^{(\mu-1)}}, \ldots),$$

dans laquelle f représente toujours une fonction rationnelle des quantités entre parenthèses; $p_1^{(\mu-1)}$, $p_2^{(\mu-1)}$, ..., des fonctions algébriques de l'ordre $\mu-1$; n_1, n_2, ..., des nombres premiers; et r_1, r_2, ... (pour l'instant et au point de vue de la définition donnée), des fonctions algébriques d'un ordre égal ou inférieur à $\mu-1$.

1443. Si, dans la formule (1) [1442], on pouvait exprimer les radicaux qui portent sur les fonctions algébriques de l'ordre le plus élevé $\left[\sqrt[n_1]{p_1^{(\mu-1)}}\right]$ en fonction rationnelle des autres quantités, on pourrait les éliminer successivement. La fonction v conserverait la même forme, mais son ordre deviendrait égal à $\mu-1$.

Par conséquent, si la fonction v est en réalité de l'ordre μ, on pourra chercher à réduire dans son expression les radicaux qui portent sur les fonctions d'ordre supérieur, au plus petit nombre possible; mais tous ne disparaîtront pas, et l'un d'entre eux au moins ne sera pas exprimable en fonction rationnelle des autres quantités d'ordre inférieur. Si, après toute simplification, le nombre des radicaux différents affectant des fonctions algébriques de l'ordre le plus élevé ($\mu - 1$) est égal à m, on dit que la fonction v est d'*ordre μ et de degré m*.

D'après cela, une fonction d'ordre μ et de degré o, ne contenant dans son expression aucun radical recouvrant une fonction algébrique d'ordre $\mu - 1$, est la même chose qu'une fonction d'ordre $\mu - 1$. De même, une fonction rationnelle ne contenant aucun radical peut être considérée comme une fonction algébrique d'ordre o.

1444. Finalement, et en généralisant, V étant une fonction algébrique générale, d'ordre μ et de degré m, on peut écrire simplement

$$V = f(r_1, r_2, \ldots, \sqrt[n]{p}). \tag{2}$$

Dans cette dernière formule, f désigne une fonction rationnelle des quantités entre parenthèses; p, une fonction algébrique d'ordre $\mu - 1$; n, un nombre premier; $r_1, r_2, \ldots$, des fonctions algébriques qui peuvent être, en raison du signe f, du même ordre μ que V, mais dont le degré est alors, dans leur ensemble, au plus égal à $m - 1$ (1443).

Autre forme générale des fonctions algébriques.

1445. Dans l'expression (2) de V (1444), f désigne une fonction rationnelle des quantités entre parenthèses. Par suite, en désignant par φ et ψ deux fonctions entières de ces mêmes quantités, on peut écrire (1393)

$$V = \frac{\varphi(r_1, r_2, \ldots, \sqrt[n]{p})}{\psi(r_1, r_2, \ldots, \sqrt[n]{p})}. \tag{1}$$

D'ailleurs, toute fonction entière, en vertu de sa composition (1440), peut être ordonnée par rapport aux puissances entières de l'une des quantités dont elle dépend. Nous pourrons

ainsi ordonner les fonctions φ et ψ par rapport aux puissances de $\sqrt[n]{p}$ ou de $p^{\frac{1}{n}}$, et nous aurons

$$(1\,bis) \qquad V = \frac{s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} + s_3 p^{\frac{3}{n}} + \dots}{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + t_2 p^{\frac{2}{n}} + t_3 p^{\frac{3}{n}} + \dots} = \frac{S}{T}.$$

Les coefficients (s) et (t) sont des fonctions entières des autres quantités r_1, r_2, ...

Considérons l'équation binôme $\alpha^n = 1$, et désignons par α l'une de ses racines imaginaires (118). En multipliant l'une quelconque des racines de cette équation par toutes les racines elles-mêmes, on les reproduit toutes dans un autre ordre (122). Il en résulte évidemment qu'on peut représenter ses n racines par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = 1$. n, nombre premier, est un nombre impair. Par conséquent, l'équation $x^n = 1$ a $n - 1$ racines imaginaires conjuguées deux à deux et une seule racine réelle égale à 1 (847).

Cela posé, remplaçons successivement $p^{\frac{1}{n}}$, dans le dénominateur T de la valeur (1 *bis*) de V, par les $n - 1$ expressions

$$\alpha p^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^3 p^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}.$$

T prendra, à son tour, les $n - 1$ valeurs

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \dots, \quad T_{n-1}.$$

Si l'on multiplie alors les deux termes de la valeur de V par le produit $T_1 T_2 T_3 \dots T_{n-1}$, il vient

$$(2) \qquad V = \frac{S T_1 T_2 T_3 \dots T_{n-1}}{T T_1 T_2 T_3 \dots T_{n-1}}.$$

On a d'ailleurs nécessairement (1080), pour la somme des racines de l'équation $\alpha^n = 1$,

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} = 0.$$

Il en résulte que, dans le produit $T T_1 T_2 T_3 \dots T_{n-1}$, les puissances fractionnaires de p disparaissent toutes (comme on peut le vérifier pour une valeur quelconque de n), et que le dénominateur de la valeur (2) de V est une fonction entière de p et des quantités r_1, r_2, ..., dont les coefficients (t) sont des

fonctions entières. Ce dénominateur est d'ordre μ et de degré $m-1$, comme l'ensemble des quantités $r_1, r_2, \ldots$, dont il dépend.

La même simplification ne peut se produire au numérateur de la valeur (2) de V, puisque S y est substitué à T. Ce numérateur restera donc une fonction entière de $\sqrt[n]{p}$ et des quantités $r_1, r_2, \ldots$, et, en l'ordonnant par rapport à $p^{\frac{1}{n}}$, on pourra représenter sa valeur par

$$u_0 + u_1 p^{\frac{1}{n}} + u_2 p^{\frac{2}{n}} + u_3 p^{\frac{3}{n}} + \ldots + u_k p^{\frac{k}{n}}.$$

Si, en même temps, le dénominateur est représenté par u, on aura simplement

$$V = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \ldots + q_k p^{\frac{k}{n}}, \tag{3}$$

en posant

$$\frac{u_0}{u} = q_0, \qquad \frac{u_1}{u} = q_1, \qquad \frac{u_2}{u} = q_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_k}{u} = q_k.$$

$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k$ seront ainsi des fonctions rationnelles de p, $r_1, r_2, \ldots$, c'est-à-dire des fonctions algébriques d'ordre μ et de degré $m-1$ au plus; et il sera toujours impossible d'exprimer rationnellement $p^{\frac{1}{n}}$ en fonction des quantités dont elles dépendent.

1446. Admettons que l'équation (3) [1445] renferme des puissances de $p^{\frac{i}{n}}$ supérieures à la $(n-1)^{\text{ième}}$. On pourra les supprimer de la manière suivante.

Supposons une de ces puissances $p^{\frac{i}{n}}$. En divisant i par n, on aura un quotient a et un reste b moindre que n [$i = an + b$], d'où

$$p^{\frac{i}{n}} = p^a p^{\frac{b}{n}}.$$

On pourra donc, dans le terme correspondant, faire entrer ou fondre la puissance entière p^a dans le coefficient q_i. On parviendra ainsi à mettre la valeur de V sous la forme

$$V = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \tag{4}$$

où les quotients $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ conserveront la même définition ou le même caractère que précédemment.

1447. On peut aller plus loin.

Si q_1 n'est pas nul, on peut toujours supposer $q_1 = 1$.

En effet, posons

$$p_1 = pq_1^n.$$

On en déduit

$$p = \frac{p_1}{q_1^n} \qquad \text{et} \qquad p^{\frac{1}{n}} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}}}{q_1}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression (4) [1446], il vient

$$V = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + \frac{q_2}{q_1^2} p_1^{\frac{2}{n}} + \frac{q_3}{q_1^3} p_1^{\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}} p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

expression de même forme que l'expression (4), et qui se confondra avec elle en remplaçant p_1 par p, et les quotients $\frac{q_2}{q_1^2}, \frac{q_3}{q_1^3}, \ldots, \frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}}$, par $q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$, sauf la substitution de 1 à la place de q_1.

Si q_1 est nul dans l'expression (4) [1446], désignons par q_i le premier des coefficients $q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$, qui ne soit pas nul. Le premier terme après q_0 sera alors $q_i p^{\frac{i}{n}}$. On posera donc

$$p_1^{\frac{1}{n}} = q_i p^{\frac{i}{n}}; \qquad \text{d'où} \qquad p_1 = q_i^n p^i,$$

et le second terme de l'expression de V sera encore $p_1^{\frac{1}{n}}$ avec le coefficient 1.

Soit maintenant c un entier plus grand que i et moindre que n. On pourra toujours trouver deux entiers a et b satisfaisant à la relation

$$ia - nb = c, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ia}{n} = b + \frac{c}{n},$$

puisque, n étant premier et i plus petit que n, les coefficients i et n sont premiers entre eux.

On aura donc, d'après la valeur ci-dessus de $p_1^{\frac{1}{n}}$,

$$p_1^{\frac{a}{n}} = q_i^a p^{\frac{ai}{n}} \qquad \text{ou} \qquad p_1^{\frac{a}{n}} = q_i^a p^b p^{\frac{c}{n}}.$$

On en tire

$$p^{\frac{c}{n}} = q_i^{-a} p^{-b} p_1^{\frac{a}{n}},$$

et cette relation permet d'exprimer, dans la formule (4) [1446], les puissances de $p^{\frac{1}{n}}$ en fonction des puissances de $p_1^{\frac{1}{n}}$. La forme de V restera évidemment la même, sauf le coefficient de $p_1^{\frac{1}{n}}$ rendu égal à l'unité.

1448. Ce qui précède se résume dans cette proposition :

Toute fonction algébrique générale, d'ordre μ *et de degré* m, *peut être ramenée à la forme*

$$(5) \qquad V = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

Dans cette expression, n *est un nombre premier;* q_0, q_2, q_3, ..., q_{n-1}, *des fonctions algébriques d'ordre* μ, *mais de degré* $m-1$ *au plus; et* p, *une fonction algébrique d'ordre* $\mu - 1$, *dont la racine* $n^{ième}$ *ne peut être exprimée rationnellement à l'aide des quantités* q_0, q_2, q_3, ..., q_{n-1}, *ou de celles dont elles dépendent.*

Ainsi, dans tous les ordres, il existe des radicaux d'indices premiers qui représentent des nombres incommensurables d'espèce distincte.

Propriétés des fonctions algébriques qui satisfont à une équation donnée.

1449. Il s'agit d'établir cette proposition fondamentale :

Lorsqu'une équation est résoluble algébriquement (1438), *on peut toujours donner à l'une quelconque de ses racines une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée soient exprimées par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.*

Soit l'équation algébrique de degré m

$$(1) \qquad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

où les coefficients a_1, a_2, ..., a_m sont des fonctions rationnelles de quantités connues et indépendantes. *Supposons que cette équation soit résoluble algébriquement.* Désignons par x une de ses racines, qui sera alors une certaine fonction algébrique d'ordre μ des quantités connues. D'après ce qui pré-

cède (1448), on pourra poser (en conservant les mêmes notations et interprétations)

$$(2) \qquad x = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}.$$

Si l'on substitue cette valeur de x dans l'équation (1) [les deux premières opérations répétées conduisant toujours (1394) à des résultats de même forme], on obtiendra une expression qu'on pourra représenter par

$$(3) \qquad r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

et où r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1} seront des fonctions rationnelles des quantités q_0, q_2, q_3, ..., q_{n-1} et p.

Or, pour que l'équation (3) subsiste, il faut qu'on ait séparément

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = 0.$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et posons $p^{\frac{1}{n}} = z$. Les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} z^n - p = 0, \\ r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_{n-1} z^{n-1} = 0 \end{cases}$$

auraient alors *une ou plusieurs racines communes*. Désignons par k le nombre de ces racines communes, et formons l'équation qui les a pour racines,

$$(5) \qquad s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots + s_k z^k = 0.$$

Dans cette équation, les coefficients (s) seront des fonctions rationnelles de p et de q_0, q_2, q_3, ..., q_{n-1}.

Soit alors un *diviseur irréductible* (1234) du premier membre de l'équation (5),

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_g z^g,$$

où t_0, t_1, t_2, ..., t_g seront des fonctions rationnelles des mêmes quantités. L'*équation irréductible* (1234)

$$(6) \qquad t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_g z^g = 0$$

aura alors toutes ses racines communes avec la première équation $z^n - p = 0$ du groupe (4). D'ailleurs, son degré g est *au moins* égal à 2; sans quoi, on pourrait exprimer z ou $p^{\frac{1}{n}}$ en fonction rationnelle des quantités q_0, q_2, q_3, ..., q_{n-1} et

p, ce qui est contre l'hypothèse. Si l'on remarque à présent que l'équation binôme $z^n - p = 0$ ayant une racine z en aura nécessairement une autre de la forme αz, α étant une racine quelconque de l'équation $\alpha^n = 1$ (121), on voit qu'il en sera de même pour l'équation (6); ce qui entraîne la nouvelle équation

$$(6\,bis) \qquad t_0 + t_1 \alpha z + t_2 \alpha^2 z^2 + \ldots + t_g \alpha^g z^g = 0.$$

Les deux équations (6) et (6 *bis*) auraient ainsi une racine commune, et l'équation (6) en aurait une également avec l'équation obtenue en retranchant de l'équation (6 *bis*) l'équation (6) multipliée par α^g, c'est-à-dire avec l'équation

$$(7) \quad \begin{cases} (1 - \alpha^g) t_0 + (\alpha - \alpha^g) t_1 z \\ \quad + (\alpha^2 - \alpha^g) t_2 z^2 + \ldots + (\alpha^{g-1} - \alpha^g) t_{g-1} z^{g-1} = 0. \end{cases}$$

Mais, l'équation (7) étant de degré moindre que l'équation (6), si ces deux équations avaient une racine commune, l'équation (6) ne serait plus irréductible.

Il faut donc bien qu'on ait séparément

$$r_0 = 0, \qquad r_1 = 0, \qquad r_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad r_{n-1} = 0.$$

S'il en est ainsi, il est clair que l'équation donnée (1) sera encore satisfaite par l'expression (2) de x, lorsqu'on mettra successivement dans cette expression, à la place de $p^{\frac{1}{n}}$, les valeurs

$$\alpha p^{\frac{1}{n}}, \quad \beta p^{\frac{1}{n}}, \quad \gamma p^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots, \quad \lambda p^{\frac{1}{n}},$$

où α, β, γ, ..., λ représentent les $n - 1$ racines imaginaires de l'équation $x^n = 1$. On aura, de cette manière, n racines différentes de l'équation (1), qu'on peut désigner par x_1, x_2, x_3, ..., x_n, et dont les expressions seront

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ x_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ x_3 = q_0 + \beta p^{\frac{1}{n}} + \beta^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \beta^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ x_4 = q_0 + \gamma p^{\frac{1}{n}} + \gamma^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \gamma^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = q_0 + \lambda p^{\frac{1}{n}} + \lambda^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \lambda^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}. \end{cases}$$

Supposons qu'on ajoute d'abord les équations (8) membre à membre. Il est clair que le terme q_0 sera répété n fois, et que $p^{\frac{1}{n}}$ sera multiplié par la somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, qui est égale à zéro (1080).

De même, $p^{\frac{2}{n}}$ sera multiplié par $(1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\lambda^2)$; mais, en vertu de la propriété fondamentale des racines de l'unité (851), chacun de ces carrés représente aussi une racine $n^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité, de sorte que le coefficient de $p^{\frac{2}{n}}$, dans la somme des équations (8), est encore égal à zéro. On obtiendra un résultat pareil pour les coefficients des autres puissances de $p^{\frac{1}{n}}$. On déduira donc simplement de l'équation résultante

$$q_0 = \frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n).$$

Reprenons les équations (8) et ajoutons-les de nouveau, après les avoir multipliées respectivement par

$$1,\quad \alpha^{n-1},\quad \beta^{n-1},\quad \gamma^{n-1},\quad \ldots\quad \lambda^{n-1}.$$

Les puissances semblables des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité les reproduisant dans un autre ordre (122, 1459), le terme q_0 se trouvera cette fois multiplié par zéro, et il en sera de même des termes qui renferment $p^{\frac{2}{n}}$, $p^{\frac{3}{n}}$, $\ldots$, $p^{\frac{n-1}{n}}$. Il ne restera donc, dans le second membre, que la première puissance $p^{\frac{1}{n}}$ répétée n fois, puisque l'on a $\alpha^n=\beta^n=\gamma^n=\ldots=\lambda^n=1$. On déduira donc de la nouvelle équation résultante

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x_1+\alpha^{n-1}x_2+\beta^{n-1}x_3+\gamma^{n-1}x_4+\ldots+\lambda^{n-1}x_n).$$

En continuant de la sorte, c'est-à-dire en ajoutant encore les équations (8) après les avoir multipliées respectivement par

$$1, \alpha^{n-2}, \beta^{n-2}, \gamma^{n-2}, \ldots, \lambda^{n-2};\ 1, \alpha^{n-3}, \beta^{n-3}, \gamma^{n-3}, \ldots, \lambda^{n-3};\ \ldots;$$

$$1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda;$$

on pourra isoler successivement les termes $q_2 p^{\frac{2}{n}}$, $q_3 p^{\frac{3}{n}}$, $\ldots$, $q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$, et l'on obtiendra finalement les

n équations

(8 *bis*)
$$\left\{\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n),\\
p^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n}(x_1+\alpha^{n-1}x_2+\beta^{n-1}x_3+\gamma^{n-1}x_4+\ldots+\lambda^{n-1}x_n),\\
q_2p^{\frac{2}{n}} &= \frac{1}{n}(x_1+\alpha^{n-2}x_2+\beta^{n-2}x_3+\gamma^{n-2}x_4+\ldots+\lambda^{n-2}x_n),\\
q_3p^{\frac{3}{n}} &= \frac{1}{n}(x_1+\alpha^{n-3}x_2+\beta^{n-3}x_3+\gamma^{n-3}x_4+\ldots+\lambda^{n-3}x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}} &= \frac{1}{n}(x_1+\alpha x_2+\beta x_3+\gamma x_4+\ldots+\lambda x_n).
\end{aligned}\right.$$

Ces équations prouvent, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité étant regardées comme connues, que *les quantités*

$$p^{\frac{1}{n}},\quad q_0,\quad q_2,\quad q_3,\quad \ldots,\quad q_{n-1}$$

sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation (1) *donnée* (car rien ne distingue spécialement les racines que nous avons considérées).

On a, en effet, d'une manière générale, d'après les équations (8 *bis*),

$$q_k = n^{k-1}\frac{x_1+\alpha^{n-k}x_2+\beta^{n-k}x_3+\gamma^{n-k}x_4+\ldots+\lambda^{n-k}x_n}{(x_1+\alpha^{n-1}x_2+\beta^{n-1}x_3+\gamma^{n-1}x_4+\ldots+\lambda^{n-1}x_n)^k}.$$

Cela posé, désignons par y l'une quelconque des quantités

$$p^{\frac{1}{n}},\quad q_0,\quad q_2,\quad q_3,\quad \ldots,\quad q_{n-1},$$

qui, d'après les équations (8) ou d'après l'équation (2), entrent dans l'expression des racines de l'équation (1) proposée. On aura alors, d'après les définitions et simplifications précédentes,

$$(9)\qquad y = \chi_0+\varpi^{\frac{1}{\nu}}+\chi_2\varpi^{\frac{2}{\nu}}+\chi_3\varpi^{\frac{3}{\nu}}+\ldots+\chi_{\nu-1}\varpi^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

les lettres χ, ϖ, ν remplaçant les lettres q, p, n, avec des sens identiques (1448).

D'après ce qu'on vient de démontrer, on pourra écrire, en

désignant par φ une fonction rationnelle et par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ les m racines de l'équation (1),

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m).$$

[Il est sous-entendu que les m racines de l'équation (1) peuvent ne pas entrer toutes dans la fonction φ].

Lorsqu'on permutera entre elles les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ de toutes les manières possibles, la fonction φ prendra un certain nombre m' de valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{m'}$, et l'on pourra former une équation de degré m' ayant ces valeurs pour racines. La valeur (9) de y devant satisfaire à cette équation, on en conclura, en raisonnant comme précédemment, que les quantités

$$\varpi, \quad \chi_0, \quad \chi_2, \quad \chi_3, \quad \ldots, \quad \chi_{\nu-1}$$

sont des fonctions rationnelles des racines $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{m'}$ de la nouvelle équation et, par conséquent, des fonctions rationnelles des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ de l'équation (1) donnée (1441).

Or les quantités, dont l'une vient d'être désignée spécialement par y [équation (9)], sont celles qui entrent dans l'expression (2) de la racine x de l'équation (1). Cette racine, quelle qu'elle soit, est donc elle-même une fonction rationnelle des racines de l'équation (1).

On est ainsi ramené à la proposition fondamentale énoncée au début de cette belle analyse :

Lorsqu'une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à l'expression générale de ses racines une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont cette expression est composée soient des fonctions rationnelles des racines mêmes de l'équation proposée.

Les fonctions rationnelles des racines qui représentent les divers radicaux figurant dans l'expression générale des racines de l'équation donnée peuvent renfermer toutes ces racines ou seulement un certain nombre d'entre elles. Il est d'ailleurs permis de supposer que ces fonctions rationnelles sont entières (1230).

Impossibilité de résoudre algébriquement les équations générales au delà du quatrième degré.

1450. Nous suivrons ici spécialement la démonstration de WANTZEL.

Soit l'équation (1) (1449) $f(x) = 0$, dont les coefficients sont indépendants et qui est résoluble algébriquement, c'est-à-dire dont les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ sont exprimables algébriquement en fonction de ses coefficients.

L'équation $f(x) = 0$ étant satisfaite par la valeur x_1 donnée à x, *quels que soient ses coefficients,* si l'on substitue dans la valeur de x_1 les fonctions rationnelles des racines qui correspondent à chacun des radicaux qui y entrent (1449), on devra reproduire identiquement x_1, *puisque les racines de l'équation sont alors entièrement arbitraires.* Pour la même raison, *toute relation entre les racines devra demeurer identique, lorsqu'on y permutera ces racines d'une manière quelconque.*

1451. Désignons par y le *premier radical* $\sqrt[n]{p}$, qui entre dans la valeur de x_1, *en suivant l'ordre du calcul* (c'est alors le dernier, en suivant l'ordre naturel de l'écriture). Nous aurons

$$y^n = p.$$

L'équation donnée étant supposée résoluble algébriquement, p dépendra immédiatement des coefficients de cette équation (1438), et, d'après ce qui précède (1449) et ce qu'on vient de dire (1450), s'exprimera par une fonction *symétrique* de ses racines, telle que $\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

y sera une fonction rationnelle $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de ces mêmes racines.

Comme la fonction φ ne peut pas être symétrique, sans quoi elle serait une fonction rationnelle des coefficients de l'équation $f(x) = 0$ (1090, 1094), et la racine $n^{\text{ième}}$ de p s'extrairait exactement contre l'hypothèse, cette fonction φ doit changer par la *transposition* des deux racines x_1 et x_2, par exemple, sans qu'on cesse d'avoir pour cela

$$\varphi^n = p = \mathrm{F}.$$

Comme la transposition indiquée laisse d'ailleurs F invariable, les valeurs de φ sont des racines de l'équation $y^n = F$. On a donc nécessairement (121), en désignant par α une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité,

$$\varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Toute relation entre les racines devant continuer d'exister quand on y remplace ces racines les unes par les autres d'une manière quelconque (1450), on aura, en transposant de nouveau x_1 et x_2,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots).$$

En multipliant par ordre ces deux relations, il vient (118)

$$\alpha^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad n = 2.$$

Le premier radical qui entre dans la valeur de x_1 (suivant l'ordre du calcul à effectuer) *doit donc être du second degré.* C'est ce qu'on vérifie sur les équations générales du troisième et du quatrième degré.

La fonction φ, à cause de $n = 2$, n'ayant que deux valeurs, change pour une transposition quelconque; mais elle reste invariable pour toute permutation circulaire de trois, de cinq lettres, ..., ou d'un nombre premier quelconque, parce que chacune de ces permutations circulaires équivaut à un nombre pair de transpositions (336). Ainsi, en transposant x_1 et x_2, la valeur $\varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots)$ est égale et de signe contraire à la valeur $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)$; de même, en transposant x_1 et x_3, la valeur $\varphi(x_2, x_3, x_1, \ldots)$ est égale et de signe contraire à $\varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots)$, de sorte qu'elle reproduit $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Il en sera de même pour les permutations circulaires de cinq lettres, etc.

1452. Revenons à la série des opérations qui peuvent se trouver indiquées dans la valeur de x_1.

On peut avoir à combiner le premier radical $\sqrt{p}$ ou la fonction φ non symétrique avec des coefficients de l'équation donnée $f(x) = 0$, c'est-à-dire avec des fonctions symétriques des racines (1083), sans intervention d'un nouveau radical. On aura toujours ainsi une fonction des racines, seulement susceptible de deux valeurs, et que les permutations circu-

laires de trois lettres, etc., laisseront, par suite, invariable (1451).

Les nouveaux radicaux rencontrés, s'ils sont du second degré, ne pourront donner que des fonctions du même genre.

Supposons donc qu'on parvienne à un radical (quelconque) *pour lequel la fonction rationnelle équivalente ne demeure plus invariable par ces permutations de trois lettres ou d'un nombre premier de lettres, parce qu'elle a plus de deux valeurs,* et représentons-le encore par

$$y = \sqrt[n]{p} = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

On aura encore

$$p = \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

mais la fonction F, composée comme on vient de le dire, ne sera plus symétrique, et restera seulement invariable par les permutations de trois lettres, de cinq lettres, etc. (1451).

Si l'on effectue, par exemple, une permutation circulaire de trois lettres en remplaçant x_1, x_2, x_3 par x_2, x_3, x_1, la relation

$$\varphi^n = \mathrm{F} \qquad \text{ou} \qquad y^n = \mathrm{F}$$

subsistera toujours, et, F étant invariable, φ restera une racine de la dernière équation. En désignant par α une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on aura donc nécessairement, n étant toujours premier (121),

$$\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Cette relation devant persister lorsqu'on échange entre elles les racines d'une manière quelconque (1450), et toute permutation circulaire de trois lettres revenant à deux transpositions successives, on en déduira immédiatement, par deux nouvelles permutations opérées de part et d'autre, par rapport aux trois premières lettres,

$$\varphi(x_3, x_1, x_2, x_4, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, \ldots),$$
$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_3, x_1, x_2, x_4, \ldots).$$

En multipliant par ordre les trois relations précédentes, il vient (118)

$$\alpha^3 = 1 \qquad \text{ou} \qquad n = 3.$$

Le nouveau radical rencontré, après ceux du second degré,

dans la valeur de x_1, doit donc être un radical cubique. C'est ce qu'on vérifie encore sur les équations générales du troisième et du quatrième degré. On a alors trois ou quatre racines, et l'on peut effectuer sur les fonctions rationnelles des racines des permutations circulaires de trois lettres, *sans pouvoir en effectuer de cinq lettres.*

1453. Allons plus loin. Supposons le nombre des racines $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, supérieur à quatre, c'est-à-dire l'équation donnée, $f(x) = 0$, *d'un degré plus élevé que le quatrième.*

Si l'on rencontre dans l'expression générale de ses racines un radical cubique, les notations précédentes restant les mêmes, la fonction F demeurera invariable par une permutation circulaire de cinq lettres (1452), et la valeur de la fonction rationnelle φ passera seulement d'une racine de l'équation

$$\varphi^n = F \qquad \text{ou} \qquad y^n = F$$

à une autre. On aura donc, cette fois (1452),

$$\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, \ldots) = \alpha\,\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

Cette relation devant persister quand on échange entre elles les racines d'une manière quelconque (1450, 1451), on pourra répéter quatre fois de part et d'autre la permutation circulaire de cinq lettres (qui revient à quatre transpositions successives), et l'on aura

$$\begin{aligned}
\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \ldots) &= \alpha\,\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, \ldots),\\
\varphi(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, \ldots) &= \alpha\,\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \ldots),\\
\varphi(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) &= \alpha\,\varphi(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, \ldots),\\
\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) &= \alpha\,\varphi(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots).
\end{aligned}$$

En multipliant par ordre les cinq relations obtenues, il vient

$$\alpha^5 = 1.$$

Comme on a $n = 3$ ou $\alpha^3 = 1$, c'est-à-dire $\alpha^6 = 1$, on déduit de la condition précédente $\alpha = 1$. La fonction φ serait donc invariable par les permutations circulaires de cinq lettres, et il est facile de voir qu'elle le serait aussi, dans ce cas, par les permutations circulaires de trois lettres.

En effet, la fonction φ, étant invariable par les permutations

circulaires de cinq lettres, ne changera pas davantage si l'on remplace

$$x_3,\ x_2,\ x_5,\ x_1,\ x_4 \quad \text{par} \quad x_2,\ x_5,\ x_1,\ x_4,\ x_3.$$

On aura alors, par un pareil échange,

$$\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \ldots) = \varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, \ldots).$$

Mais nous venons de trouver plus haut

$$\varphi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

Il viendra donc

$$\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots);$$

ce qui montre évidemment que la fonction φ est aussi invariable par les permutations circulaires de trois lettres seulement $[\varphi(x_2, x_3, x_1, \ldots) = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)]$.

On voit par là que, pour les équations de degré supérieur au quatrième (*supposées résolubles algébriquement*), les radicaux cubiques rencontrés dans l'expression générale des racines devraient être équivalents à des fonctions rationnelles des racines, *invariables par des permutations circulaires de trois lettres;* et, en poursuivant le même raisonnement, il en serait de même pour les radicaux d'indice premier supérieur à trois.

Or, en substituant alors toutes ces fonctions rationnelles dans l'expression de la racine x_1, on devrait parvenir (1450) à une *identité* de la forme

$$x_1 = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

Mais c'est ce qui ne peut avoir lieu d'après ce qui précède; car le second membre de cette expression doit demeurer invariable quand on remplace x_1, x_2, x_3 par x_2, x_3, x_1, tandis que le premier membre change nécessairement.

Cette contradiction manifeste prouve enfin qu'*il est impossible de résoudre par radicaux l'équation générale du cinquième degré ou d'un degré plus élevé.*

Scolie général.

1454. Lorsqu'on cesse de considérer les équations générales d'un degré quelconque, la question change de face. Il y a une infinité d'équations particulières de tous les degrés, qui sont

résolubles algébriquement, en raison de leur forme et de leurs propriétés.

On est ainsi conduit, comme le remarque Abel dans le Mémoire posthume déjà cité (1437), à deux problèmes intimement liés entre eux, et dont la solution complète comprend, en réalité, toute la théorie de la résolution algébrique des équations :

1° *Il faut pouvoir trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque, qui soient résolubles algébriquement;*

2° *Il faut pouvoir décider si une équation donnée est ou non résoluble algébriquement.*

Dans son Mémoire, l'illustre géomètre norvégien avait déjà porté assez loin ses recherches sur ce sujet, lorsque la mort vint le frapper. Dans ce travail inachevé, Abel annonce qu'il est parvenu à remplacer sa première démonstration sur l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales au delà du quatrième degré, par une démonstration reposant sur les mêmes principes, mais plus simple, et qu'on peut regarder comme un corollaire de la règle obtenue pour reconnaître si une équation donnée, de degré premier, est ou non résoluble par radicaux; ce qui est en effet (1).

La méthode générale que Lagrange a essayé d'appliquer à la résolution algébrique des équations générales, et qui est fondée sur l'emploi d'une *résolvante* ou *équation secondaire* (1416), prend son point de départ dans la théorie des *permutations* ou des *substitutions* (2). Abel, dans sa première et célèbre démonstration, s'est aussi appuyé sur cette théorie.

Il était réservé à Galois (3) de faire faire à la question enta-

---

(1) J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure,* troisième édition, t. II, p. 647. Gauthier-Villars, 1866. — Camille Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques,* p. 388. Gauthier-Villars, 1870.

(2) On sait ce qu'on entend par les *permutations* de n objets ou de n lettres, et nous avons vu que leur nombre total a pour expression le produit $1.2.3...n$. Le mot *substitution* indique l'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre.

(3) Évariste Galois, ancien élève de l'École Normale, tué le 31 mai 1832, dans un duel mystérieux et funeste, en pleine éclosion de ses grandes découvertes, à l'âge de vingt et un ans (1811-1832). Son immortel Mémoire *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux,* a été publié en 1846 par les soins pieux de Joseph Liouville, dans le t. XI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

mée par LAGRANGE, poursuivie et mûrie par ABEL, un pas décisif, en prouvant qu'à chaque équation correspond un certain groupe de substitutions relatif à ses racines, qui est en rapport intime avec ses propriétés caractéristiques et les conditions de sa résolution par d'autres équations secondaires.

La théorie des équations algébriques est venue ainsi se perdre dans la théorie des substitutions ou se confondre avec elle, et le problème de la résolution par radicaux, unique objet des anciennes spéculations, n'a plus été qu'un chapitre de l'étude approfondie des irrationnelles.

Nous sommes forcé d'indiquer seulement ces résultats et de renvoyer le lecteur aux écrits mêmes des savants illustres qui ont commencé à élucider ces questions si vastes et si difficiles. LAGRANGE et GAUSS, ABEL et GALOIS, CAUCHY et J.-A. SERRET, MM. BERTRAND, HERMITE, E. MATHIEU, CAMILLE JORDAN (1), ainsi que d'autres célèbres géomètres étrangers, ont jeté les fondements de cette Algèbre transcendante, où l'*ordre* a pris la place prédominante que lui assignait POINSOT (2).

1455. Nous ne pouvons cependant laisser ici de côté, à cause de l'intérêt des applications qui s'y rattachent, une classe très importante d'équations, dont Gauss et Lagrange se sont occupés, et dont la résolution comporte une marche uniforme dans tous les degrés. Nous voulons parler des *équations binômes*, dont nous exposerons la théorie dans le Chapitre suivant, comme complément de l'étude de la résolution algébrique des équations générales.

---

(1) Dans son grand *Traité de substitutions* et dans des travaux plus récents insérés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, M. C. JORDAN a développé les méthodes de GALOIS et a exposé, en même temps que ses propres et remarquables recherches, les principaux résultats obtenus par les géomètres qui l'ont précédé dans cette voie.

(2) *Réflexions sur les principes fondamentaux de la Théorie des Nombres*. Bachelier, 1845.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES ÉQUATIONS BINOMES.

Forme générale des équations binômes.

1456. Nous avons déjà dit un mot des équations binômes (*Alg. élém.*). Toute équation binôme est de la forme

$$x^m - A = 0. \tag{1}$$

a étant une racine quelconque de cette équation (117), posons $x = ay$. Nous aurons

$$a^m y^m - A = 0.$$

Mais, a étant une racine de l'équation (1), on doit avoir $a^m = A$ et, si l'on divise les deux membres de l'équation précédente par a^m, elle devient

$$y^m - 1 = 0. \tag{2}$$

Ayant calculé les racines de l'équation (2), on trouvera toutes celles de l'équation (1) par la relation $x = ay$. La question est ainsi ramenée à la recherche des m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déjà exposée (118, 119).

1457. Autrement, m étant un entier quelconque, et A une quantité quelconque, réelle ou imaginaire, on peut poser

$$x^m = A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{1}$$

On en déduit immédiatement, d'après la formule de Moivre,

$$x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right), \tag{2}$$

et il suffit, comme on l'a démontré (117), de donner m valeurs consécutives à l'entier k pour obtenir les m racines *distinctes* (1137) de l'équation (1) [On peut donner à k, par exemple, les m valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$].

k étant un entier indéterminé, on peut encore écrire (112), k et k_1 étant deux entiers quelconques,

$$(2\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l} x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k_1\pi}{m}+i\sin\dfrac{\alpha+2k_1\pi}{m}\right) \\ \qquad\times\left[\cos\dfrac{2(k-k_1)\pi}{m}+i\sin\dfrac{2(k-k_1)\pi}{m}\right]. \end{array}\right.$$

Comme on a, à la fois (117, 118),

$$\sqrt[m]{A} = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha+2k_1\pi}{m}+i\sin\frac{\alpha+2k_1\pi}{m}\right)$$

et

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2(k-k_1)\pi}{m}+i\sin\frac{2(k-k_1)\pi}{m},$$

on retrouve ainsi cette proposition fondamentale (121) :

On obtient toutes les racines de l'équation (1), *en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les m racines* $m^{ièmes}$ *de l'unité.*

L'étude de l'équation binôme générale $x^m = A$ est donc ramenée à l'étude de l'équation binôme particulière $x^m = 1$, ou à celle des racines imaginaires de l'unité (118, 119).

Propriétés des racines de l'équation binôme $x^m = 1$.

1458. Considérons l'équation

$$(1)\qquad x^m = 1.$$

On a (118), d'une manière générale,

$$(2)\qquad x = \cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

et l'on obtient toutes les racines de l'équation (1) en affectant à l'entier k, dans l'expression (2), les m valeurs consécutives 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$. Nous désignerons les racines corres-

pondant à ces valeurs par

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots,\quad x_{m-1},$$

en donnant comme *indice* à x la valeur attribuée à k.

Si m est pair, on sait que l'équation (1) admet deux racines réelles, $+1$ et -1, qui répondent à $k=0$ et à $k=\frac{m}{2}$; toutes les autres racines sont imaginaires, conjuguées deux à deux et, par conséquent, réciproques (118).

Si m est impair, on sait que l'équation (1) n'a qu'une seule racine réelle, $+1$, qui répond à $k=0$; toutes les autres racines sont imaginaires, conjuguées deux à deux et réciproques.

On peut représenter facilement les racines de l'équation (1) à l'aide de la construction indiquée au n° 142.

On peut ajouter à ces résultats déjà connus la remarque suivante : *Pour que deux racines imaginaires soient conjuguées, il faut et il suffit que leurs indices soient complémentaires à m.* Les deux racines x_k et x_{m-k} ne diffèrent, en effet, que par le signe de i, et leur produit, carré de leur module commun, est égal à l'unité.

1459. *Le produit ou le quotient de deux racines de l'équation $x^m=1$, ou toute puissance entière d'une racine de cette équation, représente ou reproduit une de ses racines.*

1° Soient les deux racines

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

$$x_{k_1}=\cos\frac{2k_1\pi}{m}+i\sin\frac{2k_1\pi}{m}.$$

Il en résulte (112)

$$x_k x_{k_1}=\cos\frac{2(k+k_1)\pi}{m}+i\sin\frac{2(k+k_1)\pi}{m}=x_{k+k_1}.$$

2° On trouve de même (113)

$$\frac{x_k}{x_{k_1}}=x_{k-k_1}.$$

3° Élevons la racine x_k à la puissance entière et positive p.

Nous aurons (1°)

$$(x_k)^p = x_k x_k x_k \ldots = x_{pk}.$$

Si p est négatif et égal à $-q$, on a

$$(x_k)^p = (x_k)^{-q} = \frac{1}{(x_k)^q} = \frac{1}{x_{qk}},$$

c'est-à-dire (2°)

$$(x_k)^p = \frac{x_0}{x_{qk}} = x_{-qk} = x_{pk}.$$

Des racines primitives de l'équation $x^m = 1$ et de leur nombre.

1460. I. *Si l'indice k est premier avec l'exposant m, la racine x_k, par ses puissances successives, reproduit indéfiniment et périodiquement, dans un certain ordre, les m racines de l'équation binôme.*

On sait (*Arithm.*, 190, 191) que, lorsqu'on divise par m les multiples successifs d'un nombre k premier avec m, on obtient seulement m restes différents

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m-1,$$

qui se reproduisent indéfiniment et périodiquement, dans un certain ordre.

D'après cela, élevons d'abord la racine x_k aux puissances

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m-1.$$

Nous obtiendrons, comme résultats, les racines (1459, 3°)

(1) $$x_{0k}, \quad x_{1k}, \quad x_{2k}, \quad x_{3k}, \quad \ldots, \quad x_{(m-1)k}$$

ou, *dans un certain ordre,* les racines

(2) $$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_{m-1}.$$

En effet, soit x_{nk} une des racines de la suite (1). Pour réduire la valeur de l'argument de cette racine à être comprise entre 0 et 2π, il faut, de l'arc correspondant $\frac{2nk\pi}{m}$, retrancher 2π autant de fois que possible, ou diviser $2nk\pi$ par $2m\pi$ et remplacer le dividende par le reste correspondant. Si l'on

a, par exemple,

$$nk = mq + r \qquad \text{ou} \qquad 2nk\pi = 2mq\pi + 2r\pi,$$

il en résulte

$$\frac{2nk\pi}{m} = 2q\pi + \frac{2r\pi}{m}.$$

L'argument de la racine devenant ainsi $\frac{2r\pi}{m}$, son indice est égal au reste r obtenu en divisant le multiple nk par m, c'est-à-dire qu'elle se confond, d'après la propriété arithmétique rappelée ci-dessus, avec l'une des racines de la suite (2).

Si l'on prolonge la suite (1) en élevant x_k aux puissances successives m, $m+1$, $m+2$, ..., on obtient les racines

$$x_{mk}, \quad x_{(m+1)k}, \quad x_{(m+2)k}, \quad \ldots,$$

dont les arguments diffèrent de ceux des racines de la suite (1) d'un nombre exact de circonférences. On reproduit donc indéfiniment et périodiquement les racines de la suite (1), ou celles de la suite (2) dans un certain ordre. Ainsi $2mk\pi$ divisé par $2m\pi$ donne un quotient k et un reste 0; donc $x_{mk} = x_{0k}$. De même, $2(m+1)k\pi$ divisé par $2m\pi$ donne le même reste que $2k\pi$ divisé par $2m\pi$; donc $x_{(m+1)k} = x_{1k}$, etc.

1461. II. *Si l'indice k n'est pas premier avec l'exposant m et a avec lui un plus grand commun diviseur d, la racine x_k, par ses puissances successives, ne reproduit indéfiniment et périodiquement, dans un certain ordre, parmi les racines de l'équation binôme $x^m = 1$, que celles de l'équation binôme de degré inférieur $x^{\frac{m}{d}} = 1$.*

Désignons par m' et k' les quotients respectifs de m et de k par leur plus grand commun diviseur d, d'où

$$m = dm' \qquad \text{et} \qquad k = dk'.$$

La racine x_k considérée appartenant à l'équation

$$x^m = 1, \tag{1}$$

nous aurons

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2dk'\pi}{dm'} + i\sin\frac{2dk'\pi}{dm'}$$

ou

$$x_k = \cos\frac{2k'\pi}{m'} + i\sin\frac{2k'\pi}{m'} = x_{k'};$$

x_k est donc aussi racine de l'équation binôme

$$x^{m'} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^{\frac{m}{d}} = 1. \tag{2}$$

D'ailleurs, comme m' et k' sont premiers entre eux (*Arithm.*), les puissances successives de la racine $x_k = x_{k'}$ reproduiront indéfiniment et périodiquement, dans un certain ordre, les racines de l'équation $x^{m'} = 1$ ou $x^{\frac{m}{d}} = 1$ (1460), et n'en reproduiront pas d'autres. Toutes les racines de l'équation (2) appartenant évidemment à l'équation (1), la proposition est établie.

Les deux théorèmes précédents (1460, 1461) établissent une distinction bien tranchée entre les racines de l'équation binôme $x^m = 1$. Selon que leur indice est ou non premier avec l'exposant m, elles peuvent ou non reproduire, par leurs puissances successives, *toutes* les racines de l'équation proposée.

1462. On appelle RACINE PRIMITIVE de l'équation $x^m = 1$ toute racine dont l'indice k est premier avec m ou toute racine dont les puissances successives peuvent reproduire les racines de l'équation donnée (1460).

D'après cette définition et d'après les substitutions qu'on peut adopter pour former toutes les racines de l'équation $x^m = 1$ (1457), *le nombre des racines primitives de cette équation est précisément égal au nombre des entiers premiers et non supérieurs à m* (*Arithm.*, **164**, **166**).

Si m est premier, toutes les racines de l'équation $x^m = 1$ *sont primitives,* sauf la première x_0 (*Arithm.*, **167**).

Toute racine non primitive de l'équation $x^m = 1$ est racine primitive d'une autre équation binôme $x^{\frac{m}{d}} = 1$, dont le degré $\frac{m}{d}$ est un sous-multiple ou un diviseur de m (1461), et dont les racines appartiennent à l'équation $x^m = 1$.

Toute racine primitive de l'équation $x^m = 1$, et c'est là une propriété caractéristique, *ne peut être racine* (primitive ou non) *d'aucune équation binôme de degré moindre que m,*

telle que $x^p = 1$. En effet, s'il en était ainsi, les puissances successives de cette racine ne pourraient reproduire *au plus* (1461) que les p racines de la seconde équation et, par conséquent, ne reproduiraient pas les m racines de la première équation.

1463. III. *La somme des puissances semblables des racines de l'équation binôme $x^m = 1$ est, en général, égale à zéro.*

Nous avons déjà indiqué ce résultat (1449), en nous appuyant sur la propriété fondamentale du n° 122.

Il est clair, en effet, que, lorsqu'on multiplie l'une des racines α de l'équation $x^m = 1$ par ses m racines

$$1, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \lambda,$$

on obtient α^2 comme l'une des racines de l'équation; que, lorsqu'on multiplie β par toutes les racines, on obtient β^2 comme l'une des racines de l'équation; etc. Il en résulte qu'on peut représenter encore ses m racines par la suite

$$1, \quad \alpha^2, \quad \beta^2, \quad \gamma^2, \quad \ldots, \quad \lambda^2;$$

et, en poursuivant le même raisonnement, par la suite

$$1, \quad \alpha^n, \quad \beta^n, \quad \gamma^n, \quad \ldots, \quad \lambda^n;$$

puis, l'équation $x^m = 1$ étant privée de son second terme, en déduire (1080) le théorème énoncé.

On peut aussi, pour l'établir, avoir recours aux notions précédentes.

x_k étant une racine primitive de l'équation binôme $x^m = 1$, les puissances

$$x_k^0, \quad x_k^1, \quad x_k^2, \quad x_k^3, \quad \ldots, \quad x_k^{m-1}$$

sont les m racines de l'équation (1460). En élevant chacune d'elles à la puissance n, on forme une progression géométrique

$$[1] \qquad x_k^{0n}, \quad x_k^{1n}, \quad x_k^{2n}, \quad x_k^{3n}, \quad \ldots, \quad x_k^{(m-1)n},$$

dont la somme des termes est la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines. La raison de la progression étant x_k^n, cette somme a pour expression (*Alg. élém.*, 370)

$$S_n = \frac{x_k^{mn} - x_k^{0n}}{x_k^n - 1}.$$

Mais, x_k étant racine, on a $x_k^m = 1$ ou

$$x_k^{mn} = (x_k^m)^n = 1,$$

aussi bien que $x_k^{0n} = 1$. On a donc $S_n = 0$.

Il y a un cas évident d'exception. Comme toute racine élevée à la puissance m doit reproduire l'unité, si n est un multiple de m, on a $S_n = m$.

Propriétés des équations binômes de degrés différents.

1464. I. *Lorsque les degrés m et $n < m$ de deux équations binômes, $x^m = 1$ et $x^n = 1$, ne sont pas premiers entre eux et ont un plus grand commun diviseur d, les racines communes aux deux équations sont les racines de l'équation binôme $x^d = 1$.*

En effet, si l'on cherche le plus grand commun diviseur des binômes $x^m - 1$ et $x^n - 1$, le terme -1 persiste dans les différents dividendes jusqu'à la dernière division, tandis que les exposants de x dans les diviseurs successifs sont n et les restes obtenus en cherchant à part le plus grand commun diviseur de m et de n. Si l'on a d'abord, par exemple,

$$m = nq + r,$$

la première division effectuée se présente comme ci-dessous :

$$\begin{array}{l|l} x^m - 1 & x^n - 1 \\ \hline x^{m-n} & x^{m-n} + x^{m-2n} + \ldots + x^{m-nq=r} \\ x^{m-2n} & \\ \ldots\ldots & \\ x^r - 1 & \end{array}$$

Si l'on a $n = rq_1 + r_1$, le diviseur de la seconde division est $x^r - 1$, et le reste de cette division est $x^{r_1} - 1$; si l'on a $r = r_1 q_2 + r_2$, le diviseur de la troisième division est $x^{r_1} - 1$, et le reste de cette division est $x^{r_2} - 1$; .... Lorsqu'on parvient au plus grand commun diviseur r_{k+1} ou d de m et de n, ce plus grand commun diviseur divise exactement le reste précédent r_k, de sorte qu'on a simplement $r_k = r_{k+1} q_{k+2}$. Le reste correspondant r_{k+2} étant nul, la dernière division a pour diviseur $x^d - 1$ et pour reste $x^0 - 1 = 0$.

Le plus grand commun diviseur des binômes $x^m - 1$ et $x^n - 1$ étant $x^d - 1$, les racines communes aux deux équations $x^m = 1$ et $x^n = 1$ sont les racines de l'équation $x^d = 1$. Le théorème est donc démontré, et l'on voit qu'il concorde avec celui du n° 1461.

1465. Il résulte du théorème précédent que *deux équations binômes dont les degrés m et n sont premiers entre eux* (c'est-à-dire pour lesquels on a $d = 1$) *ne peuvent avoir d'autre racine commune que l'unité.*

Si l'équation $x^m = 1$ est de degré premier, elle ne peut donc avoir aucune racine commune autre que l'unité, avec toute équation binôme de même forme et de degré moindre.

1466. II. *Lorsque les degrés m et $n < m$ de deux équations binômes, $x^m = 1$ et $x^n = 1$, sont premiers entre eux, on obtient les mn racines de l'équation binôme $x^{mn} = 1$, en multipliant deux à deux les m racines de l'équation $x^m = 1$ par les n racines de l'équation $x^n = 1$.*

En effet, l'un quelconque de ces produits a pour argument une expression de la forme (112)

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k_1\pi}{n} = \frac{2(kn + k_1 m)\pi}{mn},$$

de sorte que ce produit est nécessairement racine de l'équation $x^{mn} = 1$. Il reste seulement à prouver que les mn produits ainsi obtenus sont tous différents.

Si deux de ces produits étaient égaux ou donnaient la même racine de l'équation $x^{mn} = 1$, leurs arguments devraient différer d'un nombre exact de circonférences. On aurait ainsi, par exemple,

$$\frac{2(kn + k_1 m)\pi}{mn} - \frac{2(k'n + k'_1 m)\pi}{mn} = q \cdot 2\pi$$

ou

$$(k - k')n + (k_1 - k'_1)m = mnq,$$

égalité impossible; car m, divisant son second membre et un des deux termes du premier membre, devrait diviser l'autre terme. Or, m est premier avec n et ne peut diviser la différence $k - k'$ dont les deux parties sont moindres que m par hypothèse. Tous les produits obtenus sont donc bien différents.

1467. III. *Lorsque les degrés m et $n < m$ de deux équations binômes, $x^m = 1$ et $x^n = 1$, sont premiers entre eux, on obtient les racines primitives de l'équation binôme $x^{mn} = 1$, en multipliant deux à deux les racines primitives de l'équation $x^m = 1$ par les racines primitives de l'équation $x^n = 1$.*

En effet, l'un quelconque de ces produits est l'une des mn racines de l'équation $x^{mn} = 1$ [1466], et a pour argument une expression de la forme (112)

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k_1\pi}{n} = \frac{2(kn + k_1 m)\pi}{mn},$$

avec cette condition que k et m, k_1 et n, sont premiers entre eux (1462).

Pour que la racine ainsi obtenue soit une racine primitive de l'équation $x^{mn} = 1$, il faut et il suffit que le nombre $kn + k_1 m$ soit premier avec mn. C'est ce qui a lieu; car tout facteur premier de mn n'entrant que dans m ou dans n, puisque m et n sont premiers entre eux, ne peut diviser qu'une partie de la somme $kn + k_1 m$. Soit, par exemple, un facteur premier a de m : ce facteur premier divisera $k_1 m$, mais ne pourra pas diviser kn, puisque k et n sont tous deux premiers avec m.

D'ailleurs, si les deux racines multipliées ou l'une d'elles, par exemple la première, n'étaient pas primitives, k aurait un facteur commun avec m, et ce facteur diviserait les deux parties du nombre $kn + k_1 m$. Ce nombre ne serait donc plus premier avec mn, et le produit obtenu ne serait pas une racine primitive de l'équation $x^{mn} = 1$. Ce qui achève d'établir le théorème.

1468. IV. En raisonnant de même de proche en proche, les deux théorèmes précédents sont applicables à un nombre quelconque d'équations binômes, pourvu que leurs degrés soient premiers entre eux deux à deux ou *dans leur ensemble* (*Arithm.*).

1469. V. Il résulte de ce qui précède (1467, 1468) que, *si m, n, p, r, . . . , sont des nombres entiers premiers entre eux dans leur ensemble, le nombre des racines primitives de l'équation $x^{mnpr\ldots} = 1$ est égal au produit des nombres respectifs*

de racines primitives des équations $x^m = 1$, $x^n = 1$, $x^p = 1$, $x^r = 1, \ldots$.

Le nombre des racines primitives d'une équation binôme étant (1462) le nombre des entiers premiers et non supérieurs à son degré, on est ainsi ramené à un théorème connu (*Arithm.*, 195), et l'on peut poser l'expression suivante :

$$\varphi(mnpr\ldots) = \varphi(m)\,\varphi(n)\,\varphi(p)\,\varphi(r)\ldots,$$

où le symbole $\varphi(m)$ correspond, soit au nombre des racines primitives de l'équation $x^m = 1$, soit au nombre des entiers premiers et non supérieurs à m.

Résolution de l'équation binôme, lorsque son degré est un nombre composé quelconque.

1470. Les théorèmes démontrés dans le dernier paragraphe sont d'une grande importance. Ils permettent de ramener la résolution d'une équation binôme de degré composé quelconque à la résolution de plusieurs équations binômes plus simples, dont les degrés, premiers entre eux dans leur ensemble, soient respectivement des puissances de nombres premiers.

Prenons l'équation

$$x^m = 1, \tag{1}$$

et supposons que l'exposant m décomposé en facteurs premiers ait pour expression

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda.$$

Les exposants $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots, l^\lambda$, étant premiers entre eux dans leur ensemble, on obtiendra les racines primitives de l'équation (1) en multipliant entre elles (1471, 1472) les racines primitives des équations

$$x^{a^\alpha} = 1, \quad x^{b^\beta} = 1, \quad x^{c^\gamma} = 1, \quad \ldots, \quad x^{l^\lambda} = 1. \tag{2}$$

Il suffira donc de chercher une racine primitive de chacune des équations (2). En les multipliant entre elles, on aura une racine primitive de l'équation (1); et, en élevant cette racine primitive aux m puissances $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, on obtiendra toutes les racines de l'équation (1) [1460, 1462].

1471. Avant d'aller plus loin, cherchons *directement* l'expression du nombre des racines primitives de l'équation

$$x^m = 1. \tag{1}$$

Il suffira pour cela (1469) de chercher d'abord cette expression pour l'une quelconque des équations (2), par exemple pour l'équation

$$x^{a^\alpha} - 1 = 0,$$

où a est un nombre premier.

Toute racine *non primitive* de l'équation considérée appartient également à une équation $x^\theta = 1$, dont le degré θ est un sous-multiple ou un diviseur de l'exposant a^α [1461, 1462]. Or, en laissant de côté a^α lui-même, θ ne peut avoir pour valeurs que

$$a^1, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^{\alpha-1}.$$

Les racines *non primitives* de l'équation $x^{a^\alpha} = 1$ sont donc toutes celles des équations

$$x^a = 1, \qquad x^{a^2} = 1, \qquad x^{a^3} = 1, \qquad \ldots, \qquad x^{a^{\alpha-1}} = 1.$$

D'ailleurs, toutes ces racines ne sont autres (1464) que les racines de la dernière équation

$$x^{a^{\alpha-1}} = 1.$$

Il en résulte que le nombre des racines *non primitives* de l'équation

$$x^{a^\alpha} = 1$$

est précisément $a^{\alpha-1}$. Et, comme cette équation a en tout a^α racines, le nombre de ses *racines primitives* est nécessairement (1469)

$$\varphi(a^\alpha) = a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^\alpha \left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

En revenant à l'équation $x^m = 1$, pour laquelle on a $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$, on voit (1469) que le nombre de ses racines primitives a pour expression

$$\varphi(m) = \overbrace{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda}^{m} \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

C'est la formule connue (*Arithm.*, 195)

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1)(c-1)\ldots(l-1).$$

Résolution de l'équation binôme, lorsque son degré est un nombre impair.

1472. Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^m - 1 = 0,$$

où m est un nombre *impair*. Cette équation admet alors une racine égale à 1 et $m-1$ racines imaginaires, conjuguées deux à deux et réciproques (118, 1458). Si l'on supprime la racine 1, en divisant le premier membre $x^m - 1$ par $x - 1$, on obtient une équation de degré *pair*

$$(2) \qquad x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0,$$

qui est *réciproque* (1116) et qu'on peut, par conséquent (1119), abaisser au degré $\frac{m-1}{2}$ en posant

$$x + \frac{1}{x} = z \qquad \text{ou} \qquad x^2 - zx + 1 = 0.$$

Mais les $\frac{m-1}{2}$ racines de l'équation en z sont alors *les doubles des parties réelles des racines imaginaires de l'équation* (1), conjuguées deux à deux et réciproques. La forme de ces racines conjuguées étant (1458) x_k et x_{m-k}, c'est-à-dire

$$\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

on aura donc, d'une manière générale,

$$x_k + x_{m-k} = x + \frac{1}{x} = z = 2\cos\frac{2k\pi}{m},$$

et il suffira de donner à k, dans cette formule, les valeurs 1, 2, 3, ..., $\frac{m-1}{2}$, pour obtenir toutes les valeurs de z. On aura ensuite toutes les valeurs de x, autres que l'unité, à l'aide de la relation

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

1473. Ce qu'on vient de dire s'applique au cas où le degré de l'équation binôme est *un nombre premier,* puisque tout nombre premier est impair. Mais, dans ce cas, on peut résoudre algébriquement l'équation binôme, qui est alors de la classe des équations dites *Abéliennes,* et, par suite, résoluble algébriquement par radicaux (1454). Nous renverrons sur ce point à la Note XIV du *Traité de la résolution des équations numériques.*

Application de la théorie des équations binômes à la division de la circonférence en parties égales.

1474. Supposons (*Géom.*, 203) la circonférence divisée en m parties égales à a. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, on obtient un polygone régulier ordinaire de m côtés.

Admettons maintenant qu'on joigne ces points de division de k en k, à partir de l'un d'eux.

Si k est premier avec m, la circonférence représentée par ma et l'arc ka sous-tendu par chacune des cordes successives ont mka pour plus petit multiple commun (*Arithm.*, 131), et l'on revient nécessairement au point de départ après avoir parcouru m fois l'arc ka ou k fois la circonférence ma. On forme donc ainsi un nouveau polygone régulier de m côtés. Seulement ses côtés s'entre-coupent, et on lui donne le nom de polygone régulier *étoilé.*

Si m et k ont un plus grand commun diviseur d, le plus petit multiple commun de la circonférence ma et de l'arc ka est $\frac{mka}{d}$, et l'on revient au point de départ après avoir parcouru $\frac{m}{d}$ fois l'arc ka ou $\frac{k}{d}$ fois la circonférence ma. On forme donc ainsi un polygone régulier de $\frac{m}{d}$ côtés et non plus de m côtés.

Il résulte de ce qui précède que le nombre des polygones réguliers, convexes ou étoilés, de m côtés, est égal au nombre des entiers premiers et inférieurs à m, c'est-à-dire au nombre des entiers premiers à m renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m-1$. Mais, si l'on remarque (*Arithm.*, 168) que les nombres premiers et inférieurs à m se répondent deux à deux, à égale

distance du plus petit et du plus grand de ces nombres qui sont 1 et $m-1$, en étant complémentaires à m, il est clair qu'on obtient le même polygone étoilé de m côtés en joignant les points de division de k en k (k étant premier à m) ou de $m-k$ en $m-k$. En réalité, le nombre des polygones réguliers de m côtés est donc égal au nombre des entiers premiers à m renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$.

D'après cela, si l'on donne à m les valeurs entières consécutives depuis 3 jusqu'à 17 par exemple, on a les résultats suivants. Il y a un seul triangle équilatéral, un seul carré et un seul hexagone régulier répondant à $k=1$. Il y a deux pentagones réguliers, pour $k=1$ et $k=2$; trois heptagones réguliers, pour $k=1$, $k=2$, $k=3$; deux octogones réguliers, pour $k=1$ et $k=3$; trois ennéagones réguliers, pour $k=1$, $k=2$, $k=4$; deux décagones réguliers, pour $k=1$ et $k=3$; cinq hendécagones réguliers, pour $k=1, 2, 3, 4, 5$; deux dodécagones réguliers, pour $k=1$ et $k=5$; six polygones réguliers de treize côtés, pour $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; trois polygones réguliers de quatorze côtés, pour $k=1$, $k=3$, $k=5$; quatre pentédécagones réguliers, pour $k=1$, $k=2$, $k=4$, $k=7$; quatre polygones réguliers de seize côtés, pour $k=1$, $k=3$, $k=5$, $k=7$; enfin, huit polygones réguliers de dix-sept côtés, pour $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Tout revient, pour obtenir les polygones réguliers de chaque espèce, à trouver le côté du premier d'entre eux.

1475. Il est facile de s'assurer que chaque racine *primitive* de l'équation binôme $x^m=1$ (1460, 1462) correspond précisément à un polygone régulier de m côtés, de sorte que le problème de la division de la circonférence en parties égales revient à la résolution de l'équation binôme $x^m=1$ ou à la détermination de ses racines primitives.

Prenons le rayon de la circonférence pour unité, et désignons par $u_m^{(k)}$ la longueur du côté du polygone régulier de m côtés, obtenu en joignant les m points de division de la circonférence de k en k, l'entier k étant premier et inférieur à m. Ce côté $u_m^{(k)}$, étant la corde de l'arc $k\frac{2\pi}{m}$, équivaut au double du sinus de l'arc moitié $k\frac{2\pi}{2m}$. On a ainsi cette formule

générale (*Trigon.*, 66)

$$u_m^{(k)} = 2\sin\frac{2k\pi}{2m} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2k\pi}{m}}{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{m}}.$$

Or, en se reportant au n° 1472, on voit que, quel que soit m, $2\cos\frac{2k\pi}{m}$ est toujours le double (z) de la partie réelle de la racine primitive x_k de l'équation $x^m = 1$. La détermination des racines primitives entraîne donc celle des côtés des polygones réguliers.

Nous allons parcourir quelques exemples.

Polygones réguliers, convexes et étoilés.

1476. *Triangle équilatéral* ($m = 3$, $k = 1$). — Il faut partir de l'équation $x^3 - 1 = 0$. En supprimant la racine 1, il vient $x^2 + x + 1 = 0$ et, en posant $x + \frac{1}{x} = z$, on a $z = -1$. Par suite,

$$z = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1 \qquad \text{et} \qquad u_3^{(1)} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3},$$

ce qui est bien le côté du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence de rayon 1 (*Géom.*, 205).

Les deux racines *primitives* de l'équation $x^3 - 1 = 0$ sont d'ailleurs les racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ ou $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Hexagone régulier ($m = 6$, $k = 1$). — On a (1475)

$$u_3^{(1)} = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1,$$

ce qui est bien le côté de l'hexagone régulier (*Géom.*, 205).

1477. *Pentagone régulier* ($m = 5$, $k = 1$ ou $k = 2$). — Il faut partir de l'équation $x^5 - 1 = 0$. En supprimant la racine 1, on a l'équation réciproque

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

qui, en posant $x + \frac{1}{x} = z$, devient (1119)

$$z^2 + z - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Les valeurs de z sont celles de $2\cos\frac{2\pi}{5}$ et de $2\cos\frac{4\pi}{5}$. D'après les signes des cosinus, on a donc

$$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{et} \quad 2\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Il vient alors (1475)

$$u_5^{(1)}=\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$u_5^{(2)}=\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ce sont bien les valeurs des côtés du pentagone régulier ordinaire et du pentagone régulier étoilé (*Géom.*, 207).

Décagone régulier. — ($m=10$, $k=1$ ou $k=3$). — Il faut partir de l'équation $x^{10}=1$ et trouver ses racines primitives. Pour cela, on peut chercher les racines primitives des deux équations $x^2=1$ et $x^5=1$ (1467).

L'équation $x^2=1$ n'a qu'une racine primitive qui est -1.

L'équation $x^5=1$ a quatre racines primitives imaginaires, conjuguées deux à deux et réciproques. Leurs sommes respectives ou les doubles de leurs parties réelles sont précisément les valeurs trouvées pour z dans la question précédente. En posant

$$z'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad z''=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

on les obtiendra donc par les deux équations du second degré

$$x^2-z'.x+1=0, \qquad x^2-z''.x+1=0.$$

La première a pour racines

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}-1}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right].$$

La seconde a pour racines

$$x=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1}=-\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}+1\mp i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

En multipliant ces résultats par -1, on aura les quatre racines primitives de l'équation $x^{10}=1$. Les doubles des parties réelles de ces

racines conjuguées deux à deux ou leurs sommes ont pour valeurs

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il en résulte, en raison des signes,

$$2\cos\frac{2\pi}{10} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$2\cos\frac{6\pi}{10} = 2\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La formule générale du n° 1475 donne ensuite

$$u_{10}^{(1)} = \sqrt{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$u_{10}^{(3)} = \sqrt{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ce sont bien les valeurs des côtés du décagone régulier ordinaire et du décagone régulier étoilé (*Géom.*, 206).

1478. *Pentédécagone régulier* ($m = 15$, $k = 1, 2, 4, 7$). — Il faut partir de l'équation $x^{15} = 1$, et trouver ses racines primitives. On les obtient (1467) en multipliant deux à deux les quatre racines primitives de l'équation $x^5 = 1$ et les deux racines primitives de l'équation $x^3 = 1$. On a ainsi les huit racines primitives de l'équation $x^{15} = 1$, qui sont, d'après les calculs précédents (1476, 1477),

$$\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right) \pm \frac{i}{8}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\ -\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right) \pm \frac{i}{8}\left(\sqrt{3}\ -\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right) \pm \frac{i}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\ +\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right) \pm \frac{i}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\ -\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

On aura les quatre valeurs de $z = 2\cos\frac{2k\pi}{m}$ (1472, 1475), en doublant les quatre parties réelles de ces huit racines imaginaires, conjuguées deux à deux. Ces valeurs de z représentent, dans un certain ordre (pour $k = 1, 2, 4, 7$), $2\cos\frac{2\pi}{15}$, $2\cos\frac{4\pi}{15}$, $2\cos\frac{8\pi}{15}$, $2\cos\frac{14\pi}{15}$, et l'on

a évidemment, d'après les signes des cosinus et les relations de grandeur des arcs,

$$\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)=2\cos\frac{14\pi}{15},$$

$$\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)=2\cos\frac{4\pi}{15},$$

$$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)=2\cos\frac{8\pi}{15},$$

$$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)=2\cos\frac{2\pi}{15}.$$

On obtient ainsi, pour les côtés des quatre pentédécagones réguliers et par ordre, les valeurs suivantes :

$$u_{15}^{(1)}=\sqrt{2-\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}},$$

$$u_{15}^{(2)}=\sqrt{2-\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}},$$

$$u_{15}^{(4)}=\sqrt{2-\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}},$$

$$u_{15}^{(7)}=\sqrt{2-\frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}.$$

Ces valeurs sont indiquées en Géométrie sous une autre forme. Nous avons trouvé (*Géom.*, 208)

$$u_{15}^{(1)}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),$$

$$u_{15}^{(2)}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$u_{15}^{(4)}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right),$$

$$u_{15}^{(7)}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

Il est facile de passer des valeurs précédentes à celles-ci par la transformation connue (*Alg. élém.*, 267 et suiv.), exprimée par la relation

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

1479. On a cru pendant longtemps que les polygones réguliers dont nous venons de nous occuper étaient les seuls qu'on pût inscrire dans

la circonférence par les procédés de la Géométrie élémentaire, c'est-à-dire à l'aide de la règle et du compas, ou, ce qui revient au même, en s'appuyant sur la résolution des équations du premier et du second degré. La considération des équations binômes a complètement généralisé le problème, puisque tout revient (1473) à la résolution de l'équation $x^m = 1$.

Gauss, le premier, a prouvé dans ses *Recherches arithmétiques* (1), qu'on pouvait inscrire par de semblables moyens tout polygone ayant un nombre de côtés exprimé par un nombre premier de la forme $2^n + 1$.

Plus généralement, Gauss, le premier, a montré qu'on pouvait réduire la résolution de l'équation $x^\mu = 1$, où μ est un nombre premier, à la résolution des équations plus simples, qui ont pour degrés respectifs les facteurs premiers, égaux ou inégaux, du nombre $\mu - 1$.

Ainsi, l'équation $x^{13} = 1$ ne demandera que la résolution de deux équations du second degré et d'une équation du troisième, puisqu'on a $13 - 1 = 2.2.3$. L'équation $x^{17} = 1$ n'exigera que la résolution de quatre équations du second degré, puisqu'on a $17 - 1 = 2.2.2.2$.

Pour terminer ces exemples, nous allons indiquer, d'après Gauss, comment on peut, de cette manière, inscrire le polygone régulier de dix-sept côtés.

Polygone régulier de dix-sept côtés.

1480. On a ici, d'après la relation générale (1473),

$$u_{17}^{(k)} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2k\pi}{17}},$$

et tout revient à la détermination géométrique de l'arc

$$\varphi = \frac{\pi}{17} \qquad (17\varphi = \pi). \tag{1}$$

Une formule connue (*Trigon.*, 90) donne, pour la somme des cosinus des multiples impairs de φ depuis 1 jusqu'à 15 [on a $m = 8$, le premier arc a est φ, et la raison h est 2φ],

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi \\ &= \frac{\sin 8\varphi \cos 8\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin 16\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Séparons alors en deux parties la somme des termes qui composent

(1) *Disquisitiones arithmeticæ*, Lipsiæ, 1801. Ce remarquable Ouvrage a été traduit en français par *Poullet-Delisle*. Courcier, 1807.

le premier membre de la relation (2), et posons

$$x = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 11\varphi,$$
$$y = \cos\varphi + \cos 9\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi.$$

On aura d'abord, d'après (2),

$$(\alpha) \qquad x + y = \frac{1}{2}.$$

Si l'on multiplie maintenant x par y et si l'on change les produits de cosinus obtenus en cosinus d'arcs simples (*Trigon.*, 81) [en réduisant ensuite et en tenant compte de la relation

$$\cos(17 - k)\varphi = \cos(\pi - k\varphi) = -\cos k\varphi,$$

il vient (*Trigon.*, 90)

$$xy = 2(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \cos 8\varphi + \cos 10\varphi + \cos 12\varphi + \cos 14\varphi + \cos 16\varphi)$$
$$= 2\frac{\sin 8\varphi \cos 9\varphi}{\sin\varphi} = 2\frac{\sin 8\varphi \cos(\pi - 8\varphi)}{\sin\varphi} = -2\frac{\sin 8\varphi \cos 8\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= -\frac{\sin 16\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\sin(\pi - \varphi)}{\sin\varphi} = -1.$$

On a donc la seconde équation

$$(\beta) \qquad xy = -1.$$

Les relations (α) et (β) donnent alors, par *une première équation du second degré*,

$$x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}), \qquad y = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17}).$$

[x est positif et y est négatif.]

Séparons de nouveau les sommes x et y en deux parties, et posons

$$x = s + t \begin{cases} s = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi, \\ t = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi; \end{cases}$$
$$y = u + v \begin{cases} u = \cos\varphi + \cos 13\varphi, \\ v = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi. \end{cases}$$

[s est positif et t négatif; u est positif et v négatif.]

On trouve, en multipliant respectivement s et t, u et v, et en opérant comme pour le produit xy,

$$st = -\frac{1}{4}, \qquad uv = -\frac{1}{4}.$$

Deux nouvelles équations du second degré détermineront donc les nombres s et t (puisqu'on connaît $x = s + t$) et les nombres u et v (puisqu'on connaît $y = u + v$).

Enfin, en remarquant qu'on a, d'une part,

$$\cos\varphi + \cos 13\varphi = u$$

et, de l'autre (*Trigon.*, 81),

$$\cos\varphi \cos 13\varphi = \frac{1}{2}(\cos 14\varphi + \cos 12\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) = -\frac{s}{2},$$

on voit que $\cos\varphi$ sera la racine positive de cette *quatrième équation du second degré*

$$\cos^2\varphi - u\cos\varphi - \frac{s}{2} = 0,$$

dont la racine négative représente $\cos 13\varphi$.

On a donc finalement

$$\cos\varphi = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2s}}{2},$$

et, par des constructions géométriques convenablement enchaînées, on peut déterminer l'arc φ, c'est-à-dire effectuer, à l'aide de la règle et du compas, la division de la demi-circonférence en dix-sept parties égales ou de la circonférence entière en trente-quatre parties égales. Le polygone régulier de trente-quatre côtés étant inscrit, le polygone régulier de dix-sept côtés s'en déduira immédiatement (1).

Résolution des équations trinômes.

1481. Soit l'équation trinôme, où les coefficients p et q sont donnés et où les exposants de x sont doubles l'un de l'autre (*Alg. élém.*, 272),

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

En prenant x^m pour inconnue, on en déduit

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et la résolution de l'équation trinôme est ramenée à celle de deux équations binômes générales (1456, 1457).

---

(1) Pour plus de détails sur cette solution, consulter l'Ouvrage de GAUSS, ainsi que l'*Essai sur la théorie des nombres*, de LEGENDRE (deuxième édition).

1482. Considérons le cas où, p et q étant des nombres réels, on a

$$\frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Les valeurs de x^m devenant des imaginaires conjuguées, on peut alors poser

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

$$-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

et l'on a, en ajoutant et en multipliant,

$$p = -2r\cos\alpha, \qquad q = r^2.$$

L'équation trinôme prend donc la forme

$$x^{2m} - 2rx^m\cos\alpha + r^2 = 0, \tag{1}$$

et l'on a, en même temps,

$$x^m = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha). \tag{2}$$

Les racines de la double équation (2) sont d'ailleurs données (1457) par la formule

$$x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right), \tag{3}$$

où il suffira d'attribuer à k les m valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, ou, plus généralement, m valeurs entières consécutives, pour obtenir les $2m$ racines distinctes de l'équation (1).

1483. On voit (1061) que les diviseurs du premier degré du premier membre de l'équation (1) [1482] sont de la forme

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right),$$

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} - i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right).$$

Si l'on donne dans ces deux expressions la même valeur à l'entier indéterminé k, le produit des deux diviseurs du premier degré correspondants représente un diviseur réel du se-

cond degré du premier membre de l'équation (1), et ce diviseur réel du second degré revêt à son tour la forme

$$\left(x - r^{\frac{1}{m}} \cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right)^2 + r^{\frac{2}{m}} \sin^2\frac{\alpha + 2k\pi}{m},$$

c'est-à-dire

$$x^2 - 2r^{\frac{1}{m}} x \cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + r^{\frac{2}{m}}.$$

Le produit de tous les diviseurs réels du second degré obtenus en donnant à l'entier k les m valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, reproduira (1061) le premier membre de l'équation (1).

On a ainsi l'identité

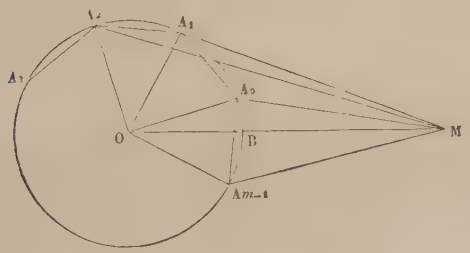
$$(4)\quad x^{2m} - 2rx^m \cos\alpha + r^2 = \prod_{k=0}^{k=m-1} \left(x^2 - 2r^{\frac{1}{m}} x \cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + r^{\frac{2}{m}}\right)$$

Théorème de Moivre et de Côtes.

1484. Les *théorèmes de* Moivre *et de* Côtes permettent de représenter géométriquement les diviseurs réels du second degré du premier membre d'une équation *trinôme* ou ce premier membre lui-même, ainsi que le premier membre d'une équation *binôme*.

Soit (*fig.* 36) un polygone régulier de m côtés, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{m}}$, et dont les sommets

Fig. 36.



soient A_0, A_1, A_2, ..., A_{m-1}. A partir de A_0, portons sur la circonférence un arc A_0B égal à $r^{\frac{1}{m}} \frac{\alpha}{m}$ (répondant, par consé-

quent, à l'arc $\frac{\alpha}{m}$ dans le cercle de rayon 1$\Big)$. Si α est positif, A_0B sera porté dans le sens A_0A_{m-1} et, si α est négatif, dans le sens contraire A_0A_1. Prenons sur le rayon OB une longueur OM représentant x, et joignons M à tous les sommets du polygone régulier inscrit. On formera ainsi des triangles successifs MOA_0, MOA_1, MOA_2, ..., MOA_{m-1}.

Soit l'un de ces triangles MOA_k. Il donne évidemment (*Trigon.*, 148)

$$\overline{MA_k}^2 = x^2 - 2r^{\frac{1}{m}}x\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + r^{\frac{2}{m}}.$$

L'identité (4) [1483] devient donc

$$(5)\quad x^{2m} - 2rx^m\cos\alpha + r^2 = \overline{MA_0}^2.\overline{MA_1}^2.\overline{MA_2}^2\ldots\overline{MA_{m-1}}^2.$$

Le produit des diviseurs réels du second degré du trinôme $x^{2m} - 2rx^m\cos\alpha + r^2$ *est* donc *figuré géométriquement par le carré du produit des distances du point* M *aux différents sommets du polygone* $A_0A_1A_2\ldots A_{m-1}$.

1485. Changeons α en $\pi + \alpha$ dans l'identité (4) [1483]. Elle deviendra

$$(4\ bis)\quad x^{2m} + 2rx^m\cos\alpha + r^2 = \prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2r^{\frac{1}{m}}x\cos\frac{\alpha + (2k+1)\pi}{m} + r^{\frac{2}{m}}\right).$$

Considérons le même polygone $A_0A_1A_2\ldots A_{m-1}$ (*fig.* 36); prenons les milieux A'_0, A'_1, A'_2, ..., A'_{m-1} des arcs sous-tendus par ses côtés, et joignons le point M à ces points milieux. On forme ainsi des triangles MOA'_0, MOA'_1, MOA'_2, ..., MOA'_{m-1}. L'un quelconque de ces triangles, MOA'_k, donne évidemment

$$\overline{MA'_k}^2 = x^2 - 2r^{\frac{1}{m}}x\cos\frac{\alpha + (2k+1)\pi}{m} + r^{\frac{2}{m}},$$

et la relation (4 *bis*) devient

$$(5\ bis)\quad x^{2m} + 2rx^m\cos\alpha + r^2 = \overline{MA'_0}^2.\overline{MA'_1}^2.\overline{MA'_2}^2\ldots\overline{MA'_{m-1}}^2.$$

Le produit des diviseurs réels du second degré du trinôme $x^{2m} + 2rx^m\cos\alpha + r^2$ *est* donc *figuré géométriquement par*

le carré du produit des distances du point M *aux différents points milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone* $A_0A_1A_2\ldots A_{m-1}$.

1486. On peut réunir les deux énoncés des numéros précédents (1484, 1485) en un seul.

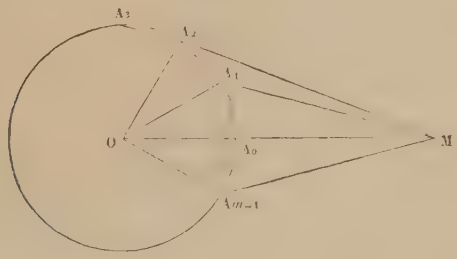
Inscrivons dans la circonférence de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{m}}$ un polygone régulier *de* $2m$ *côtés*, $A_0A'_0A_1A'_1A_2A'_2\ldots A_{m-1}A'_{m-1}$, en déterminant toujours le point B et le point M comme il a été indiqué (1484). On peut dire alors que

Le trinôme $x^{2m}-2rx^m\cos\alpha+r^2$ *est figuré géométriquement par le carré du produit des distances du point* M *aux sommets de rangs impairs du polygone, tandis que le trinôme* $x^{2m}+2rx^m\cos\alpha+r^2$ *est figuré par le carré du produit des distances du point* M *aux sommets de rangs pairs.*

C'est dans cette double proposition que consiste le *théorème de* Moivre.

1487. Supposons $\alpha=0$ ou $\cos\alpha=1$. L'arc $A_0B=r^{\frac{1}{m}}\frac{\alpha}{m}$ sera nul, et le point M sera (*fig.* 37) situé sur le rayon OA_0.

Fig. 37.



Le premier membre de l'identité (5) [1484] devient en même temps un carré. On peut donc extraire la racine carrée des deux membres, et l'on a

(6) $$x^m-r=\pm MA_0.MA_1.MA_2\ldots MA_{m-1},$$

suivant que le point M est *extérieur* ou *intérieur* à la circonférence O, c'est-à-dire suivant que x est *plus grand* ou *plus petit* que $r^{\frac{1}{m}}$.

Le premier membre de l'identité (5 *bis*) [1485] devient également un carré, on peut extraire la racine carrée des deux membres, et l'on a

$$(6\,bis) \qquad x^m + r = \mathrm{MA}'_0 . \mathrm{MA}'_1 . \mathrm{MA}'_2 \ldots \mathrm{MA}'_{m-1}.$$

C'est dans cette double proposition, facile à énoncer en langage ordinaire (1484, 1485), et qui s'applique alors aux équations binômes, que consiste le *théorème de* Côtes. La construction indiquée au n° 142, combinée avec la règle de la soustraction des quantités imaginaires (135), y conduit directement et immédiatement.

Application du théorème de Sturm aux équations trinômes. (*Voir* n° 1337.)

LIVRE SEIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE ET FIN).

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

Définitions.

1488. Considérons une suite de nombres

$$(1) \qquad y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{m-1},\ y_m.$$

Si l'on retranche chacun d'eux *de celui qui le suit*, on obtient une nouvelle suite

$$y_1 - y_0,\quad y_2 - y_1,\quad y_3 - y_2,\quad \ldots,\quad y_m - y_{m-1}.$$

Les termes de cette nouvelle suite s'appellent les *différences* des termes de la première : $y_1 - y_0$ est la *différence* de y_0; $y_2 - y_1$, la différence de y_1; ...; $y_m - y_{m-1}$, la différence de y_{m-1}.

Pour indiquer les différences, on se sert du signe Δ : ainsi, Δy_{m-1} indique la différence de y_{m-1}. Par conséquent, les différences des termes de la suite (1) forment la suite

$$(2) \qquad \Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_{m-1}.$$

Comme l'opération peut se renouveler, les termes de la suite (2) sont les *différences premières ou du premier ordre* des termes de la suite (1).

La suite (2) *a un terme de moins que la suite* (1).

On peut faire, pour les termes de la suite (2), ce qu'on vient de faire pour les termes de la suite (1). On forme ainsi les différences des différences premières ou les *différences secondes ou du second ordre* des termes de la suite (1). Les différences secondes sont

$$\Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \ldots, \quad \Delta y_{m-1} - \Delta y_{m-2};$$

on les désigne par le signe Δ^2, et elles forment la suite

$$\Delta^2 y_0, \quad \Delta^2 y_1, \quad \ldots, \quad \Delta^2 y_{m-2}. \tag{3}$$

La suite (3) *contient un terme de moins que la suite* (2).

En prenant les différences premières des différences secondes, on obtient les *différences troisièmes ou du troisième ordre* des termes de la première suite, et ces différences sont indiquées par le signe Δ^3.

On peut continuer de même et former les *différences quatrièmes ou du quatrième ordre*, les *différences cinquièmes ou du cinquième ordre*, ..., indiquées par les signes Δ^4, Δ^5, ...

A chaque nouvelle suite, le nombre des termes diminue nécessairement d'une unité, de sorte que, si la première suite renferme $m+1$ *quantités, la* $(m+1)^{ième}$ *en renferme une seule et ne donne lieu à aucune différence.*

Certains principes sont communs au *Calcul des différences* et au *Calcul différentiel*.

u, v, z, étant des quantités variables, on a

$$\begin{aligned}\Delta(u_0 + v_0 - z_0) &= (u_1 + v_1 - z_1) - (u_0 + v_0 - z_0)\\ &= (u_1 - u_0) + (v_1 - v_0) - (z_1 - z_0)\\ &= \Delta u_0 + \Delta v_0 - \Delta z_0.\end{aligned}$$

Par suite, *la différence d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des différences de ses parties* (568).

La différence d'une constante a étant nulle, on a donc

$$\Delta(u + a) = \Delta u.$$

a étant un facteur constant, on a

$$\Delta a u_0 = a u_1 - a u_0 = a(u_1 - u_0) = a \Delta u_0.$$

La différence du produit d'une fonction par une constante est donc *égale au produit de cette même constante par la différence de la fonction,* etc.

1489. On peut écrire les suites formées par les quantités proposées et leurs différences des divers ordres, en les disposant en colonnes verticales, comme dans le Tableau ci-dessous :

y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	⋮
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	⋮	⋮
y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	⋮	⋮	⋮
y_4	Δy_4	⋮	⋮	⋮	⋮
y_5	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Pour l'obtenir, il faut, par définition, *retrancher chaque nombre d'une colonne de celui qui le suit verticalement, et écrire le résultat trouvé à droite du nombre soustrait et sur la même ligne horizontale.*

Réciproquement, *chaque nombre du Tableau est égal à celui qui le précède verticalement, augmenté du nombre placé à la droite de ce dernier.* Par exemple, la relation

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 \qquad \text{donne} \qquad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1.$$

On a, pour la première colonne verticale, en particulier,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1, \\ y_3 &= y_2 + \Delta y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= y_{m-1} + \Delta y_{m-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ajoutant et en réduisant,

$$y_m = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{m-1},$$

formule facile à traduire en langage ordinaire et qu'on peut appliquer à chaque colonne verticale.

On peut dire encore que *chaque nombre du Tableau est égal à celui qui le suit verticalement, diminué du nombre placé à la droite du nombre considéré.* Par exemple, la relation

$$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 \qquad \text{donne} \qquad \Delta y_2 = \Delta y_3 - \Delta^2 y_2.$$

1490. Supposons qu'on veuille, d'après ce qui précède, indiquer le Tableau des différences des sept nombres

$$10,\ 14,\ 21,\ 33,\ 41,\ 57,\ 63;$$

on aura

	Δ.	Δ^2.	Δ^3.	Δ^4.	Δ^5.	Δ^6.
10	4	3	2	−11	32	−83
14	7	5	− 9	21	−51	
21	12	− 4	12	−30		
33	8	8	−18			
41	16	−10				
57	6					
63						

Si l'on donne, au contraire, le nombre 10 et les six différences successives 4, 3, 2, −11, 32, −83, et qu'on veuille retrouver la première colonne verticale, on opérera par addition sur la première ligne horizontale, en disant : $-83+32=-51$, $32-11=21$, $-11+2=-9$, $2+3=5$, $3+4=7$, $4+10=14$, et l'on reformera ainsi la seconde ligne horizontale du Tableau. Pour reconstituer la troisième ligne horizontale, on opérera de la même manière sur la seconde ligne horizontale, etc. Toutes les lignes horizontales étant connues, il en est de même de la première colonne verticale.

1491. Si l'on a à considérer, au point de vue des différences, des suites qui soient illimitées dans les deux sens, telles que la suite

$$\ldots,\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots,$$

rien n'est changé aux définitions précédentes, et l'on a toujours, d'une manière générale, quel que soit n (positif, négatif ou nul),

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, \qquad \Delta^{p+1} y_n = \Delta^p y_{n+1} - \Delta^p y_n.$$

Formules symboliques.

1492. I. *On donne les* $m+1$ *nombres* $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ [c'est-à-dire la première colonne verticale du Tableau indiqué au n° 1444], *et l'on demande de trouver l'expression générale d'une différence d'ordre quelconque relative à* u_0, *telle que* $\Delta^n u_0$ [c'est-à-dire d'un terme quelconque de la première ligne horizontale du même Tableau].

On a, par définition et par substitution,

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \qquad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \qquad \Delta u_2 = u_3 - u_2, \qquad \ldots,$$
$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,$$
$$\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1, \qquad \ldots,$$
$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \qquad \ldots.$$

Dans les seconds membres des égalités obtenues, on reconnaît les coefficients du développement de la puissance (qui correspond à l'indice de Δ) d'un binôme $x - a$. Pour $\Delta^2 u_0$, on a les coefficients d'un carré; pour $\Delta^3 u_0$, les coefficients d'un cube. Les indices de u sont les exposants de x dans les mêmes développements. Pour prouver que cette loi est générale, il suffit de vérifier que, si elle est vraie pour $\Delta^p u_0$, elle l'est encore pour $\Delta^{p+1} u_0$.

D'après l'hypothèse, on a (271)

$$(1)\quad \Delta^p u_0 = u_p - C_p^1 u_{p-1} + C_p^2 u_{p-2} - \ldots \mp C_p^{n-1} u_{p-n+1} \pm C_p^n u_{p-n} \mp \ldots \pm u_0.$$

Cette relation étant *admise* pour les $p+1$ nombres quelconques $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$, est également applicable à la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p+1}$. On a donc, en forçant tous les indices de u d'une unité,

$$(2)\quad \Delta^p u_1 = u_{p+1} - C_p^1 u_p + C_p^2 u_{p-1} - \ldots \pm C_p^n u_{p-n+1} \mp \ldots \pm u_1.$$

Mais, par définition,

$$\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0.$$

En retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), on a donc

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} \Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} - C_p^1 & u_p + C_p^2 & u_{p-1} - \ldots \pm C_p^n & u_{p-n+1} \mp \ldots \mp u_0. \\ \qquad\qquad - 1 & \quad + C_p^1 & \quad \pm C_p^{n-1} & \end{array}\right.$$

On a, d'ailleurs, d'une manière générale (277),

$$C_{p+1}^{n} = C_{p}^{n} + C_{p}^{n-1},$$

et la relation (3) devient

$$\Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} - C_{p+1}^{1} u_p + C_{p+1}^{2} u_{p-1} - \ldots \pm C_{p+1}^{n} u_{p-n+1} \mp \ldots \mp u_0.$$

Ainsi, lorsque la loi indiquée existe pour $\Delta^p u_0$, elle existe encore nécessairement pour $\Delta^{p+1} u_0$. Comme elle a été vérifiée directement pour $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$, elle est donc complètement générale.

On peut écrire la formule qu'on vient de démontrer, savoir

$$\text{(D)} \qquad \Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \ldots \pm u_0,$$

sous la forme *symbolique*

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n,$$

en convenant de remplacer, dans le développement du second membre, les exposants de u par les indices correspondants et le dernier terme 1 par u_0.

Si l'on donne, comme précédemment (1490), les sept nombres

$$u_0 = 10, \quad u_1 = 14, \quad u_2 = 21, \quad u_3 = 33,$$
$$u_4 = 41, \quad u_5 = 57, \quad u_6 = 63,$$

on a directement

$$\Delta^5 10 = (u-1)^5 = 57 - 5.41 + 10.33 - 10.21 + 5.14 - 10 = 32.$$

1493. II. *On donne le nombre u_0, ainsi que ses m différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$* (c'est-à-dire la première ligne horizontale du Tableau indiqué au n° 1490), *et l'on demande de trouver l'expression générale de l'un quelconque des $m+1$ nombres correspondants, tel que u_n* (c'est-à-dire d'un terme quelconque de la première colonne verticale du même Tableau).

On a, par définition et par substitution,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \qquad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \qquad \Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \qquad \ldots$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \qquad \Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1, \qquad \ldots,$$
$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \qquad \ldots.$$

Dans les seconds membres des égalités obtenues, on reconnaît les coefficients du développement de la puissance (qui correspond à l'indice de u) d'un binôme $a+x$. Pour u_2, on a les coefficients d'un carré; pour u_3, les coefficients d'un cube. Les indices de Δ sont les exposants de x dans les mêmes développements. Pour prouver que cette loi est générale, il suffit de vérifier que, si elle est vraie pour u_p, elle l'est encore pour u_{p+1}.

D'après l'hypothèse, on a

$$(1)\quad u_p = u_0 + C_p^1 \Delta u_0 + C_p^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + C_p^{n-1} \Delta^{n-1} u_0 + C_p^n \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^p u_0$$

Cette relation étant *admise* pour u_0 et les p différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ..., $\Delta^p u_0$, est également applicable à la suite Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, $\Delta^4 u_0$, ..., $\Delta^{p+1} u_0$. On a donc, en forçant d'une unité tous les indices du signe Δ,

$$(2)\quad \Delta u_p = \Delta u_0 + C_p^1 \Delta^2 u_0 + C_p^2 \Delta^3 u_0 + \ldots + C_p^{n-1} \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0$$

Mais, par définition,

$$u_{p+1} = u_p + \Delta u_p.$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on a donc

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} u_{p+1} = u_0 + C_p^1 & \Delta u_0 + C_p^2 & \Delta^2 u_0 + \ldots + C_p^n & \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} \\ \quad + 1 & \quad + C_p^1 & \quad + C_p^{n-1} & \end{array} \right.$$

En tenant compte, comme précédemment (1492), de la relation générale

$$C_{p+1}^n = C_p^n + C_p^{n-1},$$

la relation (3) devient

$$u_{p+1} = u_0 + C_{p+1}^1 \Delta u_0 + C_{p+1}^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + C_{p+1}^n \Delta^n u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0.$$

Ainsi, lorsque la loi indiquée existe pour u_p, elle existe encore nécessairement pour u_{p+1}. Comme elle a été vérifiée directement pour u_2 et u_3, elle est donc complètement générale.

On peut écrire la formule qu'on vient de démontrer, savoir

$$(N)\quad u_n = u_0 + \frac{n}{1} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0,$$

sous la forme *symbolique* (¹)

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0,$$

en convenant d'effectuer le développement comme si le signe Δ était une quantité, et en regardant les exposants trouvés pour Δ comme les indices de ce signe par rapport à u_0.

Si l'on donne, par exemple, comme précédemment (1490), le nombre $u_0 = 10$ et ses cinq différences successives

$$\Delta u_0 = 4, \quad \Delta^2 u_0 = 3, \quad \Delta^3 u_0 = 2, \quad \Delta^4 u_0 = -11, \quad \Delta^5 u_0 = 32,$$

on a directement

$$u_5 = (1+\Delta)^5 10 = 10 + 5.4 + 10.3 + 10.2 + 5(-11) + 32 = 57.$$

Différences des fonctions.

1494. Soit une fonction quelconque de x, $u = F(x)$. Désignons par x et par $x + h$ deux des valeurs consécutives attribuées à x. L'expression

$$\Delta u = \Delta F(x) = F(x + h) - F(x)$$

est la *différence première* de $F(x)$.

De même, si l'on change x en $x + h$ dans $\Delta F(x)$, l'expression

$$\Delta^2 u = \Delta^2 F(x) = \Delta F(x + h) - \Delta F(x)$$

est la *différence seconde* de $F(x)$; et ainsi de suite.

On aura, d'une manière générale, pour la différence d'ordre $n + 1$ (1491),

$$\Delta^{n+1} u = \Delta^{n+1} F(x) = \Delta^n F(x + h) - \Delta^n F(x).$$

Soit, par exemple, $u = a^x$. Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\Delta u = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1).$$

La différence première s'obtient donc ici en multipliant la valeur initiale de la fonction par la constante $a^h - 1$ relative à l'accroissement donné à x.

(¹) Il est utile de remarquer ces curieuses analogies des puissances avec les différences (1492, 1493) et avec les différentielles.

Il en résulte évidemment

$$\Delta^2 u = a^x(a^h-1)^2, \quad \Delta^3 u = a^x(a^h-1)^3, \quad \ldots, \quad \Delta^n u = a^x(a^h-1)^n$$

Différences des fonctions entières.

1495. Soit

$$(1) \quad y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

une fonction entière de x. Donnons à x des valeurs en progression arithmétique, telles que

$$(2) \quad \ldots x_0 - 2h, \quad x_0 - h, \quad x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h, \quad \ldots.$$

(La raison de cette progression est la constante h, et la quantité x_0 est complètement arbitraire.) Désignons par

$$(3) \quad \ldots \quad y_{-2}, \quad y_{-1}, \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots,$$

les valeurs correspondantes de la fonction. Nous aurons, d'une manière générale, d'après la formule (D) [1492],

$$(4) \quad \begin{cases} y = f(x), \\ \Delta y = f(x+h) - f(x), \\ \Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \\ \Delta^3 y = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il suffira de substituer à x, dans ces relations (4), les termes de la progression par différence (2), pour obtenir les valeurs successives de la fonction et celles de ses différences des divers ordres.

Cela posé, nous démontrerons le théorème suivant, qui est très important au point de vue des applications.

1496. *Lorsqu'on substitue, dans une fonction entière de x, de degré m, telle que*

$$y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

une suite de nombres en progression arithmétique, la différence d'ordre m de la fonction est une quantité constante, qu'on peut déterminer immédiatement d'après la fonction même.

On a, en effet, d'une manière générale, d'après la seconde des égalités (4) [1495] et d'après la série de Taylor (735),

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$
$$= \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) \ldots + \frac{h^m}{1.2.3 \ldots m} f^m(x).$$

La valeur de Δy est donc une fonction entière de x, de degré $m-1$, et ayant pour premier terme $m A_0 h x^{m-1}$.

On peut poser, par conséquent,

$$\Delta y = m A_0 h x^{m-1} + \ldots.$$

Ainsi, dans l'hypothèse adoptée, la différence Δy (ou du premier ordre) d'une fonction entière de x, $y = f(x)$, de degré m, est une fonction entière de degré $m-1$, dont le premier terme est le produit de la dérivée du premier terme de y par la raison h de la progression formée par les nombres substitués à la place de x.

La même propriété existe nécessairement pour la différence $\Delta^2 y$ (ou du second ordre) de la fonction y, puisque cette différence $\Delta^2 y$ est la différence du premier ordre de la fonction Δy; et l'on peut écrire immédiatement cette suite de résultats :

$$\Delta^2 y = m(m-1) A_0 h^2 x^{m-2} + \ldots,$$
$$\Delta^3 y = m(m-1)(m-2) A_0 h^3 x^{m-3} + \ldots.,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^m y = m(m-1)(m-2) \ldots 2.1. A_0 h^m.$$

Comme le degré de la fonction qui représente chaque différence est égal à m diminué de l'indice de la différence, ce degré s'abaisse d'une unité à chaque opération, *de sorte que la différence* $\Delta^m y$ *(ou d'ordre* m*) est indépendante de* x. Elle s'obtient d'ailleurs en multipliant par h^m ($m^{\text{ième}}$ puissance de la raison de la progression choisie) la $m^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction y (735).

Le théorème énoncé est donc établi, et l'on voit en même temps que *les différences de la fonction* y*, qui sont d'ordre supérieur à* m*, sont toutes nulles*

$$[\Delta^{m+1} y_0 = \Delta^m y_1 - \Delta^m y_0 = 0].$$

1497. Ce théorème montre que, *si l'on doit substituer à x, dans une fonction entière de x, $y = f(x)$, de degré m, une suite illimitée de nombres équidistants*

$$\ldots, \quad x_0 - 2h, \quad x_0 - h, \quad x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h, \quad \ldots,$$

il suffit de calculer directement les résultats fournis par m substitutions consécutives, pour pouvoir ensuite, par de simples additions, obtenir les résultats de toutes les autres substitutions.

C'est ce qui résulte des indications et du Tableau du n° 1490. Ayant m valeurs de y, on en aura $m - 1$ de Δy, $m - 2$ de $\Delta^2 y, \ldots$, une seule de $\Delta^{m-1} y$; mais on connaît directement (1496) la différence $\Delta^m y$. Comme la dernière colonne verticale qui renferme cette différence constante $\Delta^m y$ peut être continuée indéfiniment dans les deux sens, un seul terme déterminé dans la colonne précédente permet d'en écrire dans celle-ci autant qu'on veut; et ainsi de suite, de proche en proche (1489). On formera donc rapidement les lignes horizontales successives du Tableau, et l'on continuera en même temps, aussi loin qu'on voudra, la première colonne verticale qui renferme les valeurs consécutives de la fonction.

1498. On utilise ces considérations dans toutes les branches des Sciences mathématiques, pour dresser des Tables abrégeant ou remplaçant les calculs directs, aussi bien que pour obtenir certaines formules numériques.

Nous allons donner quelques exemples.

Applications.

1499. *Carrés des nombres entiers.* — La fonction est ici $y = x^2$. On doit substituer à la place de x les valeurs 1, 2, 3, 4, ..., de sorte que la raison h est l'unité. La différence *seconde* de la fonction est constante (1496) et égale à 2. Il suffit donc d'écrire dans une première colonne verticale les deux premiers carrés 1 et 4, dans une deuxième colonne leur différence 3 et, dans une troisième, la différence seconde constante 2, pour prolonger ensuite indéfiniment le Tableau (1497), en appliquant les formules

$$\Delta^2 y_0 + \Delta y_0 = \Delta y_1, \qquad \Delta y_1 + y_1 = y_2.$$

CARRÉS.	Δ.	Δ^2.
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	2
25	11	2
36	13	2
49	15	⋮
64	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

1500. *Cubes des nombres entiers.* — La fonction est ici $y = x^3$. La raison h est toujours l'unité. La différence *troisième* de la fonction est constante et égale à 6. Il suffit donc d'écrire dans la première colonne verticale du Tableau les trois premiers cubes 1, 8, 27; dans une deuxième colonne, leurs deux différences 7 et 19; dans une troisième colonne, la différence seconde correspondante qui est 12; et enfin, dans une quatrième colonne, la différence troisième constante 6. On peut prolonger ensuite le Tableau indéfiniment, en appliquant les formules

$$\Delta^3 y_0 + \Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_1, \qquad \Delta^2 y_1 + \Delta y_1 = \Delta y_2, \qquad \Delta y_2 + y_2 = y_3$$

CUBES.	Δ.	Δ^2.	Δ^3.
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	6
216	127	42	⋮
343	169	⋮	⋮
512	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

1501. *Somme des carrés des n premiers nombres.* — Considérons la suite

$$y_0 = 0^2,\ y_1 = 0^2 + 1^2,\ y_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2,\ y_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2,\ \ldots.$$

Les différences premières de cette suite étant les carrés consécutifs $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, il résulte de ce qui précède (1499) que les différences secondes des différences premières de la suite considérée ou *ses différences troisièmes* sont constantes et égales à 2, *de sorte que ses différences d'ordre supérieur n'existent pas*. On a donc ici

y.	Δy.	$\Delta^2 y$.	$\Delta^3 y$.
0^2	1	3	2
$0^2 + 1^2$	4	5	⋮
$0^2 + 1^2 + 2^2$	9	⋮	⋮
$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

Pour résoudre la question, il faut trouver le terme général y_n de la première colonne du Tableau, terme général qui est égal à

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

On n'a donc qu'à employer la formule (N) [1493], puisqu'on connaît y_0 et ses n différences successives, *qui se réduisent aux trois premières*. On a, par conséquent,

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0,$$

c'est-à-dire

$$y_n = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

comme on l'a déjà trouvé (284, 288).

On pourrait calculer d'une manière analogue la somme des cubes, celle des quatrièmes puissances, etc., des n premiers nombres entiers.

1502. *Somme des carrés des n premiers nombres impairs.* — Un nombre impair quelconque peut être représenté par $2x+1$, x recevant successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, ... Si l'on considère alors la fonction $y = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, on voit que les différences *secondes* en sont constantes et égales (1496) à $1.2.A_0 h^2$, c'est-à-dire égales à 8, puisque la raison h est encore égale à l'unité.

Cela posé, prenons la suite

$$y_0 = 0^2, \quad y_1 = 0^2 + 1^2, \quad y_2 = 0^2 + 1^2 + 3^2, \quad y_3 = 0^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2, \quad \ldots.$$

Les différences premières de cette suite étant les carrés $1^2, 3^2, 5^2, \ldots$,

des nombres impairs consécutifs, il résulte de ce qu'on vient de dire que les différences secondes des différences premières ou les différences *troisièmes* de la suite considérée sont constantes et égales à 8, *de sorte que ses différences d'ordre supérieur n'existent pas*. On a donc ici

y.	Δy.	$\Delta^2 y$.	$\Delta^3 y$.
0^2	1	8	8
0^2+1^2	9	16	⋮
$0^2+1^2+3^2$	25	⋮	⋮
$0^2+1^2+3^2+5^2$	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

Pour résoudre la question, il faut trouver le terme général y_n de la première colonne du Tableau, terme général qui est égal à

$$0^2+1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2.$$

On n'a donc qu'à employer encore la formule (N) [1493], puisqu'on connaît y_0 et ses n différences successives, *qui se réduisent aux trois premières*. On a, par conséquent,

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0,$$

c'est-à-dire

$$y_n = n + 4n(n-1) + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Si l'on pose, pour plus de simplicité, $2n-1=l$, on obtient

$$y_n = 0^2+1^2+3^2+5^2+\ldots+l^2 = \frac{l(l+1)(l+2)}{6} \quad (^1).$$

On pourrait calculer d'une manière analogue la somme des cubes, celle des quatrièmes puissances, etc., des n premiers nombres impairs.

---

(1) Les dernières formules établies (1501, 1502) sont utiles, entre autres applications, dans la théorie des *Ponts suspendus* : elles servent à calculer la somme des longueurs des tiges qui relient les chaînes au tablier, quand ces tiges sont équidistantes.

Résolution des équations numériques.

1503. La séparation des racines réelles d'une équation (1250) s'obtient, le plus souvent, en substituant dans le premier membre de l'équation une série de nombres, en général, équidistants. Lorsque le nombre des substitutions nécessaires s'accroît, le calcul des résultats correspondants devient pénible, et l'on doit chercher à le simplifier en le dirigeant d'une manière méthodique. L'algorithme qui résulte de la théorie des différences peut, dans ce cas, intervenir utilement. Nous allons insister sur ce point.

1504. L'équation proposée $y = f(x) = 0$ étant de degré m, la différence $m^{\text{ième}}$ de son premier membre est constante (1496) et égale à $1.2.3\ldots m\mathrm{A}_0 h^m$ [A_0 est le coefficient du premier terme de l'équation, et h la raison de la progression arithmétique formée par les nombres substitués à la place de x].

Ordinairement, on commence par substituer des nombres entiers consécutifs, tels que

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots,$$

de sorte que la raison h est alors égale à l'unité. Après avoir obtenu directement les résultats de m substitutions, on peut former le tableau indiqué précédemment (1497), et le poursuivre rapidement, dans un sens ou dans l'autre, en ayant soin de tenir compte des limites des racines réelles de l'équation, pour ne pas le prolonger inutilement.

S'il s'agit d'une équation du troisième degré, c'est la différence troisième de son premier membre qui est constante, et il suffit de chercher directement les valeurs de ce premier membre pour trois valeurs de x, qu'on prendra naturellement égales à -1, 0, 1.

S'il s'agit d'une équation du quatrième degré, c'est la différence quatrième de son premier membre qui est constante, et il suffit de chercher directement les valeurs de ce premier membre pour quatre valeurs de x convenablement choisies....

Le Tableau des substitutions effectuées et des valeurs correspondantes du premier membre de l'équation proposée

étant formé dans les limites convenables, on examine les changements de signes qu'il peut présenter d'une substitution à l'autre. Si ces changements de signes répondent au nombre des racines réelles possibles ou certaines (d'après l'étude complète faite au Livre IX), les racines réelles de l'équation sont *séparées*, et il ne reste qu'à en approcher davantage.

En général, le nombre des intervalles marqués par les changements de signes sera inférieur au nombre des racines réelles, possibles ou certaines. Il pourra même ne pas y avoir de changement de signes. Il faut alors recourir à de nouvelles substitutions plus resserrées et, pour ne pas en faire de tout à fait inutiles, il est bon de s'aider d'un tracé graphique.

Pour cela, on n'a qu'à tracer deux axes rectangulaires Ox et Oy, puis, à porter en abscisses les valeurs équidistantes de x et, en ordonnées, les valeurs correspondantes du premier membre de l'équation, inscrites au Tableau. En joignant par un trait continu les points ainsi déterminés, on a, approximativement, la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ [1074], et les points où cette courbe rencontre l'axe Ox font connaître, d'une manière également approximative, les valeurs de x qui annulent la fonction, ou les racines de l'équation $y = f(x) = 0$. Par conséquent, ce n'est que dans les intervalles qui semblent comprendre ces points d'intersection que l'on peut utilement essayer de nouvelles substitutions.

Ces nouvelles substitutions se feront en prenant la raison h de la nouvelle progression arithmétique formée par les valeurs de x, égale à 0,1. En général, elles suffisent pour décider (en reprenant s'il est nécessaire le tracé de la courbe représentative dans les intervalles considérés) s'il existe ou non des racines réelles dans ces intervalles.

Le Tableau relatif aux nouvelles substitutions peut d'ailleurs être établi suivant les mêmes règles que le premier Tableau relatif aux substitutions entières.

En continuant à opérer ainsi, on pourra non seulement *séparer* les racines réelles de l'équation, mais en *approcher* régulièrement à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc.

Nous allons montrer comment cette méthode spéciale peut s'appliquer aux équations du troisième degré et aux équations de degré supérieur.

Équations du troisième degré.

1505. Avant de passer aux exemples, nous indiquerons comment on peut, au lieu de chercher directement les nouvelles différences qui répondent à la nouvelle raison 0,1 et qui doivent servir de point de départ pour approcher davantage des racines, les déduire des premières différences calculées en supposant $h = 1$.

L'équation considérée étant du troisième degré, on a ici (1495)

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \\ = \dfrac{h}{1} f'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \dfrac{h^3}{1.2.3} f'''(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

$\varphi(x)$ est une fonction entière du second degré, puisque $f'''(x)$ est une constante (1496).

On a alors, à la fois,

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta\varphi(x) = \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x),$$

$$\varphi'(x) = \frac{h}{1} f''(x) + \frac{h^2}{1.2} f'''(x),$$

$$\varphi''(x) = \frac{h}{1} f'''(x).$$

La valeur de $\Delta^2 y$ devient donc

$$(2) \qquad \Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = h^2 f'(x) + h^3 f'''(x) = \psi(x).$$

$\psi(x)$ étant à son tour une fonction entière du premier degré, il vient

$$(3) \qquad \Delta^3 y = \Delta^3 f(x) = \Delta\psi(x) = h\psi'(x) = h^3 f'''(x).$$

On a ainsi les relations suivantes :

$$\Delta y = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x),$$

$$\Delta^2 y = h^2 f''(x) + h^3 f'''(x),$$

$$\Delta^3 y = h^3 f'''(x).$$

Ces formules étant complètement générales, elles seront encore vraies lorsque la raison deviendra dix fois plus petite.

En désignant les nouvelles différences par le symbole δ et en remplaçant h par $\frac{h}{10}$, on aura donc

$$\delta y = \frac{h}{10} f'(x) + \frac{h^2}{200} f''(x) + \frac{h^3}{6000} f'''(x),$$

$$\delta^2 y = \frac{h^2}{100} f''(x) + \frac{h^3}{1000} f'''(x),$$

$$\delta^3 y = \frac{h^3}{1000} f'''(x).$$

On voit que :

1° La nouvelle différence $\delta^3 y$ est la millième partie de la différence primitive $\Delta^3 y$;

2° $\delta^2 y$ est composée de cette même quantité $\frac{\Delta^3 y}{1000}$, augmentée de la centième partie de [éq. (2)]

$$h^2 f''(x) = \Delta^2 y - h^3 f'''(x) = \Delta^2 y - \Delta^3 y,$$

c'est-à-dire de la centième partie de la différence qui précède verticalement $\Delta^2 y$ dans la colonne des Δ^2 (ce qui tient à ce que $\Delta^3 y$ demeure constant);

3° δy est composé de trois termes dont les deux derniers sont connus d'après ce qu'on vient de dire, et égaux respectivement à la deux-centième partie du terme qui précède verticalement $\Delta^2 y$ dans la colonne des Δ^2 et à la six-millième partie de $\Delta^3 y$; quant au premier terme de δy, égal au dixième de $h f'(x)$ [éq. (1)], il est, d'après ce qui précède, égal au dixième de

$$\Delta y - \frac{\Delta^2 y - \Delta^3 y}{2} - \frac{\Delta^3 y}{6}.$$

En résumé, si l'on désigne par y_0 la valeur de la fonction $f(x)$, qui sert de point de départ, et par y_{-1} la valeur qui la précède verticalement dans le Tableau déjà formé pour les premières substitutions et qui correspond au symbole Δ, on a

$$(A) \quad \begin{cases} \delta y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{6000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{200} + \frac{1}{10}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right), \\ \delta^2 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{100}, \\ \delta^3 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000}. \end{cases}$$

Les formules (A), complètement générales, permettent de passer des différences Δ qui répondent à une valeur quelconque de la raison h aux différences δ qui répondent à une raison dix fois moindre.

Exemple.

1506. *Soit l'équation* $y = f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$, *déjà résolue* (1390). Cette équation a deux racines positives et une racine négative. Ses racines ont pour limites 3 et — 4. La fonction prend les valeurs 13, 7, 1, pour les substitutions — 1, 0, 1.

Les deux différences premières correspondantes sont donc — 6 et — 6. Quant à la différence seconde *constante,* elle est égale à 6. On peut donc établir immédiatement le Tableau suivant pour les substitutions entières.

x.	y.	Δ.	Δ^2.	Δ^3.
— 4	— 29	30	— 18	6
— 3	1	12	— 12	6
— 2	13	0	— 6	6
— 1	13	— 6	0	6
0	7	— 6	6	6
1	1	0	12	
2	1	12		
3	13			

On voit qu'il y a une racine négative entre — 3 et — 4. Quant aux racines positives, elles ne sont pas encore séparées, de sorte qu'elles tombent toutes les deux entre deux substitutions entières consécutives.

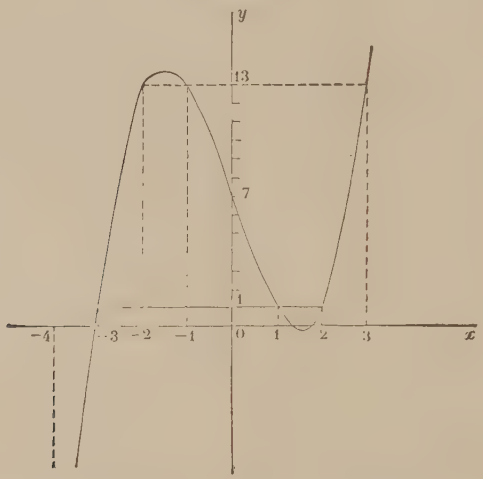
Pour déterminer l'intervalle correspondant, on peut, à l'aide du Tableau ci-dessus, esquisser (*fig.* 38) la courbe représentative de la fonction entre $x = -4$ et $x = 3$, en prenant une échelle convenable pour les abscisses et pour les ordonnées (sur la figure, l'échelle des ordonnées est moitié de celle des abscisses). La marche de la courbe obtenue indique immédiatement que les deux racines positives sont comprises entre 1 et 2. Si l'on ne savait pas d'avance que ces racines existent, la conclusion (dubitative au lieu d'être certaine) serait encore la même. Car une droite parallèle à l'axe Ox ne pouvant couper la courbe *en plus de trois points* (1), la forme indiquée est bien approximativement celle

(1) En effet, soit d la distance d'une droite parallèle à Ox, à cet axe; si cette droite coupait la courbe en plus de trois points, l'équation $x^3 - 7x + 7 = d$ aurait plus de trois racines.

de la courbe représentative de la fonction. Dès lors, si la courbe rencontre effectivement l'axe des abscisses à droite de l'origine O, ce ne peut être qu'entre les points 1 et 2. (La courbe a un point maximum entre $x = -2$ et $x = -1$, un point minimum entre $x = 1$ et $x = 2$, un point d'inflexion sur l'axe des y au point 7.)

Il ne nous reste plus qu'à partager l'intervalle de $x = 1$ à $x = 2$ en dix parties égales pour avoir les deux racines positives à 0,1 près.

Fig. 38.



Le $\Delta^2 y$ qui correspond à $x = 0$ étant 6, les formules (A) du n° 1505 donnent

$$\delta^3 y = 0{,}006; \qquad \delta^2 y = 0{,}066; \qquad \delta y = -0{,}369.$$

On peut donc former ce second Tableau, en négligeant la virgule dans l'expression des différences pour simplifier l'écriture :

x.	y.	δ.	δ^2.	δ^3.
1	1,000	— 369	66	6
1,1	0,631	— 303	72	6
1,2	0,328	— 231	78	6
1,3	0,097	— 153	84	6
1,4	— 0,056	— 69	90	6
1,5	— 0,125	21	96	
1,6	— 0,104	117		
1,7	+ 0,013			

L'une des racines cherchées est comprise entre 1,3 et 1,4; l'autre tombe entre 1,6 et 1,7.

En suivant le même procédé, on approchera davantage des trois racines séparées.

Si l'on veut, par exemple, obtenir la première racine positive à 0,01 près, on substituera à x, entre 1,3 et 1,4, des valeurs variant d'un centième.

On se servira encore des formules (A) (1505), en mettant dans leurs seconds membres, à la place des valeurs des Δ, les valeurs des δ qui répondent au nouveau point de départ et qui sont fournies par le Tableau ci-dessus.

Pour $x = 1,3$, on a, d'après ce Tableau,

$$y = 0,097, \qquad \delta y = -0,153, \qquad \delta^2 y = 0,084, \qquad \delta^3 y = 0,006.$$

Les nouvelles valeurs à employer pour les différences δ seront donc (le δ^2 qui précède celui indiqué étant 0,078),

$$\delta y = -0,018909, \qquad \delta^2 y = 0,000786, \qquad \delta^3 y = 0,000006.$$

On pourra ainsi former ce troisième Tableau :

x.	y.	δy.	$\delta^2 y$.	$\delta^3 y$.
1,3	0,097000	— 18909	786	6
1,31	0,078091	— 18123	792	6
1,32	0,059968	— 17331	798	6
1,33	0,042637	— 16533	804	6
1,34	0,026104	— 15729	810	
1,35	0,010375	— 14919		
1,36	— 0,004544			

La première racine positive tombe, par suite, entre 1,35 et 1,36, et est déterminée à 0,01 près; etc.

Équations de degrés supérieurs.

1507. Le procédé que nous avons suivi relativement aux équations du troisième degré, pour déduire, des premières différences obtenues dans chaque cas particulier, celles qui correspondent à une raison dix fois moindre, s'applique moins commodément aux équations de degré supérieur. Nous indi-

querons donc ici un moyen plus expéditif de parvenir au résultat cherché, lorsqu'on dépasse le troisième degré.

Supposons qu'on veuille résoudre par les différences l'équation du *quatrième degré*

$$y = f(x) = 0. \tag{1}$$

Nous aurons (1495)

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{IV}(x).$$

On peut, par suite, en partant des deux valeurs $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(x_0 + h)$, poser $[\Delta y_0 = y_1 - y_0]$

$$y_1 = y_0 + ah + bh^2 + ch^3 + dh^4.$$

Les coefficients a, b, c, sont inconnus; mais le coefficient d de h^4 n'est autre chose (735) que le coefficient de x^4 dans l'équation (1).

Pour passer de y_1 à y_2 ou à y_3 (c'est-à-dire du résultat qui correspond à $x_0 + h$ à celui qui correspond à $x_0 + 2h$ ou à $x_0 + 3h$), il suffit de remplacer dans la valeur de y_1 l'accroissement h par $2h$ ou par $3h$. Nous aurons ainsi

$$y_2 = y_0 + 2ah + 4bh^2 + 8ch^3 + 16dh^4,$$
$$y_3 = y_0 + 3ah + 9bh^2 + 27ch^3 + 81dh^4.$$

Des trois relations qu'on vient d'écrire, on tire, d'après la formule fondamentale (D) (1492),

$$\begin{cases} \Delta y_0 = ah + bh^2 + ch^3 + dh^4, \\ \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = 2bh^2 + 6ch^3 + 14dh^4, \\ \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 6ch^3 + 36dh^4. \end{cases} \tag{2}$$

On a en même temps (1496)

$$\Delta^4 y_0 = 1.2.3.4\,dh^4 = 24dh^4.$$

Ayant calculé directement Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, les trois équations (2) serviront d'abord à déterminer les trois inconnues a, b, c, de la manière la plus simple; car, d étant le coefficient de x^4 dans l'équation (1), la troisième des équations (2) don-

nera c, la seconde fournira alors la valeur de b et, la première, celle de a.

Cela fait, les formules ci-dessus, qui sont complètement générales, permettront de passer aux nouvelles différences δ, qu'on doit employer quand la raison h devient dix fois moindre. En remplaçant le symbole Δ par le symbole δ et $\frac{h}{10}$ par h', on aura donc finalement :

$$(A') \quad \begin{cases} \delta y_0 = ah' + bh'^2 + ch'^3 + dh'^4, \\ \delta^2 y_0 = 2bh'^2 + 6ch'^3 + 14dh'^4, \\ \delta^3 y_0 = 6ch'^3 + 36dh'^4, \\ \delta^4 y_0 = 24dh'^4. \end{cases}$$

1508. On opérerait d'une manière identique au delà du quatrième degré.

Pour le cinquième degré, en partant de la relation

$$y_1 = y_0 + ah + bh^2 + ch^3 + dh^4 + gh^5,$$

où g n'est autre chose que le coefficient de x^5 dans l'équation proposée, on aura d'abord

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + 2ah + 4bh^2 + 8ch^3 + 16dh^4 + 32gh^5, \\ y_3 &= y_0 + 3ah + 9bh^2 + 27ch^3 + 81dh^4 + 243gh^5, \\ y_4 &= y_0 + 4ah + 16bh^2 + 64ch^3 + 256dh^4 + 1024gh^5. \end{aligned}$$

On en déduira

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= ah + bh^2 + ch^3 + dh^4 + gh^5, \\ \Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0 = 2bh^2 + 6ch^3 + 14dh^4 + 30gh^5, \\ \Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 6ch^3 + 36dh^4 + 150gh^5, \\ \Delta^4 y_0 &= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 24dh^4 + 240gh^5. \end{aligned}$$

On a en même temps

$$\Delta^5 y_0 = 1.2.3.4.5.\, gh^5 = 120gh^5.$$

Ayant calculé directement les différences Δ, elles permettront de déterminer facilement et par ordre les inconnues d, c, b, a. Cela fait, et la raison h devenant $h' = \frac{h}{10}$, on ob-

tiendra les nouvelles différences δ par les formules

$$(A'')\quad \begin{cases} \delta y_0 = ah' + bh'^2 + ch'^3 + dh'^4 + gh'^5, \\ \delta^2 y_0 = 2bh'^2 + 6ch'^3 + 14dh'^4 + 30gh'^5, \\ \delta^3 y_0 = 6ch'^3 + 36dh'^4 + 150gh'^5, \\ \delta^4 y_0 = 24dh'^4 + 240gh'^5, \\ \delta^5 y_0 = 120gh'^5. \end{cases}$$

Exemple.

1509. *Soit l'équation* $[y = f(x) = 0]$

$$(1)\qquad 8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0.$$

Son premier membre présente quatre variations. Elle a donc quatre racines positives, ou deux, ou aucune (1255). Elle ne peut avoir aucune racine négative (1361), et l'on voit facilement (1350) que 5 est une limite supérieure de ses racines positives.

L'équation dérivée est, en divisant les deux membres par 2,

$$(2)\qquad 16x^3 - 60x^2 + 57x - 20 = 0.$$

On réduira d'abord le coefficient du premier terme à l'unité, en posant (1103, 1106) $z = 16x$. On fera disparaître le second terme de la transformée en z obtenue,

$$z^3 - 60z^2 + 912z - 5120 = 0,$$

en posant (1110) $z = u + 20$, et l'on aura, comme transformée en u,

$$u^3 - 288u - 2280 = 0.$$

Cette transformée n'a (1286) qu'une seule racine réelle, positive. Il en est donc de même de l'équation dérivée (2). Il en résulte que l'équation donnée (1) ne peut pas avoir quatre racines positives (1283). Elle en a donc ***deux au plus***, qu'il s'agit de déterminer.

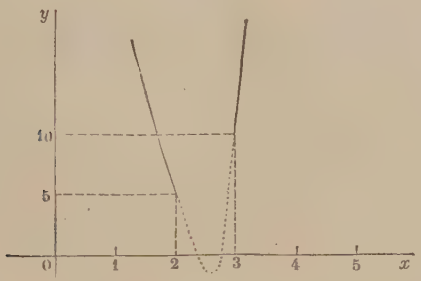
Nous commencerons par former le Tableau des substitutions entières :

x.	y.	Δ.	Δ^2.	Δ^3.	Δ^4.
0	49	— 15	— 14	48	192
1	34	— 29	34	240	192
2	5	5	274	432	⋮
3	10	279	706		⋮
4	289	985			⋮
5	1274				⋮

Comme la fonction ne présente dans ce Tableau aucun changement de signe, les racines positives, si elles existent, tombent entre deux entiers consécutifs.

Si l'on esquisse, à une échelle convenable, la courbe représentative de la fonction (*fig.* 39), à l'aide des valeurs inscrites au Tableau, en

Fig. 39.



prenant, pour plus de commodité, une unité cinq fois plus petite pour les ordonnées, on voit immédiatement que c'est, *probablement*, entre les entiers 2 et 3.

C'est donc cet intervalle qu'on partagera en dix parties égales.

On a ici, d'après le nouveau point de départ,

$$\Delta y_0 = 5, \qquad \Delta^2 y_0 = 274, \qquad \Delta^3 y_0 = 432, \qquad \Delta^4 y_0 = 192.$$

Comme on a $h = 1$ et $d = 8$, on a d'abord à résoudre les équations (1507)

$$5 = a + b + c + 8,$$
$$274 = 2b + 6c + 112,$$
$$432 = 6c + 288,$$

qui donnent immédiatement

$$c = 24, \qquad b = 9, \qquad a = -36.$$

Les équations (A') [1507], où l'on doit faire $h' = 0,1$, conduisent ensuite aux valeurs

$$\delta y_0 = -3,4852; \quad \delta^2 y_0 = 0,3352; \quad \delta^3 y_0 = 0,1728; \quad \delta^4 y_0 = 0,0192.$$

Ces résultats permettent d'établir ce second Tableau, où, pour plus de rapidité, nous laisserons de côté la virgule dans les différences.

x.	y.	δ.	δ^2.	δ^3.	δ^4.
2	5,0000	—34852	3352	1728	192
2,1	1,5148	—31500	5080	1920	192
2,2	— 1,6352	—26420	7000	2112	192
2,3	— 4,2772	—19420	9112	2304	192
2,4	— 6,2192	—10308	11416	2496	192
2,5	— 7,2500	1108	13912	2688	192
2,6	— 7,1392	15020	16600	2880	192
2,7	— 5,6372	31620	19480	3072	⋮
2,8	— 2,4752	51100	22552		⋮
2,9	+ 2,6348	73652			⋮
3	10,0000				⋮

y change de signe, quand x passe de 2,1 à 2,2 et de 2,8 à 2,9. L'équation proposée a donc deux racines positives, l'une comprise entre 2,1 et 2,2, l'autre entre 2,8 et 2,9. Ces racines sont séparées et déterminées à 0,1 près. On pourra en approcher davantage en renouvelant la même opération.

Construction de Tables numériques.

1510. Nous terminerons ce Chapitre en faisant remarquer l'utilité de la théorie des différences, pour la construction des Tables numériques de toute espèce.

Il arrive très souvent, en effet, que, lorsque l'on considère des nombres dont la formation est assujettie à une loi régulière et qui se succèdent d'une manière suffisamment rapprochée, les différences correspondantes tendent à devenir constantes à mesure que leur ordre s'élève. On peut, dans ce cas, en négligeant les quantités qui n'influent pas sur le degré d'approximation demandé (et en concordance avec la méthode infinitésimale), regarder les différences d'un certain ordre comme invariables dans un intervalle plus ou moins étendu; ce qui donne la possibilité de calculer les valeurs de la fonction dans le même intervalle, comme si elle était devenue une fonction entière (1497).

Nous allons appliquer ces indications à un exemple bien connu.

1511. Soit la fonction

$$u = \log x.$$

Nous aurons (1494)

$$\Delta u = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Mais nous avons obtenu précédemment (908) le développement

$$l\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \dots.$$

Il viendra donc, en posant $\frac{1}{N} = \frac{h}{x}$ et en s'arrêtant au troisième terme du second membre,

$$(1) \qquad \Delta u = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\right).$$

Nous aurons ensuite, d'après la formule fondamentale (D) (1492) et l'accroissement h restant constant (1494),

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x \\ &= [\log(x+2h) - \log x] - 2[\log(x+h) - \log x] \\ &= \log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1 + \frac{h}{x}\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir $\log\left(1 + \frac{2h}{x}\right)$, il suffira de remplacer h par $2h$ dans la valeur de Δu. On trouvera, par suite, en substituant et en simplifiant,

$$(2) \qquad \Delta^2 u = -M\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \dots\right).$$

En continuant de même,

$$\begin{aligned}\Delta^3 u &= \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x \\ &= [\log(x+3h) - \log x] - 3[\log(x+2h) - \log x] + 3[\log(x+h) - \log x] \\ &= \log\left(1 + \frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1 + \frac{h}{x}\right).\end{aligned}$$

On obtiendra $\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)$ en mettant $3h$ à la place de h dans la valeur de Δu. On aura donc finalement, en substituant et en simplifiant,

$$\Delta^3 u = \mathrm{M}\left(\frac{2h^3}{x^3} - \dots\right). \tag{3}$$

On a d'ailleurs, pour le *module relatif* M (663),

$$\mathrm{M} = \log e = 0,434294481903251\dots.$$

Si l'on prend pour point de départ $x = 10000$ et $h = 1$, on trouve alors

$$\Delta u = \mathrm{M}\left(\frac{1}{10^4} - \frac{1}{2.10^8} + \frac{1}{3.10^{12}} - \dots\right) = 0,000043427276863\dots,$$

$$\Delta^2 u = -\mathrm{M}\left(\frac{1}{10^8} - \frac{2}{10^{12}} + \dots\right) = -0,000000004342076\dots,$$

$$\Delta^3 u = \mathrm{M}\left(\frac{2}{10^{12}} - \dots\right) = 0,000000000000868\dots.$$

D'après ces valeurs, on voit qu'il est permis, si l'on ne veut obtenir les logarithmes des nombres entiers à partir de 10000 qu'*avec dix décimales exactes*, de négliger, pendant un long intervalle, les différences du quatrième ordre en regardant celles du troisième ordre comme invariables (1497). On formera donc, suivant la règle connue (1490), les différentes lignes horizontales du Tableau, la première étant complète et commençant par 4, logarithme de 10000. On aura ainsi, dans la première colonne verticale, les logarithmes des nombres consécutifs 10001, 10002, 10003, ...

On fera les calculs *avec quinze décimales*, en raison de l'accumulation des quantités négligées qui doivent finir par influer sur le dernier chiffre décimal qu'on veut conserver, c'est-à-dire sur celui du dixième ordre. Il faudra donc, de distance en distance, *faire la preuve* des calculs effectués ou comparer les résultats obtenus avec les logarithmes des mêmes nombres, trouvés directement. Tant qu'il n'y aura pas, de part et d'autre, de désaccord dans les dix premiers chiffres décimaux, on continuera sans changement; mais, dès que le dixième chiffre décimal fourni par les différences cessera

d'être exact, il sera nécessaire de modifier le point de départ. En d'autres termes, on calculera de nouveau, à l'aide des formules ci-dessus, les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, relatives au dernier nombre auquel il aura fallu s'arrêter, et l'on s'en servira pour constituer un second Tableau qui renfermera les logarithmes des nombres entiers suivants.

CHAPITRE II.

DE L'INTERPOLATION.

Définitions et observations préliminaires.

1512. D'une manière générale, l'*Interpolation* consiste à insérer, entre les termes d'une suite donnée, de nouveaux termes assujettis à la même loi avec une autre échelle. Par exemple, quand on insère, entre les termes consécutifs d'une progression par différence ou par quotient, un même nombre de *moyens* (*Alg. élém.*), on résout un problème d'interpolation.

Dans ce cas, la loi de succession des termes est connue et très facile à appliquer aux termes intermédiaires que l'on cherche. Mais, le plus souvent, c'est l'expérience qui a fourni des nombres dont la loi de succession reste alors inaperçue, et ce n'est qu'*approximativement* que l'on peut calculer, à défaut d'expériences directes, les nombres intermédiaires. On y parvient à l'aide de la *théorie des différences*, en imposant aux termes inconnus la condition que leurs différences soient nulles à partir d'un certain ordre ou constantes à partir de l'ordre précédent. Par l'introduction de cette condition, l'indétermination est levée.

C'est ainsi que, pour pouvoir calculer les logarithmes des nombres *non inscrits* dans la Table, on *admet* qu'il y a *proportionnalité* entre les petits accroissements des nombres et les accroissements correspondants des logarithmes (*Alg. élém.*, 407). Dans cette hypothèse, à des accroissements égaux des nombres répondent des accroissements égaux des logarithmes, c'est-à-dire que les différences *premières* des logarithmes sont *supposées* constantes ou que leurs différences *secondes* sont *supposées* nulles. L'examen de la partie élevée d'une Table de

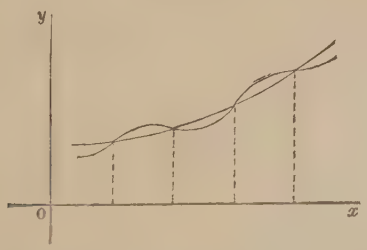
logarithmes (*Alg. élém.*, 412) justifie d'ailleurs la proportionnalité adoptée, eu égard au degré d'approximation consenti.

1513. D'une manière plus précise, l'interpolation a pour but d'*exprimer* une fonction d'une variable (exactement ou approximativement), lorsqu'on connaît les valeurs de la fonction qui répondent à un certain nombre de valeurs données de la variable, afin de pouvoir ensuite facilement trouver les valeurs intermédiaires de la fonction pour des valeurs intermédiaires de la variable.

Il est clair que le problème demeure *indéterminé*, tant que la forme ou la nature de la fonction cherchée n'est pas fixée. Il existe, en effet, une infinité de fonctions qui peuvent, pour les valeurs données de la variable, présenter les mêmes valeurs que la fonction inconnue ou se confondre avec elle, en s'en écartant plus ou moins dans les intervalles limités par les valeurs communes.

C'est ce qu'un tracé graphique (*fig.* 40) met complètement

Fig. 40.



en évidence. Si l'on porte en abscisses les valeurs de la variable et, en ordonnées, les valeurs correspondantes de la fonction, on peut réunir les différents points ainsi obtenus par une infinité de courbes qui, toutes, satisferont aux conditions imposées ou qui, toutes, représenteront aussi bien la fonction cherchée si l'on s'en tient aux seules données numériques de la question. (Il est entendu d'ailleurs, *au point de vue physique*, que la *continuité* qu'on observe, en général, dans les phénomènes naturels, conduira à choisir, entre toutes les courbes possibles, celle qui offre le moins de sinuosités ou celle qui, dans la région considérée, se rapproche davantage de la marche indiquée d'une manière générale par l'ensemble des points construits.)

Pour que le problème énoncé devienne *déterminé,* il faut donc que la fonction cherchée soit donnée de forme et qu'elle renferme autant de paramètres distincts qu'on connaît de valeurs de la fonction. On aura alors autant d'équations de condition que de coefficients inconnus, et l'on pourra trouver la fonction cherchée, exactement ou approximativement.

Nous établirons d'abord la *formule d'interpolation de* NEWTON, *qui suppose équidistantes les valeurs données de la variable.*

Formule d'interpolation de Newton.

1514. Considérons la formule fondamentale (N) [1493], en l'écrivant comme il suit :

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{1.2.3\dots n}\Delta^n u_0.$$

On connaît $n+1$ valeurs de la variable x, en progression par différence de raison h, désignées par

$$x_0, \quad x_0+h, \quad x_0+2h, \quad x_0+3h, \quad \dots, \quad x_0+nh,$$

ainsi que les $n+1$ valeurs correspondantes de la fonction u, désignées par

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots, \quad u_n.$$

[Puisqu'on donne seulement $n+1$ valeurs de la fonction u qu'il s'agit de trouver, elle ne doit pas contenir plus de $n+1$ paramètres distincts (1513), et il est sous-entendu que ses différences d'ordre $n+1$ doivent être nulles (1512).]

Posons $x_n = x_0 + nh$. Nous en déduirons

$$n = \frac{x_n - x_0}{h},$$

et, en substituant cette valeur de n dans la relation fondamentale, il viendra

$$u_n = u_0 + \frac{x_n-x_0}{h}\Delta u_0 + \left(\frac{x_n-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \dots + \left(\frac{x_n-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x_n-x_0}{h}-2\right)\dots\left(\frac{x_n-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2.3\dots}$$

Remplaçons maintenant, dans le second membre de cette égalité, x_n par la variable x. Nous formerons ainsi une fonction $f(x)$, qui aura pour expression

$$\left\{\begin{aligned} f(x) = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \dots \\ + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2.3\dots n}. \end{aligned}\right.$$

C'est la *formule d'interpolation de* NEWTON.

Il est facile de montrer que cette fonction $f(x)$ répond aux conditions imposées et peut représenter la fonction cherchée u.

En effet, substituons à la variable x, dans l'équation (1), la valeur intermédiaire $x_0 + ph\,[p < n]$. Il viendra, puisque $x = x_0 + ph$ donne $\frac{x-x_0}{h} = p$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x_0+ph) = u_0 + p\,\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \dots \\ + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-p+1)}{1.2.3\dots p}\Delta^p u_0. \end{aligned}\right.$$

Tous les autres termes du second membre *disparaissent,* à partir du terme de rang $p+2$, comme contenant le facteur $p-p$ ou zéro parmi les facteurs de leur numérateur. Le second membre de l'équation (2) est d'ailleurs l'expression même de u_p.

Par suite, $f(x)$ qui, d'après l'équation (1), se réduit à u_0 pour $x = x_0$ [ou pour $p = 0$] et à u_n pour $x = x_n$ [ou pour $p = n$], devient $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$, pour $p = 1, 2, 3, \dots, n-1$. On voit de plus que $f(x)$ est un polynôme en x de degré n (puisque son dernier terme renferme n facteurs du premier degré en x), dont la différence d'ordre n est constante (1496). Le problème est, par conséquent, résolu dans les conditions indiquées comme nécessaires.

D'ailleurs, la fonction $f(x)$ est le seul polynôme en x qui puisse, dans ces conditions, répondre à la question ; car, supposons qu'il en existe un second, $\varphi(x)$. Puisque les différences d'ordre $n+1$ doivent être nulles, le degré de $\varphi(x)$ ne peut dépasser n. En outre, $\varphi(x)$ prend, par hypothèse, les mêmes valeurs que $f(x)$ pour les $n+1$ valeurs données de

la variable. Il en résulte que l'équation $\varphi(x) - f(x) = 0$, au plus de degré n, admet $n+1$ racines et se réduit à une identité (1067). On a donc $\varphi(x) = f(x)$.

1515. L'avantage de la formule de Newton, dans le cas où elle n'est qu'approchée, c'est que cette formule renferme les différences successives qu'on déduit des valeurs données de la fonction cherchée. Ces différences diminuant, en général, très rapidement, on peut alors, dans la pratique, ne conserver que les premiers termes du second membre, en négligeant tous ceux qui n'influent pas sur le degré d'approximation adopté.

1516. Pour simplifier l'écriture, on pose souvent

$$\frac{x - x_0}{h} = z,$$

et la formule de Newton devient

$$u = f(x) = u_0 + z\,\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)}{1.2.3\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Supposons Δ^2 très petit. Si l'on ne tient compte alors que de la différence première (supposée constante), on a

$$u = u_0 + z\,\Delta u_0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{u - u_0}{\Delta u_0} = z = \frac{x - x_0}{h}.$$

L'accroissement de la fonction est *supposé* dans ce cas proportionnel à l'accroissement de la variable. C'est ainsi qu'on opère, comme nous l'avons déjà rappelé, lorsqu'on cherche les logarithmes des nombres ou des rapports trigonométriques *non inscrits* dans les Tables.

Supposons Δ^3 très petit. Si l'on ne tient compte que des deux premières différences, en regardant Δ^2 comme une constante, il vient

$$u = u_0 + z\,\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0,$$

relation très usuelle; etc.

Quand $h = 1$, z devient $x - x_0$ et représente directement

l'accroissement donné à la variable à partir de la valeur qui sert de point de départ.

1517. C'est dans le petit Traité intitulé : *Methodus differentialis...*, publié en 1711 avec le consentement de Newton, que se trouve l'exposé de sa méthode d'interpolation :

« Newton regarde les termes donnés comme autant d'ordonnées d'une courbe de genre parabolique (1074), et il cherche l'équation d'une courbe de cette espèce qui passerait par tous les points donnés. Ayant cette équation, on a évidemment la loi de toute la courbe, et par conséquent la valeur de toutes les ordonnées intermédiaires, qui sont les termes à interpoler (1). »

Représentation exacte d'une fonction entière par la formule d'interpolation de Newton.

1518. La formule d'interpolation de Newton détermine *exactement* toute fonction *entière* de x, de degré m, dont on connaît $m+1$ valeurs répondant à $m+1$ valeurs de la variable x en progression arithmétique. Il y a alors, en effet, *identité* entre la fonction $f(x)$ fournie par la formule de Newton et la fonction inconnue, comme cela résulte de la remarque présentée à la fin du n° 1514. La fonction entière qu'on veut trouver a donc pour expression

$$f(x) = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \dots$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3\dots m}.$$

On peut alors faire la remarque suivante, *le point de départ u_0 variant à volonté*. Si les quantités u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$ ..., $\Delta^m u_0$, sont devenues toutes positives, et qu'on donne à x une valeur telle que le dernier facteur $\frac{x-x_0}{h}-m+1$ soit nul ou positif, la valeur de $f(x)$ sera positive et ira toujours en croissant à mesure que x augmentera (1490). Par conséquent, $x_0+(m-1)h$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x)=0$.

(1) Lagrange, *Sur les interpolations*. Œuvres complètes, t. VII.

De même, si, pour une certaine valeur de x_0, les quantités u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, sont alternativement positives et négatives, il est clair que, pour toute valeur de x inférieure, $f(x)$ sera toujours positive ou toujours négative et ne pourra plus devenir nulle. Par conséquent, la valeur de x_0 dont il s'agit est, à son tour, une limite inférieure des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Applications.

1519. 1° *Trouver la fonction entière du quatrième degré* $[y = f(x)]$, *qui, pour les cinq valeurs* -2, -1, 0, 1, 2, *de la variable, prend les cinq valeurs* 67, 14, 3, 4, 11.

On a ici $x_0 = -2$, $h = 1$, et l'on peut former le Tableau

x.	y.	Δy.	$\Delta^2 y$.	$\Delta^3 y$.	$\Delta^4 y$.
-2	67	-53	42	-30	24
-1	14	-11	12	-6	...
0	3	1	6		...
1	4	7			...
2	11				...

Il suffit alors de substituer dans la formule de Newton les valeurs

$$y_0 = 67, \quad \Delta y_0 = -53, \quad \Delta^2 y_0 = 42, \quad \Delta^3 y_0 = -30, \quad \Delta^4 y_0 = 24.$$

On obtient ainsi

$$y = f(x) = 67 - 53(x+2) + 21(x+2)(x+1) - 5(x+2)(x+1)x + (x+2)(x+1)x(x-1),$$

c'est-à-dire

$$y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3.$$

L'équation correspondante du quatrième degré n'a aucune racine négative, et il résulte du Tableau précédent [en prenant pour nouveau point de départ $x_0 = 0$, et en remarquant que le facteur

$$\frac{x - x_0}{h} - m + 1$$

de la formule générale devient alors $x - 3$] que 3 est une limite supérieure de ses racines positives (1518).

1520. 2° *Calculer avec sept décimales le logarithme de* $\sin 1^\circ 17' 35'',7$

Prenons la Table de Schrön, décrite précédemment (*Trigon.*). Nous regarderons les logarithmes contenus dans la Table trigonométrique comme les valeurs de la fonction y, et les valeurs des arcs seront celles de x.

La Table nous donnera immédiatement

$$y_0 = \log \sin 1^\circ 17' 30'' = \bar{2},3529910,$$

$$\Delta y_0 = 0,0009328, \qquad \Delta^2 y_0 = -0,0000020, \qquad \Delta^3 y_0 = 0,0000001.$$

On a d'ailleurs

$$z = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5'',7}{10''} = 0,57.$$

On aura, par suite (1516),

$$z\Delta y_0 = 0,0005317, \qquad \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 = 0,0000003,$$

$$\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 = 0,0000000584155.$$

On voit que, si l'on veut seulement sept décimales exactes, on peut négliger ce dernier terme, dont la valeur ne s'élève pas à six unités du neuvième ordre décimal. Il restera donc simplement (1516)

$$y = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 y_0,$$

c'est-à-dire

$$y = \log \sin 1^\circ 17' 35'',7 = \bar{2},3535230.$$

Ce résultat concorde, comme on peut s'en assurer, avec celui fourni par la Table de logarithmes-sinus (où les arcs varient de seconde en seconde), placée au commencement des Tables trigonométriques de Callet.

Aire d'une courbe, formule de Thomas Simpson.

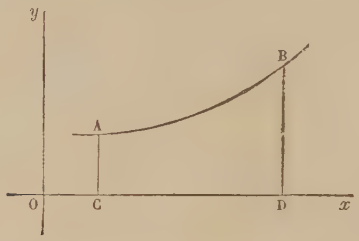
1521. En exposant (981 et suiv.) les premiers principes du Calcul intégral, nous avons vu que l'aire ACDB d'une courbe AB (*fig.* 41), rapportée aux axes rectangulaires Ox et Oy et ayant pour équation $y = f(x)$, n'est autre chose, entre les limites $x = OC$ et $x = OD$, que l'intégrale définie

$$\int_{x=OC}^{x=OD} y\,dx.$$

Pour arriver à l'évaluer ou à effectuer la *quadrature* correspondante (984), on peut avoir recours à la formule d'interpolation de Newton.

En remplaçant la courbe AB par une parabole du $n^{\text{ième}}$ degré ayant n points communs avec elle, on substituera à $f(x)$ un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré (1517, 1074), pour laquelle l'intégration deviendra facile.

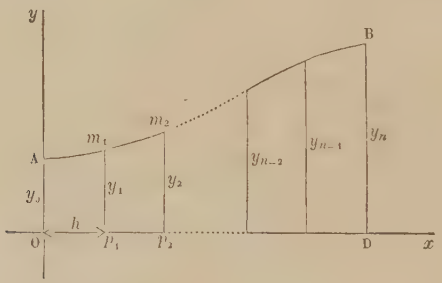
Fig. 41.



On peut aussi, comme nous allons l'expliquer, employer une suite de paraboles du second degré, en les substituant aux parties correspondantes de la courbe donnée ou de l'aire cherchée.

Faisons passer l'axe Oy par la première ordonnée de la courbe AB, dont l'aire sera alors AODB (*fig.* 42). Partageons la base $OD = x$ en un

Fig. 42.



nombre *pair* de parties égales, et désignons par h l'une des divisions $\frac{x}{n}$. Considérons maintenant les trois points A, m_1, m_2, qui, sur la courbe, correspondent aux trois premiers points de division O, p_1, p_2, de la base OD. Par ces trois points A, m_1, m_2, qui ont des ordonnées équidistantes, on peut toujours faire passer une parabole du second degré ayant son axe parallèle à Oy (1). L'équation de cette parabole sera de la forme (2)

$$y = a + bx + cx^2,$$

(1) *Voir* t. V. — *Voir* aussi TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, n° 1178, 5e édition, Gauthier-Villars, 1883.

(2) Lorsqu'une parabole est rapportée à son axe comme axe des x et à

et l'on aura, pour les trois points considérés.

$$(A) \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = a,$$
$$(m_1) \qquad x_1 = h, \qquad y_1 = a + bh + ch^2,$$
$$(m_2) \qquad x_2 = 2h, \qquad y_2 = a + 2bh + 4ch^2.$$

[Il en résulte (1488) $\Delta y_0 = bh + ch^2$ et $\Delta^2 y_0 = 2ch^2$, de sorte que les trois constantes a, b, c, seront connues en fonction de h et des ordonnées des points donnés.]

On a d'ailleurs

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \int_0^{2h} (a + bx + cx^2)\,dx = 2ah + 2bh^2 + \frac{8ch^3}{3}$$
$$= \frac{2h}{3}(3a + 3bh + 4ch^2);$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\int_0^{2h} y\,dx = \frac{h}{3}(a + 4a + 4bh + 4ch^2 + a + 2bh + 4ch^2)$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On peut opérer de même pour les autres parties de la courbe AB, en tenant compte toutefois d'une remarque faite précédemment (*Géom.*, fin du n° 264). Ces autres parties donneront, à leur tour, pour les aires correspondantes, en introduisant chaque fois trois ordonnées consécutives,

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$
$$\frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

ou, en faisant la somme de tous les résultats obtenus,

$$\text{aire AODB} = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})].$$

---

la tangente au sommet comme axe des y, son équation est [*Géom.*, 756] $y^2 = 2px$ ou $x = ky^2$. Par suite, si l'on permute les axes, cette équation devient $y = kx^2$. Si l'on déplace alors ces mêmes axes parallèlement à eux-mêmes, il suffit de remplacer x par $x + \alpha$ et y par $y + \beta$, d'où la forme indiquée.

C'est la *formule de Thomas Simpson* (*Géom.*, 263), qui donne une grande approximation lorsque la valeur choisie pour h est suffisamment petite.

Formule d'interpolation de Lagrange.

1522. *La formule d'interpolation de* LAGRANGE [1] *suppose que les valeurs données à la variable x sont quelconques.*

Cette formule est donc plus générale que celle de NEWTON, mais elle est moins commode à appliquer.

Il s'agit toujours (1513) de trouver, exactement ou approximativement, les valeurs d'une fonction u (que nous supposerons d'abord entière par rapport à x et de degré n) ou cette fonction elle-même, lorsqu'on connaît les $n+1$ valeurs u_0, u_1, u_2, ..., u_n, qu'elle prend, pour $n+1$ valeurs *quelconques* x_0, x_1, x_2, ..., x_n, données à la variable x.

Posons, pour la fonction cherchée,

$$(1) \qquad u = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n.$$

Cette relation doit être satisfaite par les $n+1$ couples de valeurs (x_0, u_0), (x_1, u_1), (x_2, u_2), ..., (x_n, u_n). On a donc

$$\begin{aligned}
u_0 &= A_0 x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + A_2 x_0^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x_0 + A_n, \\
u_1 &= A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} + A_2 x_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x_1 + A_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_n &= A_0 x_n^n + A_1 x_n^{n-1} + A_2 x_n^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x_n + A_n.
\end{aligned}$$

Ces $n+1$ équations de condition sont du premier degré par rapport aux $n+1$ coefficients inconnus A_0, A_1, A_2, ..., A_n. On n'aura donc qu'à en tirer ces coefficients et à substituer les résultats obtenus dans la valeur générale de la fonction u, pour que la question soit résolue. Mais la marche suivante, indiquée par LAGRANGE, est beaucoup plus rapide. D'après les formules générales relatives aux équations du premier degré (382), les coefficients inconnus contiennent les quantités u_0, u_1, u_2, ..., u_n au premier degré. On peut donc écrire, en groupant les termes qui renferment ces quantités,

$$(2) \qquad u = \mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n,$$

---

(1) *Leçons de Mathématiques données à l'École Normale en* 1795. Leçon cinquième.

$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des fonctions de x et de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui doivent, d'après le problème énoncé, satisfaire aux conditions ci-après.

Pour $x = x_0$, il faut qu'on ait $u = u_0$: ce qui exige que μ_0 se réduise à l'unité, et que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ deviennent nulles (puisque les quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ n'ont entre elles aucune relation obligée);

Pour $x = x_1$, il faut qu'on ait $u = u_1$: ce qui exige que μ_1 se réduise à l'unité, et que $\mu_0, \mu_2, \ldots, \mu_n$ deviennent nulles;

.....;

Pour $x = x_n$, il faut qu'on ait $u = u_n$: ce qui exige que μ_n se réduise à l'unité, et que $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ deviennent nulles.

D'après cela, prenons la fonction μ_0. Elle doit être nulle pour $x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, et son degré ne peut pas dépasser n. On peut donc poser

$$\mu_0 = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

De plus, μ_0 devant se réduire à l'unité pour $x = x_0$, on en déduit

$$k = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Par suite,

$$\mu_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

On trouvera, de la même manière,

$$\mu_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

.....,

$$\mu_n = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression (2) de u, on a la *formule d'interpolation de* LAGRANGE, qui est

$$\begin{aligned} u = {} & u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} \\ & + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Comme on l'a déjà fait remarquer (1514), toute autre fonction du $n^{ième}$ degré remplissant les mêmes conditions se confond avec celle qu'on vient d'obtenir.

Il est donc évident que, si les valeurs de x sont en progression arithmétique, la formule de Lagrange reproduit identiquement celle de Newton. On peut le vérifier facilement, en appliquant l'algorithme de Lagrange à la question du n° 1519.

1523. La démonstration précédente prouve d'elle-même que le problème de l'interpolation est complètement indéterminé. Car, si l'on n'exigeait pas que la fonction inconnue fût entière, on pourrait soumettre les différences $x-x_0, x-x_1, x-x_2, \ldots, x-x_n$ *à tels signes convenablement choisis qu'on voudrait.*

On pourrait poser, par exemple,

$$\mu_0 = \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\ldots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\ldots\sin(x_0-x_n)}, \qquad \ldots,$$

sans cesser de remplir les conditions du problème, mais en obtenant une fonction bien différente de celle qu'on vient de trouver.

CHAPITRE III.

NOTIONS SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Observations préliminaires.

1524. Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques (1439) sont transcendantes. Lorsque le premier membre d'une équation (le second étant supposé égal à zéro) renferme des fonctions transcendantes, l'équation est elle-même *transcendante*.

Nous ne considérerons que des équations transcendantes à une seule variable ou à une seule inconnue. Le premier membre de l'équation renfermera alors, p. e., une fonction exponentielle ou logarithmique, une fonction circulaire directe ou inverse, une fonction hyperbolique, ou plusieurs de ces mêmes fonctions rapportées à l'inconnue.

1525. Lorsque l'équation donnée ne renferme que des lignes trigonométriques, on peut, dans certains cas, la résoudre comme une équation algébrique (sauf la discussion des valeurs obtenues).

Par exemple, si le premier membre de l'équation peut être exprimé rationnellement en fonction du sinus et du cosinus de l'arc inconnu x, on remplacera $\cos x$ et $\sin x$ par les valeurs (1330)

$$\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{2\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}},$$

et l'équation deviendra algébrique par rapport à $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ prise pour inconnue.

De même, si l'équation est homogène et de degré m relativement à $\sin x$ et à $\cos x$, on la transformera en une équation algébrique où l'inconnue sera $\operatorname{tang} x$, en divisant les deux membres de l'équation par $\cos^m x$.

Habituellement, quand l'équation transcendante renferme plusieurs rapports trigonométriques d'un même arc inconnu, on exprime ces rapports en fonction d'un seul d'entre eux.

1526. Si l'on a des Tables numériques pour la fonction transcendante T qui entre dans l'équation proposée, il est clair qu'on résoudra simplement cette équation à l'aide des Tables, toutes les fois qu'on pourra la ramener à la forme

$$T = \text{const.}$$

Nous en avons déjà donné des exemples (*Alg. élém.*, 417. 418).

1527. Il est d'ailleurs impossible d'exposer, pour les équations transcendantes, une méthode de résolution uniforme et certaine. Il n'y a plus de types réguliers comme dans les équations algébriques, plus de degré qui puisse guider. Le théorème de Descartes n'est plus applicable. Chaque équation transcendante exige, pour ainsi dire, un examen spécial, lorsqu'on veut reconnaître si elle a un nombre fini de racines réelles ou si elle en admet une infinité.

Lorsque la nature de la question montre qu'une seule solution, renfermée entre certaines limites, est admissible, on peut, au surplus, ne s'occuper que de la détermination de la racine correspondante.

1528. Tous les procédés indiqués précédemment pour résoudre les équations algébriques (dans le cas des racines incommensurables) reposent directement sur la *continuité* de la fonction et de ses dérivées successives, jusqu'à un certain ordre. Ces procédés peuvent donc être mis en œuvre, sauf les modifications nécessaires, lorsque la fonction transcendante qui constitue le premier membre de l'équation donnée peut être regardée elle-même comme continue, ainsi que ses dérivées, *au moins dans un certain intervalle.*

Nous énoncerons, par conséquent, les propositions ou les remarques suivantes :

1° *Lorsque deux nombres substitués à la place de l'inconnue donneront, dans l'intervalle où le premier membre de l'équation considérée varie d'une manière continue, des résultats de signes contraires, il existera entre ces nombres une ou plusieurs racines de l'équation proposée; lorsqu'il n'y aura aucune racine de l'équation entre les deux nombres substitués, les résultats obtenus seront de même signe.*

2° *Le théorème de Rolle subsiste pour les équations transcendantes, et l'étude de leur équation dérivée peut aider à la séparation de leurs racines réelles.*

3° *Une fois les racines réelles séparées, on peut en approcher davantage par de nouvelles substitutions.*

4° *La méthode de Newton et de Fourier est applicable aux équations transcendantes, de sorte qu'on pourra y avoir recours dès que les racines qu'on doit calculer seront obtenues avec un certain degré d'approximation.*

5° *L'emploi de courbes représentatives déjà connues ou faciles à construire ne devra pas être négligé, et conduira, dans certains cas, très rapidement au résultat cherché, avec une première approximation.*

Application de la théorie des différences à la résolution des équations transcendantes.

1529. On opère alors absolument comme pour les équations algébriques, et il n'y a de changement que dans le détail des calculs.

On substitue dans l'équation proposée, à la place de l'inconnue x, des nombres *équidistants*. Lorsque deux substitutions consécutives donnent des résultats de signes contraires, on en conclut (1528) qu'elles comprennent une racine de l'équation. On substitue alors, dans l'intervalle de ces deux substitutions, des nombres équidistants plus resserrés, de manière à renfermer la racine entre deux limites plus étroites. On forme alors, comme précédemment (1489) et pour l'intervalle considéré, le Tableau des différences successives du premier membre de l'équation.

Si l'on reconnaît que les différences d'un certain ordre sont

négligeables, on peut assimiler, sans erreur sensible, dans l'intervalle qu'on étudie, le premier membre de l'équation à une fonction algébrique d'un degré moindre d'une unité, et toute difficulté disparaît.

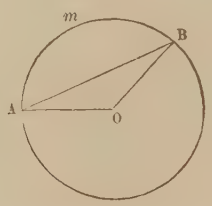
Par exemple, si les différences troisièmes sont très petites, on a à former et à traiter une équation du second degré; si ce sont les différences secondes, l'équation donnée est ramenée à une équation du premier degré.

Quelques exemples vont nous permettre de préciser la marche à suivre.

Problèmes et exemples.

1530. 1° *Par un point* A *pris sur une circonférence de cercle* (*fig.* 43), *mener une corde* AB *qui détermine un segment* A*m*B *équivalent au quart de l'aire de cercle.*

Fig. 43.



Tout revient à trouver l'angle AOB et, par conséquent, on peut supposer le rayon de la circonférence donnée égal à l'unité.

Soit z l'arc A*m*B. On doit avoir (*Géométrie*).

$$\text{segm. A}m\text{B} = \frac{1}{2}(z - \sin z) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ou} \qquad z - \frac{\pi}{2} = \sin z.$$

Posons, pour simplifier,

$$z - \frac{\pi}{2} = x.$$

Nous aurons à la fois (*Trigon.*, 32)

$$x = \sin z \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\pi}{2} + x \qquad \text{ou} \qquad \sin z = \cos x.$$

L'équation du problème est donc

$$(1) \qquad x = \cos x \qquad \text{ou} \qquad x - \cos x = 0,$$

et la question est ramenée à *trouver* (dans la circonférence de rayon 1) *l'arc dont la longueur est égale à celle de son cosinus*.

La dérivée du premier membre de l'équation est la quantité toujours positive

$$1 + \sin x,$$

de sorte que la fonction $x - \cos x$ croît constamment. Lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la fonction croît de -1 à $\frac{\pi}{2}$ en traversant zéro. L'équation proposée a donc une racine réelle et une seule, comprise entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

En examinant la Table placée à la fin de ce Volume, qui donne, de degré en degré, les arcs et les lignes trigonométriques naturelles exprimées en parties décimales du rayon pris pour unité, on s'assure immédiatement que l'arc cherché est nécessairement compris entre 42° et 43°. On a, en effet,

$$\text{arc } 42^\circ = 0{,}73304, \qquad \cos 42^\circ = 0{,}74314,$$
$$\text{arc } 43^\circ = 0{,}75049, \qquad \cos 43^\circ = 0{,}73135.$$

C'est donc bien dans l'intervalle de 42° à 43° que la fonction $x - \cos x$ change de signe (en passant du négatif au positif), en traversant zéro.

Nous allons, par conséquent, en posant

$$u = x - \cos x,$$

chercher les valeurs de u pour les arcs 41°, 42°, 43°, 44°, en nous servant de la même Table. Nous pourrons ainsi former le Tableau suivant

x.	u.	Δ.	Δ^2.
41°	− 0,03913	0,02903	0,00021
42°	− 0,01010	0,02924	0,00022
43°	+ 0,01914	0,02946	
44°	0,04860		

En regardant la différence seconde comme constante, on assimilera la fonction considérée à une fonction algébrique du second degré, c'est-à-dire qu'on posera (1516)

$$u = u_0 + z\,\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\,\Delta^2 u_0 = 0.$$

On a ici $h = 1°$, c'est-à-dire $z = x - x_0$ (en degrés), x_0 correspondant à 42°. En prenant $x - x_0$ pour inconnue, on aura à résoudre l'équation du second degré

$$0,00011(x - x_0)(x - x_0 - 1) + 0,02924(x - x_0) - 0,01010 = 0$$

ou, en multipliant les deux membres par 10^5,

$$11(x - x_0)^2 + 2913(x - x_0) - 1010 = 0.$$

On a, par suite, en ne prenant que la racine positive,

$$x - x_0 = \frac{-2913 + \sqrt{2913^2 + 44440}}{22} = 0,3463 = 20'46'',68,$$

c'est-à-dire

$$x = 42°20'46'',68.$$

Euler trouve, par la règle de *fausse position* (*Arithmétique*) et en calculant *à sept décimales*,

$$x = 42°20'47'',23.$$

Notre solution comporte donc une erreur *par défaut* de $0'',55$ ou d'une demi-seconde environ.

En revenant au problème direct, on a, pour l'arc cherché,

$$z = \frac{\pi}{2} + x = 132°20'46'',68,$$

et la corde qui sous-tendra ce dernier arc sous-tendra (sauf l'erreur indiquée) un segment équivalent au quart du cercle. Si l'on mène un diamètre parallèle à cette corde, elle divisera donc en deux parties équivalentes le demi-cercle correspondant.

Une construction graphique pourrait intervenir ici efficacement pour fournir une première approximation. L'équation

$$x - \cos x = 0$$

étant le résultat de l'élimination de y entre les deux équations

$$y = x \qquad \text{et} \qquad y = \cos x,$$

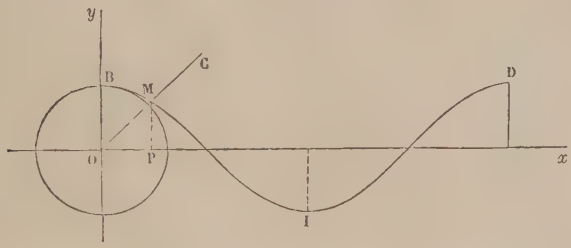
il suffira (*fig.* 79) de construire la droite $y = x$, qui est la bissectrice de l'angle yOx, et la *cosinusoïde* $y = \cos x$ (*Trigon.*, 21). Il est clair que la droite OC et la courbe BID ont un point commun et un seul; ce qui prouve l'existence d'une seule racine réelle. En mesurant ensuite avec beaucoup de soin, à l'échelle adoptée, l'abscisse OP du point d'intersection M obtenu, on aura la valeur de la racine avec une première approximation de 0,01 environ.

L'arc auxiliaire étant égal, d'après notre solution, à 0,73907 (1) et,

(1) *Voir* la Table I, à la fin du t. II de ce Cours.

plus exactement, d'après celle d'Euler, à 0,7390847, la construction graphique pourra donner 0,74.

Fig. 44.

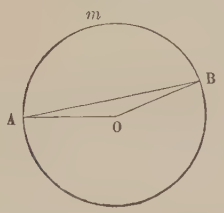


1531. 2° *Diviser par une corde un cercle en moyenne et extrême raison.*

Le plus grand des deux segments déterminés par la corde inconnue doit être moyenne proportionnelle entre le cercle entier et le plus petit segment. Nous allons chercher l'arc qui correspond à ce plus petit segment, en supposant (ce qui ne modifie pas le résultat demandé) que le rayon du cercle donné est égal à l'unité.

Lorsqu'on divise une quantité quelconque en moyenne et extrême raison, la plus petite partie de cette quantité en est une fraction marquée par $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (*Géométrie*). On doit donc avoir (*fig.* 45), si AB est la corde inconnue,

Fig. 45.



$$\text{segm A}m\text{B} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\pi.$$

Soit x l'arc qui répond à l'angle AOB. On aura également (*Géométrie*)

$$\text{segm A}m\text{B} = \frac{1}{2}(x - \sin x).$$

L'équation du problème est donc

$$x - \sin x = (3 - \sqrt{5})\,\pi$$

ou, en remplaçant $\sqrt{5}$ et π par leurs valeurs en décimales,

$$x - \sin x - 2{,}3999632 = 0. \qquad (1)$$

Le premier membre a pour dérivée la quantité toujours positive $1 - \cos x$; il est donc constamment croissant. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, il se réduit à $-1{,}8296669$ et, pour $x = \pi$, à $+0{,}7416294$. L'équation (1) admet, par suite, une seule racine réelle comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π ou entre 90° et 180°, mais beaucoup plus près de cette dernière valeur.

Nous sommes alors conduit à faire varier d'abord x, de 10° en 10°, *en remontant*. En se servant toujours de la Table placée à la fin de ce Volume et en représentant par u le premier membre de l'équation (1), on trouve les valeurs suivantes

$$x = 170°, \quad u = 0{,}39345,$$
$$x = 160°, \quad u = 0{,}05055,$$
$$x = 150°, \quad u = -0{,}28197.$$

La racine cherchée tombe, par conséquent, entre 160° et 150°, mais beaucoup plus près de 160°. Nous ferons alors varier x, de degré en degré, toujours en remontant. Nous aurons

$$x = 159°, \quad u = 0{,}01675,$$
$$x = 158°, \quad u = -0{,}01695.$$

La racine cherchée tombe finalement entre 158° et 159°, à peu près à égale distance de ces deux limites. Pour en approcher davantage, nous formerons le Tableau suivant, en faisant varier x de 15′ en 15′, et en effectuant les calculs avec sept décimales à l'aide des grandes Tables. Nous serons seulement forcé de remonter aux nombres pour les logarithmes sinus.

x.	u.	Δ.	Δ^2.
158°	−0,0169483	0,0084126	0,0000071
158°15′	−0,0085357	0,0084197	0,0000069
158°30′	−0,0001160	0,0084266	0,0000070
158°45′	+0,0083106	0,0084336	
159°	0,0167442		

On peut évidemment regarder Δ^2 comme une constante, et remplacer l'équation (1) par cette équation du second degré (1516)

$$(2) \qquad u_0 + z\,\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 = 0,$$

où l'on a

$$z = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - x_0}{15'},$$

le point de départ étant $x_0 = 158°30'$, d'après le Tableau ci-dessus. L'équation (2) est donc

$$0,0000035\,z(z-1) + 0,00842666\,z - 0,0001160 = 0.$$

En multipliant ses deux membres par 10^7, elle devient

$$35z^2 + 84231z - 1160 = 0,$$

et l'on en déduit (en ne conservant que la racine positive)

$$z = \frac{-84231 + \sqrt{84231^2 + 162400}}{70} = 0,01377.$$

Il en résulte

$$x - x_0 = 0,01377 \times 15' = 12'',393.$$

La racine cherchée est, par suite,

$$x = 158°30'12'',393;$$

et il est facile de s'assurer que, si l'on ne dépasse pas les millionièmes, elle transforme l'équation (1) en une identité.

On pourrait avoir recours à une construction graphique, comme dans le problème précédent.

1532. 3° *Déterminer les racines réelles de l'équation*

$$(1) \qquad x^x = 100 \qquad ou \qquad x^x - 100 = 0,$$

considérée par EULER (1).

Il sera plus commode, en prenant les logarithmes des deux membres, de la mettre sous la forme

$$x \log x = \log 100 = 2$$

ou

$$(1\ bis) \qquad f(x) = x \log x - 2 = 0.$$

Nous devrons supposer dans cette équation x *positif* (907). Les

(1) *Instit. Calc. diff.* (Principes de Calcul différentiel), t. II.

deux premières dérivées de son premier membre sont (808)

$$f'(x) = \log x + \frac{x \log e}{x} = \log x + \log e, \qquad f''(x) = \frac{\log e}{x}.$$

x variant de o à $+\infty$, la seconde dérivée est toujours positive, et la première dérivée varie de $-\infty$ à $+\infty$, en étant constamment croissante. Elle ne traverse donc qu'une fois la valeur zéro, de sorte que l'équation dérivée

$$\log x + \log e = 0$$

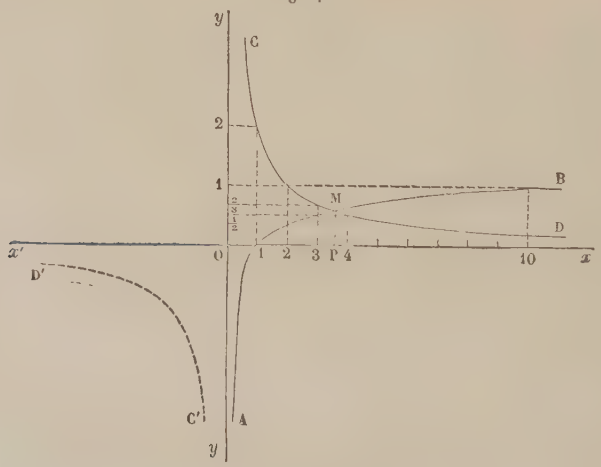
n'a qu'une seule racine réelle répondant à $\log x = -\log e$ et qui est, par conséquent,

$$x = \frac{1}{e}.$$

Jusqu'à cette racine, la première dérivée $f'(x)$ demeure négative, et le premier membre de l'équation (1 *bis*), allant toujours en diminuant (933) et commençant par être négatif [puisqu'on a $x \log x = 0$ pour $x = 0$], reste lui-même négatif. Ce n'est donc qu'au dela de la valeur $x = \frac{1}{e}$ que, $f'(x)$ devenant positive et le premier membre de l'équation (1 *bis*) croissant alors indéfiniment, ce premier membre peut lui-même devenir positif. Ainsi l'équation (1 *bis*) ne peut avoir également qu'une seule racine réelle, qui sera plus grande que $\frac{1}{e}$.

Une construction graphique très simple conduit au même résultat *fig.* (46).

Fig. 46



On peut mettre l'équation (1 *bis*) sous la forme

$$\log x = \frac{2}{x},$$

et la regarder comme provenant de l'élimination de y entre les deux équations

$$y = \log x \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2}{x}.$$

La première équation représente une *logarithmique* (AMB') facile à construire (509). La seconde, qui revient à $xy = 2$, représente une *hyperbole équilatère* (CMD, C'D') ayant les axes coordonnés pour asymptotes (*Alg. élém.*, 318; *Géom.*, 727). En prenant, pour plus de commodité, une échelle moitié moindre pour les abscisses, on voit facilement que les deux courbes ne peuvent avoir qu'un seul point M commun (ce qui démontre l'existence d'une seule racine réelle), et l'on s'assure sans peine sur l'épure que l'abscisse de ce point d'intersection est comprise entre 3 et 4. La racine cherchée est donc comprise elle-même entre 3 et 4.

L'équation (1) conduit au même résultat; car, si l'on pose

$$u = x^x - 100,$$

on a immédiatement les valeurs correspondantes

$$x = 3, \qquad u = -73; \qquad x = 4, \qquad u = +156.$$

Proposons-nous d'obtenir à 0,000001 près la racine que nous venons de séparer. Revenons à l'équation (1 *bis*)

$$f(x) = x \log x - 2 = 0,$$

et essayons d'abord les deux substitutions 3,5 et 3,6. Nous aurons

$$x = 3,5, \qquad \log x = 0,54406804, \qquad f(x) = -0,09576186,$$
$$x = 3,6, \qquad \log x = 0,55630250, \qquad f(x) = +0,00268900.$$

La racine cherchée tombe donc entre 3,5 et 3,6, mais beaucoup plus près de 3,6.

Essayons donc 3,59 *en remontant*. Nous aurons

$$x = 3,59, \qquad \log x = 0,55509445, \qquad f(x) = -0,00721092.$$

La racine cherchée tombe donc entre 3,59 et 3,60, plus près de cette dernière valeur.

Appliquons maintenant, pour arriver rapidement à l'approximation demandée, la méthode de Newton et de Fourier.

$f(x)$ et $f''(x)$ devant être de même signe (1391), nous devrons partir de la valeur par excès et prendre pour nouvelle valeur approchée

$$3,60 - \frac{f(3,60)}{f'(3,60)} = 3,60 - 0,00271452.$$

Cette nouvelle valeur approchée (toujours par excès) est donc

$$3,59728548.$$

La méthode des parties proportionnelles donne en même temps la valeur par défaut

$$3,60 - 0,01\frac{f(3,60)}{f(3,59)+f(3,60)} = 3,60 - 0,00271618,$$

c'est-à-dire

$$3,59728382.$$

La moyenne arithmétique des deux résultats étant 3,59728465, et leur demi-différence 0,00000083, la valeur de la racine de l'équation donnée est à un millionième près, par excès ou par défaut,

$$x = 3,597285.$$

[Comme on a $f(3,597285) = -0,04936381$, l'approximation indiquée a lieu par défaut]. EULER trouve $x = 3,5972852$.

1533. *Trouver tous les arcs qui sont égaux à leur tangente* (¹).

L'équation à résoudre est

$$x = \operatorname{tang} x \qquad \text{ou} \qquad x - \operatorname{tang} x = 0. \tag{1}$$

Cette équation se présente en Physique mathématique; elle peut aussi provenir de problèmes de Géométrie.

Une étude sommaire de l'équation peut être faite à l'aide d'une construction graphique très simple. L'équation (1) résulte de l'élimination de y entre les deux équations

$$y = x \qquad \text{et} \qquad y = \operatorname{tang} x.$$

La première représente (*fig.* 47) la droite OB, bissectrice de l'angle des axes coordonnés; la seconde représente une *tangentoïde*.

Nous avons vu (*Trigon.*, 28) que cette courbe est composée d'une série illimitée de branches infinies, à droite et à gauche de l'origine. Ces branches infinies ..., $C'_1D'_1$, CD, C_1D_1, ..., se succèdent en ayant pour asymptotes communes, dans un sens ou dans l'autre, les parallèles à Oy, menées par les points ..., H'_1, H', H, H_1, ..., de l'axe Ox qui ont pour abscisses ..., $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... Les points ..., O'_1, O, O_1, ..., où les différentes branches coupent l'axe Ox, sont à la fois des *points d'inflexion* et des *centres*.

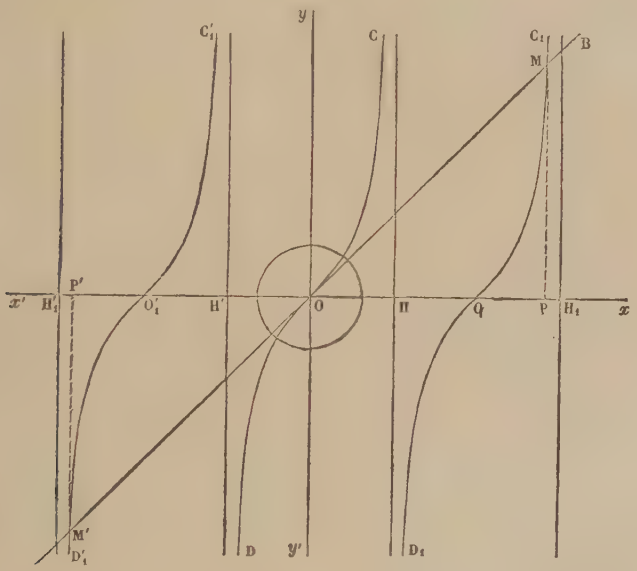
Les points d'intersection de la droite OB avec la tangentoïde correspondent aux racines de l'équation (1), représentées par les abscisses de ces points d'intersection. Or la droite coupe évidemment toutes les branches de la courbe.

Par conséquent, *l'équation proposée a une infinité de racines réelles*.

(¹) EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Livre II.

[Sur la figure, les points d'intersection ..., M', O, M, .., correspondent aux racines ..., — OP', zéro, OP, ...] De plus, les points d'intersection, tels que M' et M, sont *symétriques* par rapport à l'origine O, de sorte que *les racines sont deux à deux égales et de signes contraires* (comme le montre d'ailleurs l'équation donnée elle-même, qui ne change pas lorsqu'on remplace x par $-x$). ***On peut donc se borner à la recherche des racines positives.***

Fig. 47.



Considérons maintenant directement l'équation (1).

Lorsque x est positif, il faut que $\operatorname{tang} x$ le soit aussi, pour que l'équation puisse être satisfaite. Les arcs x *qui sont racines* ne peuvent, d'après cela, avoir leurs extrémités que dans les quadrants *de rang impair* (1, 3, 5, 7, ..., $2n+1$), puisque la tangente n'est positive que dans ces quadrants (*Trigon.*, 26), et leurs valeurs sont comprises, d'une manière générale, entre $n\pi$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, n étant un entier positif quelconque.

Les arcs dont les extrémités se succèdent dans un quadrant de rang impair variant de $n\pi$ à $n\pi+\frac{\pi}{2}$, tandis que leurs tangentes varient de 0 à $+\infty$, il y a un instant et un seul où, dans chaque quadrant de rang impair, l'arc est égal à sa tangente. Ce qui prouve de nouveau que l'équation (1) admet une infinité de racines réelles positives et, par suite, de racines réelles négatives.

La première racine positive, qui correspond au premier quadrant, est $x = 0$.

A mesure que le rang du quadrant considéré s'accroît, l'extrémité de l'arc racine qui appartient à ce quadrant s'éloigne aussi de son origine. On peut le montrer comme il suit.

La $n^{\text{ième}}$ racine positive correspond au $n^{\text{ième}}$ quadrant de rang impair ou au $(2n-1)^{\text{ième}}$ quadrant, et elle est égale à $n\pi + \alpha$, l'arc α étant toujours compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La $(n+p)^{\text{ième}}$ racine positive est de même égale à $(n+p)\pi + \beta$, l'arc β étant toujours compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Or on a à la fois, puisqu'il s'agit de racines de l'équation (1) et d'après la période de la tangente (*Trigon.*, 23),

$$\operatorname{tang}(n\pi + \alpha) = n\pi + \alpha = \operatorname{tang}\alpha,$$
$$\operatorname{tang}[(n+p)\pi + \beta] = (n+p)\pi + \beta = \operatorname{tang}\beta.$$

Il est clair que $(n+p)\pi + \beta$ surpasse $n\pi + \alpha$, puisque α et β sont tous deux inférieurs à $\frac{\pi}{2}$ et que p est au moins égal à 1. On a donc toujours (*Trigon.*, 22)

$$\operatorname{tang}\beta > \operatorname{tang}\alpha \quad \text{ou} \quad \beta > \alpha.$$

Enfin, *la fonction* $x - \operatorname{tang} x$ *commence toujours par être positive, relativement à chaque quadrant de rang impair,* puisque l'on a

$$\operatorname{tang} x = 0$$

pour l'origine de ce quadrant. Quand la racine qui lui correspond est dépassée, le premier membre, $x - \operatorname{tang} x$, de l'équation (1) change de signe et sa valeur devient négative. Par conséquent, *lorsque la racine est approchée par excès, la tangente surpasse l'arc; lorsque la racine est approchée par défaut, l'arc surpasse la tangente.*

Après ces indications générales, proposons-nous de calculer la seconde racine positive, celle dont l'extrémité tombe dans le troisième quadrant, et posons

$$f(x) = x - \operatorname{tang} x = 0. \tag{1}$$

La Table abrégée, placée à la fin de ce Volume, montre qu'on a en même temps

$$\operatorname{arc} 257^\circ = \operatorname{arc} 77^\circ + \operatorname{arc} 180^\circ = 4,48549,$$
$$\operatorname{tang} 257^\circ = \operatorname{tang} 77^\circ = 4,33148,$$
$$\operatorname{arc} 258^\circ = \operatorname{arc} 78^\circ + \operatorname{arc} 180^\circ = 4,50295,$$
$$\operatorname{tang} 258^\circ = \operatorname{tang} 78^\circ = 4,70463.$$

On a donc $\operatorname{arc} 257^\circ > \operatorname{tang} 257^\circ$, $\operatorname{arc} 258^\circ < \operatorname{tang} 258^\circ$, et la racine cherchée tombe entre 257° et 258°.

Pour resserrer ses limites, nous allons faire croître x à partir de 257°, de 10′ en 10′. [Pour calculer les arcs en parties du rayon, on peut se

servir de la Table I placée à la fin du Tome II; et, pour avoir les tangentes naturelles correspondantes, de la Table II placée à la suite, en diminuant les arcs de 180° ou en partant de 77°.]

On trouve ainsi

$$x = 257^\circ = 4,48549, \quad \operatorname{tang} 257^\circ = 4,33148, \quad f(x) = 0,15401,$$
$$x = 257^\circ 10' = 4,48840, \quad \operatorname{tang} 257^\circ 10' = 4,38969, \quad f(x) = 0,09871,$$
$$x = 257^\circ 20' = 4,49131, \quad \operatorname{tang} 257^\circ 20' = 4,44942, \quad f(x) = 0,04189,$$
$$x = 257^\circ 30' = 4,49422, \quad \operatorname{tang} 257^\circ 30' = 4,51071, \quad f(x) = -0,01649.$$

La racine est comprise, par suite, entre 257°20′ et 257°30′, et elle est beaucoup plus voisine de cette dernière limite.

Partons donc de 257°27′, en faisant croître l'arc de minute en minute (1).

$$\left.\begin{aligned} x &= 257^\circ 27' = 4,493350 \\ \operatorname{tang} x &= 4,492153 \end{aligned}\right\} f(x) = 0,001197,$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 257^\circ 28' = 4,493641 \\ \operatorname{tang} x &= 4,498323 \end{aligned}\right\} f(x) = -0,004682.$$

La racine cherchée tombe donc entre 257°27′ et 257°28′, plus près de la première valeur. Pour en approcher davantage, on pourrait continuer de la même manière. On peut aussi employer, comme il suit, la méthode de Newton et de Fourier.

De $f(x) = x - \operatorname{tang} x$, on déduit

$$f'(x) = 1 - (1 + \operatorname{tang}^2 x) = -\operatorname{tang}^2 x,$$
$$f''(x) = -2 \operatorname{tang} x (1 + \operatorname{tang}^2 x).$$

Il faut que $f(x)$ et $f''(x)$ soient de même signe (1391). Comme $f''(x)$ reste négative, il faut partir de la valeur par excès

$$x = 257^\circ 28' = 4,493641,$$

pour laquelle, d'après une remarque précédente, l'arc est plus petit que la tangente. On aura donc, pour le terme de correction (1391), en se reportant aux résultats précédents,

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x - \operatorname{tang} x}{-\operatorname{tang}^2 x} = -\frac{\operatorname{tang} x - x}{\operatorname{tang}^2 x}$$
$$= -\frac{0,004682}{20,234905} = -0,0002314.$$

(1) Nous devrons ici avoir recours aux Tables de Callet, et nous servir notamment de la Table de réduction qui précède celle des logarithmes des lignes trigonométriques, établie suivant la division centésimale. Cette Table de réduction est intitulée : *Rapports des longueurs des degrés au rayon pris pour unité*. A chaque opération, il faudra, pour la tangente, remonter du logarithme au nombre.

On obtient ainsi, comme nouvelle valeur de l'arc x,

$$4,4936408 - 0,0002314 = 4,4934094.$$

L'intervalle considéré étant l'arc de $1'' = 0,000290888$, si l'on avait appliqué la méthode des parties proportionnelles (1385), on aurait eu comme nouvelle valeur du même arc, d'après les calculs ci-dessus,

$$\begin{aligned} &4,4936408 - 0,000290888\frac{0,004682}{0,001197 + 0,004682} \\ &= 4,4936408 - \frac{0,000001361937616}{0,005879} \\ &= 4,4936408 - 0,0002316 = 4,4934092. \end{aligned}$$

La moyenne arithmétique des nouvelles valeurs trouvées par les deux méthodes est 4,4934093, et leur demi-différence est 0,0000001. On a donc finalement (avec une erreur par défaut qui peut s'élever au plus à 0,0000004)

$$x = 4,493409.$$

Comme la valeur de l'arc d'un dixième de seconde est 0,00000048..., ce résultat est certainement obtenu à 0″,1 près. On a d'ailleurs, d'après la Table de réduction,

$$\begin{aligned} x &= 4,493409 \\ 257°27' &= 4,493350 \\ &\quad 0,000059 \\ 12'' &= 0,000058 \\ &\quad 0,000001 \\ 0'',2 &= 0,000000969 \end{aligned}$$

Ainsi, la seconde racine de l'équation $x - \tang x = 0$ est, à 0″,1 près par défaut,

$$x = 4,493409 = 257°27'12'',2.$$

Nous pourrions calculer de même les autres racines positives de l'équation.

Euler, en résolvant l'équation d'une manière plus générale (nous reviendrons sur la marche indiquée par lui, dans le Chapitre suivant), trouve, pour la seconde racine,

$$270° - (12°32'48'') = 257°27'12''.$$

Des racines imaginaires des équations transcendantes.

1534. De même que les équations algébriques, les équations transcendantes peuvent admettre des racines imagi-

naires. Seulement, ces racines imaginaires peuvent être, comme leurs racines réelles, en nombre illimité. Leur détermination, pour laquelle il ne peut pas exister une méthode générale, est une question très délicate ; et nous n'avons pas d'autre but que d'appeler l'attention sur ce point, à l'aide d'exemples très simples (1).

1535. Dans certains cas, on peut s'assurer qu'une équation transcendante n'a que des racines réelles. Pour le montrer, prenons l'équation

$$\sin z = 0, \tag{1}$$

traitée pour la première fois par EULER.

Remplaçons z par $x + yi$, x et y étant, comme à l'ordinaire, deux variables réelles.

On a alors (913)

$$\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi = 0. \tag{2}$$

Mais

$$\cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin yi = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\, i.$$

Il vient, par suite,

$$\tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) i \cos x = 0. \tag{3}$$

Cette équation se partage dans les deux suivantes (91) :

$$(e^y + e^{-y}) \sin x = 0, \qquad (e^y - e^{-y}) \cos x = 0. \tag{4}$$

Tant que x et y sont des quantités réelles, la première de ces équations ne peut être satisfaite que si l'on a

$$\sin x = 0 \qquad \text{et, par conséquent,} \qquad \cos x = \pm 1;$$

la seconde donne alors

$$e^y - e^{-y} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2y} = 1,$$

c'est-à-dire [y étant une quantité réelle]

$$y = \tfrac{1}{2} l.1 = 0.$$

---

(1) On pourra consulter, en particulier, sur ce sujet : FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur et Analyse des équations;* POISSON, *Théorie mathématique de la chaleur;* CAUCHY, *Anciens Exercices de Mathématiques*, 1826.

Il faut en conclure que y disparaît dans toutes les racines imaginaires de l'équation (1), ou que cette équation n'admet aucune racine imaginaire. [Elle a, au contraire, une infinité de racines réelles, qui correspondent aux points d'intersection de l'axe Ox, représenté par l'équation $y = 0$, avec la sinusoïde représentée par l'équation $y = \sin z = \sin x$, et dont l'expression générale est $x = n\pi$.]

On peut appliquer un raisonnement analogue à l'équation

$$\cos z = 0,$$

qui n'a aussi que des racines réelles.

1536. Considérons encore l'équation

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} z = z,$$

déjà étudiée (1533) [avec une notation différente].

Cette équation ne peut avoir aucune racine imaginaire. Nous allons le vérifier.

Posons $z = x + yi$, x et y étant deux variables réelles. Nous aurons à satisfaire à l'équation

$$\operatorname{tang}(x + yi) = x + yi.$$

[*Trigon.*, 81; *Alg. sup.*, 913]

$$\frac{\sin 2x + \sin 2yi}{\cos 2x + \cos 2yi} = \frac{2\sin(x+yi)\cos(x-yi)}{2\cos(x+yi)\cos(x-yi)} = \operatorname{tang}(x+yi).$$

Par suite,

$$\text{(2)} \qquad x + yi = \frac{\sin 2x + \frac{1}{2i}(e^{-2y} - e^{2y})}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})} = \frac{\sin 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y})i}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}.$$

Cette équation se partage dans les deux suivantes :

$$\text{(3)} \qquad x = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}, \qquad y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}.$$

Les variables x et y étant supposées différentes de zéro et les dénominateurs des deux relations précédentes étant les mêmes, on en déduit évidemment

$$\text{(4)} \qquad \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} = \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Or, tant que la valeur de y n'est pas nulle, cette dernière équation est *impossible*. On a, en effet (904), pour son premier membre,

$$\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}=1+\frac{(2y)^2}{1.2.3}+\frac{(2y)^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

quantité supérieure à l'unité, et, *a fortiori*, au second membre de l'équation.

L'équation (1) ne peut donc admettre de racines imaginaires complexes, et nous allons prouver qu'elle ne peut en avoir de simples.

Si l'on suppose $x=0$, l'équation (2), qui nous a servi de point de départ, devient

$$yi=\frac{\frac{1}{2}(e^{2y}-e^{-2y})\,i}{1+\frac{1}{2}(e^{2y}+e^{-2y})}$$

ou

$$y=\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2+e^{2y}+e^{-2y}}=\frac{(e^{y}+e^{-y})(e^{y}-e^{-y})}{(e^{y}+e^{-y})^2}=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}},$$

relation qu'on peut écrire

$$y\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=0. \tag{5}$$

Mais on a (904)

$$\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=1+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots,$$

$$\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\frac{y}{1}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

c'est-à-dire, en substituant dans l'équation (5) et en réduisant les termes,

$$y^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{1}{7}\frac{y^4}{1.2.3.4.5}+\ldots\right)=0 \tag{6}$$

y étant une quantité réelle, l'équation (6) ne peut être satisfaite que par la solution $y=0$. *L'équation* (1) *n'admet donc finalement aucune espèce de racine imaginaire.*

1537. Dans d'autres cas, on peut distinguer et trouver, suivant les différentes hypothèses, les racines réelles ou les racines imaginaires de l'équation proposée.

Soit l'équation

$$\sin z = a, \tag{1}$$

où a est une quantité réelle. Posons $z = x + yi$, x et y étant deux variables réelles. Nous aurons, comme précédemment,

$$\sin z = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi,$$

$$\cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin yi = \frac{e^y - e^{-y}}{2} i.$$

L'équation (1) devient ainsi

$$\sin z = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) i \cos x = a. \tag{2}$$

Elle se partage immédiatement en deux autres

$$\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x = a, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x = 0. \tag{4}$$

Premier cas. — Supposons la valeur absolue de *a supérieure à l'unité.*

D'après l'équation (3), *la valeur de y ne pourra pas être nulle.* L'équation (4) exige alors qu'on ait $\cos x = 0$ et, par suite, $\sin x = \pm 1$. Introduisons cette dernière condition dans l'équation (3).

Si a est positif, on ne pourra admettre que la valeur $\sin x = +1$ ou $x = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

On a, en effet,

$$\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = 1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

quantité positive plus grande que 1. Pour $\sin x = +1$, l'équation (3) devient d'ailleurs

$$\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = a \qquad \text{ou} \qquad e^{2y} - 2ae^y + 1 = 0.$$

On en déduit

$$e^y = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \qquad \text{ou} \qquad y = l\left(a \pm \sqrt{a^2 - 1}\right).$$

On a donc alors

$$z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi + il(a \pm \sqrt{a^2 - 1}),$$

et l'équation (1) n'admet que des racines imaginaires.

Si a est négatif, il faut prendre seulement $\sin x = -1$, c'est-à-dire $x = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi$, et l'équation (3) devient

$$\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = -a \qquad \text{ou} \qquad e^{2y} + 2ae^y + 1 = 0.$$

On en tire

$$e^y = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \qquad \text{ou} \qquad y = l(-a \pm \sqrt{a^2 - 1}).$$

On a, par conséquent,

$$z = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi + il(-a \pm \sqrt{a^2 - 1}),$$

et l'équation (1) n'admet encore que des racines imaginaires.

Deuxième cas. — Supposons la valeur absolue de *a inférieure à l'unité.*

L'équation (4) peut être alors satisfaite par $y = 0$ *ou* par $\cos x = 0$. Mais cette dernière condition entraîne $\sin x = \pm 1$, de sorte que l'équation (3) devient impossible. La solution $y = 0$ est donc seule admissible. L'équation (1) se réduit à $\sin x = a$ et n'admet que des racines réelles. Ces racines réelles, en nombre illimité, sont comprises dans les deux formules $2n\pi + \text{arc sin}\, a$ et $(2n + 1)\pi - \text{arc sin}\, a$.

Ce dernier résultat est d'accord avec la construction graphique qu'on peut employer pour déterminer les racines de l'équation $\sin x = a$, qui résulte de l'élimination de y entre les deux équations

$$y = a, \qquad y = \sin x.$$

La première représente la parallèle menée à l'axe Ox à la distance a, et la seconde représente la sinusoïde déduite du cercle trigonométrique. Si la valeur absolue de a est, comme on le suppose, inférieure à l'unité, la droite rencontrera la courbe en une infinité de points dont les abscisses mesureront les racines de l'équation $\sin x = a$.

Troisième cas. — Supposons la valeur absolue de *a égale à l'unité.*

L'équation (4) est satisfaite par $y = 0$ *ou* par $\cos x = 0$. Dans la première hypothèse, l'équation (3) se réduit à $\sin x = \pm 1$; ce qui entraîne $\cos x = 0$; dans la seconde hypothèse on a $\sin x = \pm 1$, et l'équation (3) se réduit à $\frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) = 1$, d'où l'on tire facilement $y = 0$. Les deux hypothèses rentrent donc l'une dans l'autre, et ce troisième cas ne diffère du second que par la valeur particulière donnée à a. Cette valeur particulière, introduite dans les formules de résolution du premier cas, permet également de passer de ce premier cas au troisième.

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Principe de la méthode et condition de son emploi.

1538. La méthode la plus simple qu'on puisse appliquer à la résolution des équations numériques, algébriques ou transcendantes, est la *méthode des approximations successives par substitution*. C'est même, dans certains cas, la seule méthode qu'on puisse réellement employer.

D'une manière générale, elle consiste à mettre l'équation proposée sous la forme particulière

$$x = f(x), \tag{A}$$

c'est-à-dire à isoler l'inconnue dans le premier membre, sans se préoccuper de la laisser engagée dans certains termes du second membre. En négligeant alors ces mêmes termes, $f(x)$ prend une certaine valeur φ et l'on obtient pour x une première valeur approché

$$x_1 = \varphi. \tag{1}$$

En substituant cette valeur à la place de x dans le second membre de l'équation (A), on a une seconde valeur

$$x_2 = f(x_1), \tag{2}$$

qui doit être plus approchée de la valeur exacte. En substituant encore cette seconde valeur à la place de x dans le second membre de l'équation (A), on est conduit à une troisième valeur

$$x_3 = f(x_2); \tag{3}$$

puis, en substituant toujours la nouvelle valeur obtenue à la

place de x dans le second membre de l'équation (A), à une quatrième valeur

$$x_4 = f(x_3); \tag{4}$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'approximation soit jugée suffisante.

Les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4, ainsi obtenues, convergent souvent très rapidement vers la valeur exacte de x ou vers la racine de l'équation (A) qu'on veut déterminer.

Les valeurs approchées peuvent former une seule série croissante ou décroissante. Il peut arriver aussi que ces valeurs approchées soient alternativement plus petites et plus grandes que la racine cherchée, ou qu'elles forment deux séries, l'une croissante, l'autre décroissante. Le sens et le degré de l'approximation sont alors parfaitement fixés à chaque période de l'opération (1).

1539. Cherchons la condition qui doit être remplie pour que la méthode soit applicable.

Désignons par x_1 et par x_2 deux valeurs trouvées successivement par ce procédé *dans la même série* (1538), et soit a la racine exacte.

Le module d'une quantité réelle étant cette quantité prise positivement (91), il faut, pour que x_2 approche plus que x_1 de la racine exacte, qu'on ait

$$\operatorname{mod}(x_2 - a) < \operatorname{mod}(x_1 - a).$$

Mais, d'après ce qui précède (1538), on a

$$x_2 = f(x_1), \qquad a = f(a).$$

Il vient, par conséquent,

$$\operatorname{mod}[f(x_1) - f(a)] < \operatorname{mod}(x_1 - a),$$

ou (92,113)

$$\operatorname{mod} \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < 1. \tag{B}$$

---

(1) *Voir* à ce sujet différents problèmes relatifs aux *Intérêts composés* et aux *Annuités* (*Alg. élém.*, 419 et suiv.).

D'autre part, si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré qui renferme x_1 et a, on aura, pour toute valeur x_2 comprise dans cet intervalle entre x_1 et a (847),

$$(C) \qquad \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=f'(x_1)+\theta(x_2-x_1) \qquad 0<\theta<1.$$

La condition (B) sera évidemment satisfaite si, pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré, on a, *en valeur absolue*,

$$f'(x)<1.$$

On doit avoir soin de s'assurer, dans chaque question particulière, que cette inégalité est vérifiée. Dans le cas contraire, on pourrait, en appliquant la méthode, s'éloigner de la racine exacte au lieu de s'en rapprocher.

La relation (C) pouvant s'écrire

$$x_2-a=f'(x_2)[x_1-a],$$

la valeur de $f'(x)$ indique *à peu près* la rapidité de la convergence obtenue.

Les applications de cette méthode sont nombreuses dans toutes les branches des Mathématiques. Nous allons traiter quelques exemples.

Application aux équations du second degré.

1540. Soit l'équation du second degré

$$ax^2+bx+c=0.$$

On en déduit

$$(A) \qquad x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b},$$

et, sous cette forme, on peut lui appliquer la méthode des approximations successives (on suppose les racines réelles).

On a ici

$$f(x)=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b} \qquad \text{et} \qquad f'(x)=-\frac{2ax}{b}.$$

Il faut qu'on ait dans l'intervalle considéré (1539) $f'(x) < 1$, c'est-à-dire

$$-\frac{2ax}{b} < 1 \qquad \text{ou} \qquad x > -\frac{b}{2a}.$$

Des deux racines x' et x'' de l'équation, la méthode ne s'appliquera donc qu'à la première

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La racine x'' sera ensuite donnée par la relation

$$x'+x'' = -\frac{b}{a}.$$

Maintenant, dans quel cas le procédé peut-il le mieux convenir? C'est, évidemment, lorsque le produit ac est très petit par rapport à b^2. Dans cette hypothèse, la racine x' est elle-même très proche de zéro, et il faut poursuivre plus ou moins loin l'extraction de la racine carrée $\sqrt{b^2-4ac}$ pour faire apparaître les chiffres décimaux nécessaires. Bien qu'il n'y ait là aucune difficulté et qu'on puisse même préférer le calcul direct, comme les formules d'approximation qui se présentent ici peuvent servir de type dans beaucoup d'autres questions, nous allons les indiquer, en remarquant que, lorsque ac est très petit, c'est la racine x' qui est proche de $-\frac{c}{b}$ (*Alg. élém.*, 241), tandis que la racine x'' est proche de $-\frac{b}{a}$.

Nous aurons d'abord, en négligeant le terme en x^2 dans le second membre de l'équation (A),

$$x_1 = -\frac{c}{b}.$$

En substituant cette valeur à la place de x dans le terme négligé, il vient

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}.$$

En substituant x_2 à la place de x dans le même terme, on a

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}\right)^2$$

ou, en développant,

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7}.$$

Nous devrons alors, dans l'expression de x_3, supprimer le dernier terme très petit par rapport au précédent, dont il représente le produit par $\frac{ac}{2b^2}$. Nous substituerons donc

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}$$

à la place de x dans le second membre de l'équation (A), et nous aurons

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}\right)^2$$

ou, en développant et en réduisant,

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7} - \frac{4a^4c^5}{b^9} - \frac{4a^5c^6}{b^{11}}.$$

Nous supprimerons les deux derniers termes de cette expression pour la même raison que ci-dessus, et nous prendrons

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7}.$$

Il sera facile de continuer indéfiniment.

On peut, d'après cela, prendre comme formules d'approximation successives

$$x_1 = -\frac{c}{b},$$

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} = -\frac{c}{b} - \frac{c}{b}\left(\frac{ac}{b^2}\right),$$

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^2}{b^3} \times 2\left(\frac{ac}{b^2}\right),$$

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7}$$

$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{2a^2c^3}{b^5} \times \frac{5}{2}\left(\frac{ac}{b^2}\right),$$

....

En résumé, comme $\frac{ac}{b^2}$ est supposé très petit, la formule générale qu'on obtient permet d'approcher de la valeur de la racine x' par une suite d'approximations dont l'*ordre* est de plus en plus élevé, de sorte que l'erreur qui persiste après l'addition de chaque terme peut être regardée comme très petite par rapport à ce terme lui-même. Il en résulte que, en s'arrêtant à un certain terme, on sait toujours si la valeur adoptée est approchée par défaut ou par excès, puisqu'on n'a qu'à consulter le signe du premier terme de correction négligé. Les conditions que doit remplir autant que possible tout procédé d'approximations successives sont donc satisfaites d'une manière complète.

1541. On peut arriver beaucoup plus rapidement aux relations qu'on vient d'établir; car la formule du binôme peut être ici appliquée à la transformation du radical $\sqrt{b^2-4ac}$. On a, en effet,

$$+\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{b^2\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)}=b\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et ac est supposé très petit par rapport à b^2. Il vient, par suite.

$$+\sqrt{b^2-4ac}=b\left[1-\frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2}-\frac{1}{2.4}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2-\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^4-\dots\right]$$

ou

$$\frac{+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b}{2a}-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-2\frac{a^2c^3}{b^5}-5\frac{a^3c^4}{b^7}-\dots$$

On aura donc finalement

$$x'=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-2\frac{a^2c^3}{b^5}-5\frac{a^3c^4}{b^7}-\dots,$$

comme précédemment (1540).

Application aux équations transcendantes.

1542. 1° *Chercher les racines réelles de l'équation*

$$e^x = 17{,}6439\,x. \tag{1}$$

e^x reste positif, quel que soit x. Il en résulte que l'équation donnée ne peut, d'après l'expression du second membre, admettre aucune racine négative.

Pour trouver ses racines positives, nous la transformerons en prenant les logarithmes vulgaires des deux membres. Il vient ainsi

$$x\log e = \log 17{,}6439 + \log x. \tag{2}$$

On a

$$\log e = 0{,}4342944\ldots, \qquad \log 17{,}6439 = 1{,}2465945.$$

En effectuant la division de ces deux derniers nombres, on peut donc mettre l'équation (2) sous la forme

$$x = 2{,}8703887 + \frac{\log x}{0{,}4342944}. \tag{3}$$

C'est celle à laquelle l'équation (1) doit être ramenée, pour qu'on puisse lui appliquer la méthode des approximations successives.

Pour abréger les calculs, nous aurons recours à une construction graphique approchée, en posant

$$y = x, \qquad y = 2{,}87\ldots + \frac{\log x}{0{,}43\ldots}.$$

L'équation (3) résultant de l'élimination de y entre ces deux équations, les abscisses des points d'intersection des lieux que ces équations représentent feront connaître approximativement les racines positives de l'équation (3) ou de l'équation (1).

Le premier lieu (*fig.* 83) est la bissectrice OC de l'angle xOy; le second, une courbe AIB, d'espèce logarithmique, facile à construire.

Pour $x = 0$, on a $y = -\infty$, et la courbe a pour asymptote la partie négative de l'axe Oy. On a $y = 0$, pour

$$\log x = -(2{,}87\ldots \times 0{,}43\ldots) = -1{,}2465945 = \bar{2}{,}7534055.$$

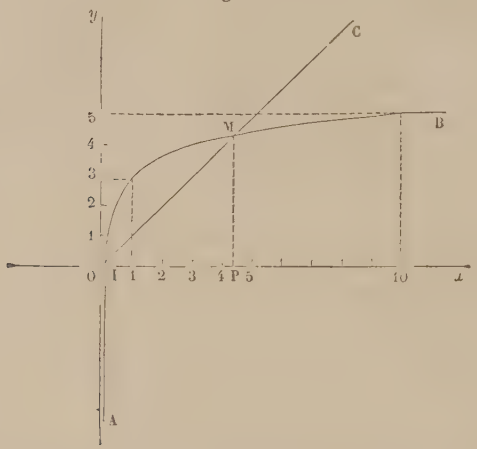
On en déduit $x = 0{,}0566768$. Telle est l'abscisse du point d'intersection de la courbe AIB avec l'axe Ox.

Pour $x = 1$, on a $y = 2{,}87\ldots$. Enfin, pour $x = 10$, on a

$$y = 2{,}87\ldots + \frac{1}{0{,}43\ldots} = \frac{2{,}2465945}{0{,}4342944} = 5{,}1\ldots.$$

La construction de la courbe AIB indique, comme on le voit, deux points de rencontre de cette courbe avec la bissectrice OC et deux racines positives de l'équation (3) ou (1) : l'une est très petite et très peu différente de OI = 0,0566768, puisque la tangente à la courbe

Fig. 83.



AIB au point I fait avec l'axe Ox un angle dont la tangente trigonométrique est $[535,585]\frac{1}{x} = \frac{1}{0,056\ldots} = 17,6$ environ, c'est-à-dire un angle voisin de 87° ; l'autre racine positive OP est comprise entre 4 et 5. C'est à la recherche de cette racine que nous allons appliquer le procédé des approximations successives.

On a ici

$$f(x) = 2,8703887 + \frac{\log x}{0,4342944}.$$

On en déduit

$$f'(x) = \frac{\log e}{x \log e} = \frac{1}{x}.$$

La racine x cherchée étant comprise entre 4 et 5, on voit que $f'(x)$ est à peu près $\frac{1}{4}$. Par suite (1539), chaque nouvelle valeur sera à peu près quatre fois plus approchée que la précédente, et l'approximation marchera assez lentement.

D'après l'épure (*fig.* 83), nous commencerons les substitutions à 4,3. Nous aurons ainsi, comme première valeur,

$$x_1 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3}{0,4342944} = 4,3290038.$$

En substituant cette valeur à la place de x dans le second membre

de l'équation (3), nous obtiendrons, comme seconde valeur plus approchée,

$$x_2 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3290038}{0,4342944} = 4,3357034.$$

En opérant toujours de la même manière, nous trouverons, comme valeurs successives,

$$x_3 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3357034}{0,4342944} = 4,3372726,$$

$$x_4 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3372726}{0,4342944} = 4,3376346,$$

$$x_5 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3376346}{0,4342944} = 4,3377101,$$

$$x_6 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3377101}{0,4342944} = 4,3377355,$$

$$x_7 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3377355}{0,4342944} = 4,3377412,$$

$$x_8 = 2,8703887 + \frac{\log 4,3377412}{0,4342944} = 4,3377426.$$

Nous nous arrêterons à cette dernière valeur, en prenant

$$x = 4,337743.$$

Il est facile de s'assurer que ce résultat est exact à six décimales; car on trouve alors, pour le second membre de l'équation (3),

$$2,8703887 + \frac{\log 4,337743}{0,4342944} = 2,8703887 + \frac{0,6372638}{0,4342944}$$
$$= 2,8703887 + 1,4673543 = 4,3377430.$$

1543. 2° *Résolution générale de l'équation*

$$x - \operatorname{tang} x = 0. \tag{1}$$

Nous suivrons la marche indiquée par Euler (1). Cette marche est d'ailleurs analogue à celle que nous avons exposée, relativement aux équations du second degré (1540).

Nous avons vu précédemment (1533) que l'équation (1) a une infinité de racines réelles, deux à deux égales et de signes contraires, et nous avons déterminé sa seconde racine positive. Il s'agit maintenant d'établir une formule qui permette d'obtenir une racine positive de rang quelconque.

L'extrémité de chaque arc-racine positif, tel que x, tombe dans un

(1) *Introductio in Analysin infinitorum*, Livre II.

quadrant de rang impair, de sorte que la $(n+1)^{\text{ième}}$ racine est moindre que $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \alpha, \tag{2}$$

α étant un arc positif moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui désigne la distance de *l'extrémité* de la racine cherchée à *l'extrémité* du quadrant correspondant. On en déduit (*Trigon.*, 23)

$$\operatorname{tang}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \cot\alpha = \operatorname{tang} x.$$

Il en résulte, d'après l'équation (1),

$$\cot\alpha = x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{x}.$$

L'équation (2) revient donc à

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}. \tag{3}$$

Mais, $\frac{1}{x}$ étant moindre que l'unité (à partir de la seconde racine positive), on peut développer arc tang $\frac{1}{x}$ par la formule connue (915), et l'on a

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \frac{1}{9x^9} - \dots. \tag{4}$$

Il vient donc, en posant $(2n+1)\frac{\pi}{2} = a$,

$$x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{9x^9} + \dots, \tag{5}$$

formule qui se prête parfaitement au calcul par approximations successives, et qui présente les mêmes caractères que la formule relative aux équations du second degré (1540).

On a ici (1539, 787)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots,$$

quantité inférieure à l'unité (à partir de la seconde racine positive).

La *première* valeur approchée de x sera (1538) $x = a$.

Nous obtiendrons la seconde valeur approchée, en remplaçant x par a dans le second membre de l'équation (5), et en négligeant tous les termes du second membre à partir du troisième.

La *seconde* valeur sera donc

$$x = a - \frac{1}{a}.$$

Pour avoir la troisième, nous substituerons la seconde valeur à la place de x dans le second membre de l'équation (5), en négligeant les termes de ce second membre à partir du quatrième. Il viendra

$$x = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}.$$

La première division donne (en ne conservant que les troisièmes puissances de a)

$$\frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}.$$

La seconde division donne (sous la même réserve)

$$\frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3} = \frac{1}{3a^3}.$$

On a ainsi, pour la *troisième* valeur approchée,

$$x = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}.$$

Pour avoir la quatrième valeur approchée, il faut de même substituer la troisième valeur à la place de x dans le second membre de l'équation (5), en négligeant tous les termes qui contiendraient des puissances de a supérieures à la cinquième. Il vient

$$x = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5} + \ldots$$

En effectuant les divisions (sous la réserve indiquée), on a

$$\frac{1}{a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{3a^5},$$

$$\frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} = \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{a^5},$$

$$\frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5} = \frac{1}{5a^5}.$$

Par suite, la *quatrième* valeur approchée est

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5}.$$

On pourra calculer de la même manière et de proche en proche les autres valeurs approchées. On trouvera, pour la *cinquième* et la *sixième*,

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7},$$

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7} - \frac{781}{315a^9}.$$

Pour avoir les différentes racines positives à partir de la seconde, il suffira de remplacer, dans la dernière formule, a par sa valeur $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ et de substituer les nombres 1, 2, 3, ..., à la place de n. En remplaçant en même temps $\frac{\pi}{2}$ (1) par sa valeur 1,5707963267948 96..., on aura

$$x = (2n+1)\times 1,5707963267948 96 - \frac{0,6366197723675\,80}{2n+1}$$
$$- \frac{0,1720081836}{(2n+1)^3} - \frac{0,0906259 6}{(2n+1)^5}$$
$$- \frac{0,0589283 7}{(2n+1)^7} - \frac{0,0425854 3}{(2n+1)^9} - \dots$$

A mesure que n augmente, le nombre des termes de la formule qu'on doit conserver pour le même degré d'exactitude va en diminuant.

En convertissant les coefficients du second membre, qui sont exprimés en parties décimales du rayon pris pour unité, en degrés, minutes et secondes, à l'exemple d'Euler, et comme il est facile de le faire à l'aide de la Table de réduction dont nous avons déjà parlé (1533), on a la formule transformée

$$x = (2n+1)90^\circ - \frac{131312'',25}{2n+1} - \frac{35479'',24}{(2n+1)^3} - \frac{18693''}{(2n+1)^5}$$
$$- \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8781''}{(2n+1)^9} - \dots$$

Cherchons, par exemple, la seconde racine positive en faisant $n = 1$.

---

(1) On a, avec quinze décimales exactes,

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790.$$

Nous aurons, d'une part, $3 \times 90° = 270°$ et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1313\,12'',25}{3} &= 43770'',750\\
\frac{35479'',24}{27} &= 1314'',046\\
\frac{18693''}{243} &= 76'',296\\
\frac{12155''}{2187} &= 5'',558\\
\frac{8784''}{19683} &= 0'',446\\
&\overline{45167'',726 = 12°32'47'',726.}
\end{aligned}$$

On a donc, pour la seconde racine positive,

$$x = 270° - 12°32'47'',726 = 257°27'12'',274.$$

Le calcul direct nous a donné (1533)

$$257°27'12'',2.$$

Nous terminerons, en indiquant, d'après EULER (*loc. cit.*), le Tableau des dix premières racines de l'équation $x - \operatorname{tang} x = 0$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 90° - 90° = 0°,\\
x_2 &= 3 \times 90° - 12°32'48'' = 257°27'12'',\\
x_3 &= 5 \times 90° - 7°22'32'' = 442°37'28'',\\
x_4 &= 7 \times 90° - 5°14'22'' = 624°45'38'',\\
x_5 &= 9 \times 90° - 4°\,3'59'' = 805°56'\,1'',\\
x_6 &= 11 \times 90° - 3°19'24'' = 986°40'36'',\\
x_7 &= 13 \times 90° - 2°48'37'' = 1167°11'23'',\\
x_8 &= 15 \times 90° - 2°26'\,5'' = 1347°33'55'',\\
x_9 &= 17 \times 90° - 2°\,8'51'' = 1527°51'\,9'',\\
x_{10} &= 19 \times 90° - 1°55'16'' = 1708°\,4'44''.
\end{aligned}$$

CHAPITRE V.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES. — DES SÉRIES RÉCURRENTES.

Définitions.

1544. Toute fraction rationnelle (1441) de la variable x peut, en effectuant la division du numérateur par le dénominateur, tous deux ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, être remplacée par un polynôme en x (qui peut être nul), augmenté d'une certaine fraction complémentaire (221). C'est à cette fraction complémentaire, dans laquelle le degré du numérateur est nécessairement inférieur à celui du dénominateur, que l'on donne plutôt le nom de *fraction rationnelle.* Nous nous proposons de montrer comment on peut toujours décomposer une pareille fraction en d'autres fractions plus simples ou, plus exactement, en *fractions simples.*

On appelle ainsi les fractions de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

n étant un entier quelconque.

Dans ce qui suit, nous représenterons la fraction rationnelle considérée par

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

et, $F(x)$ étant du degré m, $f(x)$ sera *au plus* de degré $m-1$.

On peut toujours supposer la fraction rationnelle donnée *irréductible,* c'est-à-dire que ses deux termes $f(x)$ et $F(x)$ ont été rendus premiers entre eux et n'ont plus aucun facteur premier commun. On doit admettre aussi qu'on a résolu à part l'équation

$$F(x)=0,$$

obtenue en égalant son dénominateur à zéro, et qu'on connaît les racines a, b, c, d, ..., l, de cette équation.

Nous distinguerons deux cas, suivant que les racines de l'équation $F(x) = 0$ sont ou non toutes inégales.

PREMIER CAS : L'ÉQUATION $F(x) = 0$ N'A QUE DES RACINES INÉGALES.

1545. L'équation $F(x) = 0$, dont les coefficients sont expressément supposés *réels*, ayant ses m racines a, b, c, d, ..., l, inégales, nous allons chercher à mettre la fraction rationnelle considérée sous la forme

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

où A, B, C, ..., L sont des *constantes* qu'on doit déterminer (si cela est possible) de manière à transformer l'équation (1) en identité.

L'idée d'essayer cette transformation est toute naturelle, puisque, en réduisant les fractions du second membre au même dénominateur, on obtiendra, en tout état de cause, une fraction rationnelle de même dénominateur $F(x)$ et qui aura pour numérateur une fonction entière de x de degré moindre que $F(x)$.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $F(x)$; elle deviendra

$$(2) \qquad f(x) = \frac{AF(x)}{x-a} + \frac{BF(x)}{x-b} + \frac{CF(x)}{x-c} + \ldots + \frac{LF(x)}{x-l}.$$

Tous les termes du second membre sont entiers, puisque $F(x)$ a pour facteurs premiers les différents dénominateurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$. On pourrait donc obtenir m équations pour calculer les m inconnues A, B, C, ..., L, en écrivant que l'équation (2) est une identité, c'est-à-dire en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Mais on parvient plus rapidement au but, à l'aide de la remarque suivante.

Remplaçons x par a dans l'équation (2); a étant racine de $F(x) = 0$, on a $F(a) = 0$. Toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$ étant d'ailleurs inégales, on voit que tous les termes du second membre disparaîtront, à l'exception du

premier qui se présentera sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}(a)}{a-a}=\frac{0}{0}.$$

Mais cette indétermination n'est qu'apparente, et la règle de L'Hospital (917) donne immédiatement pour la vraie valeur de la fraction $\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}(x)}{x-a}$, lorsqu'on y fait $x=a$,

$$\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}'(a)}{1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A}\,\mathrm{F}'(a).$$

L'équation (2) se réduit donc en réalité, pour $x=a$, à

$$f(a)=\mathrm{A}\,\mathrm{F}'(a), \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{A}=\frac{f(a)}{\mathrm{F}'(a)}.$$

Cette valeur de A est d'ailleurs parfaitement déterminée : elle ne peut pas être *infinie*, puisque l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ n'ayant que des racines inégales ne peut avoir aucune racine commune avec l'équation dérivée $\mathrm{F}'(x)=0$ [1134]; elle ne peut pas être *nulle*, puisque, par hypothèse (1544), $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ n'ont aucun facteur premier commun.

En remplaçant successivement x par b, c, d, ..., l, dans l'équation (2), on trouvera successivement, de la même manière,

$$\mathrm{B}=\frac{f(b)}{\mathrm{F}'(b)}, \qquad \mathrm{C}=\frac{f(c)}{\mathrm{F}'(c)}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{L}=\frac{f(l)}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Pour avoir les différents numérateurs constants des fractions simples du développement (1), on n'a donc qu'à former l'expression générale

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}'(x)},$$

et à y remplacer successivement x par les m racines de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$.

Le raisonnement précédent prouve que l'équation (2), et par conséquent l'équation (1), est satisfaite *par les m valeurs a, b, c, d, ..., l* de x, lorsqu'on donne aux constantes A, B, C, ..., L les valeurs indiquées ci-dessus et *qui sont les seules possibles*. Comme l'équation (2) est au plus du degré $m-1$ et qu'elle admet ainsi m racines, elle

se réduit nécessairement à une identité (1067), et il en est de même du développement (1).

1546. Au défaut de la règle de L'Hospital (917), la formule de Taylor (735) aurait facilement conduit à la vraie valeur du quotient

$$\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{F}(x)}{x-a},$$

pour $x=a$.

En effet, on peut écrire $\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(a+x-a)$ et regarder $x-a$ comme un accroissement. On a alors

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(a)+\frac{x-a}{1}\mathrm{F}'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}\mathrm{F}''(a)+\ldots.$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction entière de x de degré m, le développement est limité, et l'on a, en divisant les deux membres par $x-a$, puis en faisant $x=a$,

$$\lim\left[\frac{\mathrm{F}(x)}{x-a}\right]_{x=a}=\mathrm{F}'(a).$$

Transformation spéciale relative aux racines imaginaires simples.

1547. Les conclusions précédentes subsistent, que les racines inégales de l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ soient réelles ou imaginaires. Seulement, les fractions simples correspondantes sont elles-mêmes réelles ou imaginaires.

Or, si l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ admet des racines imaginaires inégales, ces racines imaginaires sont du moins conjuguées deux à deux; et, alors, les deux fractions simples *imaginaires* qui répondent à deux racines imaginaires conjuguées peuvent être remplacées par une seule fraction simple de seconde espèce (1544), c'est-à-dire *réelle*.

Supposons, en effet, que les constantes A et B répondent aux deux racines imaginaires conjuguées $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$. On aura (1545)

$$\mathrm{A}=\frac{f(\alpha+\beta i)}{\mathrm{F}'(\alpha+\beta i)},\qquad \mathrm{B}=\frac{f(\alpha-\beta i)}{\mathrm{F}'(\alpha-\beta i)}.$$

Ces deux quotients, ne différant que par le changement de signe de i, sont eux-mêmes conjugués. En désignant par P

et Q deux fonctions réelles et rationnelles de α et de β, on peut donc poser

$$A = P + Qi, \qquad B = P - Qi.$$

Les fractions simples correspondantes seront, par suite,

$$\frac{P + Qi}{x - \alpha - \beta i}, \qquad \frac{P - Qi}{x - \alpha + \beta i},$$

et leur somme aura pour expression

$$\frac{2P(x - \alpha) - 2Q\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2};$$

c'est-à-dire qu'elle se réduit à une fraction simple réelle dont le numérateur est du premier degré en x, et le dénominateur, du second degré.

1548. En résumé, chaque racine simple réelle de l'équation $F(x) = 0$ donne lieu, dans le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$, à une fraction simple de la forme $\frac{A}{x - a}$; et chaque couple de racines imaginaires simples conjuguées, à une fraction simple de la forme

$$\frac{Mx + N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{ou} \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}.$$

SECOND CAS : L'ÉQUATION $F(x) = 0$ A DES RACINES ÉGALES.

1549. Supposons que l'équation $F(x) = 0$ ait des racines égales, et soit a l'une de ces racines; l'expression $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$ [1545] donnera pour A une valeur *infinie* (1134). La décomposition indiquée précédemment n'est donc plus possible, et elle doit être remplacée par un développement de forme différente.

Admettons que a soit une racine multiple d'ordre n de l'équation $F(x) = 0$. Nous pourrons poser

$$F(x) = (x - a)^n F_1(x),$$

et aucun des facteurs premiers du polynôme $F_1(x)$ ne sera plus égal à $x - a$.

En remplaçant x par $a + x - a$, on peut développer, par

la formule de Taylor (735), $f(x)$ et $F_1(x)$ suivant les puissances croissantes de l'accroissement $x-a$.

On a ainsi

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots,$$

$$F_1(x) = F_1(a) + \frac{x-a}{1} F_1'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F_1''(a) + \dots.$$

Le degré de $F(x)$ étant m, le degré de $f(x)$ est au plus $m-1$, et celui de $F_1(x)$ est $m-n$.

Divisons $f(x)$ par $F_1(x)$, en regardant $x-a$ comme la lettre ordonnatrice. Le premier terme du quotient sera la quantité constante $\frac{f(a)}{F_1(a)}$, que nous désignerons par A_0. Le premier reste ne contiendra plus de terme constant et, A_1 étant un second coefficient constant, le second terme du quotient sera $A_1(x-a)$. Le second reste, à son tour, ne contiendra plus de terme en $x-a$ et, A_2 étant un troisième coefficient constant, le troisième terme du quotient sera $A_2(x-a)^2$; etc. On poursuivra la division de cette manière, jusqu'à ce qu'on arrive à écrire au quotient un terme en $(x-a)^{n-1}$, qui sera $A_{n-1}(x-a)^{n-1}$. Le reste correspondant ne contiendra plus de terme en $(x-a)^{n-1}$, de sorte que, tous ses termes étant divisibles par $(x-a)^n$, on pourra le mettre sous la forme

$$(x-a)^n f_1(x).$$

On écrira alors l'identité qui résulte de toute division, et l'on aura

$$(1)\quad f(x) = F_1(x)\overbrace{[A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-1}]}^{Q} + \overbrace{(x-a)^n f_1(x)}^{R}.$$

$F_1(x)$ étant du degré $m-n$ par rapport à x, le produit du diviseur par le quotient sera du degré $m-1$. Le dividende étant au plus du degré $m-1$, il en sera de même du reste R. Par conséquent, le polynôme $f_1(x)$ sera au plus du degré $m-n-1$. D'ailleurs, $f_1(x)$ et $F_1(x)$ ne peuvent admettre aucun facteur premier commun, sans quoi ce facteur premier commun appartiendrait à la fois à $f(x)$ et à $F(x)$ et, contre l'hypothèse, la fraction rationnelle considérée, $\frac{f(x)}{F(x)}$, ne serait pas irréductible.

Cela posé, si l'on divise par $F(x)$ ou par $(x-a)^n F_1(x)$ les deux membres de l'identité (1), il vient évidemment

$$(2)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

La racine multiple d'ordre n représentée par le facteur multiple $(x-a)^n$ donne donc lieu à n fractions simples, dont les dénominateurs respectifs sont les puissances successives $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$, $(x-a)^{n-2}$, ..., jusqu'à $x-a$, et dont les numérateurs respectifs sont les coefficients des n premiers termes du quotient trouvé en divisant $f(x)$ par $F_1(x)$, comme on vient de l'indiquer.

[On remarquera que la première fraction du groupe de fractions simples ainsi obtenu existe toujours et est parfaitement déterminée, puisque l'on a $A_0 = \frac{f(a)}{F_1(a)}$ et qu'aucune des quantités $f(a)$ et $F_1(a)$ ne peut être nulle; mais les autres coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ peuvent être égaux à zéro.]

Il reste maintenant à décomposer la fraction irréductible $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$, et le numérateur, au plus du degré $m-n-1$.

Si l'équation $F_1(x) = 0$ admet alors une racine b dont l'ordre de multiplicité soit p, on posera encore

$$F_1(x) = (x-b)^p F_2(x),$$

et l'on opérera sur $f_1(x)$ et sur $F_2(x)$ comme on vient d'opérer sur $f(x)$ et sur $F_1(x)$. On aura donc

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{f_2(x)}{F_2(x)},$$

$\frac{f_2(x)}{F_2(x)}$ représentant une fraction irréductible, dont le dénominateur sera du degré $m-n-p$, et le numérateur, au plus du degré $m-n-p-1$.

On continuera de même, jusqu'à ce qu'on parvienne à une fraction complémentaire $\frac{f_k(x)}{F_k(x)}$, dont le dénominateur égalé à zéro n'admette plus de racines égales et qui soit, par con-

séquent, décomposable par le procédé indiqué en premier lieu (1545).

1550. *La décomposition qu'on vient d'effectuer n'est possible que d'une seule manière,* c'est ce qui reste à établir.

On ne peut pas affirmer *a priori*, en effet, que, si l'on commençait la décomposition de la fraction rationnelle donnée en considérant la racine multiple b au lieu de la racine multiple a, on parviendrait à un résultat identique, c'est-à-dire que les coefficients (A) et (B) correspondant à ces racines conserveraient les mêmes valeurs. Rien ne prouve, non plus, qu'une autre marche que celle que nous avons suivie ne conduirait pas, sauf la forme des fractions simples, à une décomposition complètement différente.

Pour lever tous les doutes, supposons donc, pour un instant, deux décompositions différentes possibles, et admettons les deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots$$

et

$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}}+\frac{A'_1}{(x-a')^{n'-1}}+\ldots+\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}}+\ldots.$$

Ces deux systèmes, représentant la même fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, doivent être égaux quel que soit x.

Or, si l'on multiplie les deux expressions égales comparées par $(x-a)^n$, elles devront demeurer égales; et, si l'on fait ensuite $x=a$, la première se réduira à A_0.

Mais, si aucune des fractions simples qui composent la seconde expression n'a alors pour dénominateur une certaine puissance de $x-a$, cette seconde expression s'annulera pour $x=a$, au lieu de devenir A_0. Il faut donc nécessairement que quelque fraction du second système ait pour dénominateur une puissance de $x-a$, c'est-à-dire que a', par exemple, soit égal à a.

Cela ne suffit pas. On doit avoir en même temps $n'=n$. Car, si n était *supérieur* à n', la même difficulté se représenterait : après la multiplication par $(x-a)^n$, le second système s'évanouirait encore pour $x=a$, tandis que le premier se réduirait toujours à A_0. Si, au contraire, n était *inférieur* à n', le

premier système se réduisant à A_0 pour $x = a$, le second deviendrait infini pour la même valeur.

On a ainsi à la fois $a' = a$ et $n' = n$. L'égalité des deux systèmes, après leur multiplication par $(x-a)^n$ ou $(x-a')^{n'}$, aura, par suite, pour expression,

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + (x-a)^n \left[\frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots \right]$$
$$= A'_0 + A'_1(x-a) + A'_2(x-a)^2 + \ldots + (x-a)^n \left[\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}} + \frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}} + \ldots \right].$$

et, si l'on fait maintenant $x = a$, il restera

$$A_0 = A'_0.$$

La première fraction simple du premier système fait donc forcément partie du second système. Après avoir supprimé de part et d'autre les deux fractions égales, les restes seront égaux, et l'on pourra appliquer le même raisonnement à la seconde fraction simple du premier système, et ainsi de suite. Les deux systèmes supposés sont, par conséquent, identiques.

Il en résulte que, *de quelque manière qu'on procède, on trouvera pour les numérateurs* $A_0, A_1, A_2, \ldots, B_0, B_1, B_2, \ldots$, *des valeurs uniques et identiques.*

Transformation spéciale relative aux racines imaginaires multiples.

1551. Les raisonnements précédents subsistent, que les racines égales considérées soient réelles ou imaginaires. Mais, si l'équation $F(x) = 0$ admet une racine imaginaire multiple d'ordre n, elle admet aussi la racine imaginaire conjuguée au même ordre de multiplicité (1078). Nous allons montrer, en concordance avec ce qui a lieu pour les racines imaginaires conjuguées simples (1547), que l'on peut alors remplacer les deux parties imaginaires du développement, qui répondent aux deux racines imaginaires conjuguées d'ordre n

$$(\alpha + \beta i)^n \quad \text{et} \quad (\alpha - \beta i)^n,$$

par une seule partie réelle de la forme

$$\frac{M_0 x + N_0}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}} + \ldots + \frac{M_{n-1} x + N_{n-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

En effet, en réunissant les deux racines imaginaires conjuguées $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$ dans le trinôme du second degré $(x-\alpha)^2+\beta^2$, posons comme précédemment (1549)

$$(1) \qquad F(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x).$$

Désignons par M_0 et N_0 deux constantes indéterminées, et formons le polynôme

$$(2) \qquad f(x)-(M_0x+N_0)F_1(x).$$

On peut disposer des deux indéterminées, de manière que ce polynôme soit exactement divisible par le trinôme $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Il suffit pour cela que ledit polynôme s'annule successivement quand on remplace x par la racine $\alpha+\beta i$ et par la racine conjuguée $\alpha-\beta i$.

Si nous représentons par $A\pm Bi$ et par $C\pm Di$ les valeurs conjuguées que ces substitutions font prendre à $f(x)$ et à $F_1(x)$, nous obtiendrons les deux équations de condition

$$(A+Bi)-[M_0(\alpha+\beta i)+N_0](C+Di)=0,$$
$$(A-Bi)-[M_0(\alpha-\beta i)+N_0](C-Di)=0.$$

Les premiers membres de ces équations étant conjugués, elles reviennent aux deux équations qu'on obtient en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire d'une seule d'entre elles, la première par exemple. On trouve ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} (\beta D-\alpha C)M_0-CN_0=-A, \\ (\beta C+\alpha D)M_0+DN_0=B. \end{cases}$$

Ces équations sont du premier degré par rapport aux constantes indéterminées M_0 et N_0, et le dénominateur commun de leurs formules de résolution est égal (*Alg. élém.*, 148) à

$$(\beta D-\alpha C)D+(\beta C+\alpha D)C \quad \text{ou à} \quad \beta(C^2+D^2).$$

Ce dénominateur ne peut donc être nul; car, si β était nul, les racines considérées cesseraient d'être imaginaires et, si C^2+D^2 était nul [c'est-à-dire si l'on avait $C=0$, $D=0$], le polynôme $F_1(x)$ contiendrait encore (1059), contre l'hypothèse, les facteurs $x-\alpha-\beta i$ et $x-\alpha+\beta i$.

Les équations (3) donneront, par conséquent, pour M_0 et N_0, des valeurs finies et déterminées, qui ne peuvent être nulles; car, s'il en était ainsi, on aurait [équations (3)] $A=0$ et $B=0$; $f(x)=0$ admettrait les deux racines $\alpha+\beta i$ et

$\alpha - \beta i$, et la fraction rationnelle proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ ne serait plus irréductible.

Pour ces valeurs de M_0 et de N_0, le polynôme (2) devenant exactement divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, on a, en appelant $\varphi(x)$ le quotient,

$$f(x) - (M_0 x + N_0) F_1(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x);$$

et l'on en déduit, d'après la valeur (1) de $F(x)$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_0 x + N_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1} F_1(x)}.$$

Il reste à décomposer la seconde partie du second membre.

$f(x)$ étant au plus du degré $m-1$, $\varphi(x)$ est au plus du degré $m-3$; $F_1(x)$ étant du degré $m-2n$,

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1} F_1(x)$$

est du degré $m-2$. Par conséquent, la fraction complémentaire dont il s'agit est tout à fait analogue à la proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$. Il en résulte qu'en opérant sur la seconde fraction rationnelle comme on vient de le faire sur la première, on obtiendra

$$\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1} F_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{\psi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2} F_1(x)}.$$

On continuera ainsi, jusqu'à ce qu'on ait épuisé les facteurs $(x-\alpha)^2+\beta^2$ et qu'on soit arrivé à une dernière fraction complémentaire de la forme $\frac{\theta(x)}{F_1(x)}$, qu'on développera elle-même d'après la nature des racines de son dénominateur égalé à zéro.

Résumé.

1552. Étant donnée la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, on peut toujours, en posant $F(x)=0$, décomposer son dénominateur $F(x)$ en ses facteurs réels (simples ou multiples) du premier et du second degré (1077), de manière à avoir

$$F(x) = (x-a)^m (x-b)^n \ldots (x^2+px+q)^{m'} (x^2+rx+s)^{n'} \ldots,$$

les exposants m, n, ..., m', n', ... pouvant se réduire à l'unité.

Le développement de la fraction rationnelle aura alors pour expression, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_0}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2+px+q)^{m'}} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{m'-1}} + \ldots + \frac{P_{m'-1} x + Q_{m'-1}}{x^2+px+q} \\ & + \frac{R_0 x + S_0}{(x^2+rx+s)^{n'}} + \frac{R_1 x + S_1}{(x^2+rx+s)^{n'-1}} + \ldots + \frac{R_{n'-1} x + S_{n'-1}}{x^2+rx+s} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

1553. Dans le cas des racines simples réelles de $F(x) = 0$, on déterminera les numérateurs des fractions simples correspondantes, en appliquant la règle démontrée au n° 1545. On pourra suivre la même règle relativement aux racines simples imaginaires, quitte à réunir en une seule fraction réelle les fractions simples qui répondent à deux racines imaginaires conjuguées.

Dans le cas des racines réelles multiples, on déterminera les numérateurs de la série de fractions simples qui répond à chacune de ces racines, en effectuant la division indiquée au n° 1549. Pour les racines imaginaires multiples et conjuguées, on exécutera les calculs prescrits au n° 1551.

Mais ces calculs sont pénibles, et on les remplacera avec grand avantage en employant la *Méthode des coefficients indéterminés,* dont l'usage se trouve ici parfaitement justifié. Cette même méthode convient d'ailleurs aussi aux autres cas.

Lorsqu'on veut y avoir recours, on écrit le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$ selon la règle théorique que nous avons résumée plus haut, on chasse le dénominateur $F(x)$ et, après réduction, on égale les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de l'*identité* qu'on doit obtenir. On a ainsi autant d'équations du premier degré qu'il existe de coefficients constants à déterminer, et il n'y a plus qu'à les

résoudre. L'habitude du calcul suggère, en général, de nombreuses simplifications.

1554. On peut préciser comme il suit cette application de la méthode des coefficients indéterminés.

Proposons-nous de trouver spécialement les numérateurs des fractions simples qui répondent à la racine a (réelle ou imaginaire), d'un ordre de multiplicité égal à n. Nous aurons (1549)

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'identité (1) par $F(x) = (x-a)^n F_1(x)$, et si l'on pose $x - a = h$, d'où $x = a + h$, il vient

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} f(a+h) = A_0 \frac{F(a+h)}{h^n} + A_1 \frac{F(a+h)}{h^{n-1}} + \ldots \\ + A_{n-1} \frac{F(a+h)}{h} + h^n f_1(a+h). \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs par la formule de Taylor (735), et en remarquant que $F(a)$ et toutes ses dérivées jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ sont nulles (1185),

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \ldots$$

$$F(a+h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^n(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} F^{n+1}(a) + \ldots.$$

En portant ces valeurs dans la relation (2), on trouve

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \ldots \\ = A_0 \left[\frac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} + h \frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots \right] \\ + A_1 \left[h \frac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} + h^2 \frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots \right] \\ + A_2 \left[h^2 \frac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} + h^3 \frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots \right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + A_{n-1} \left[h^{n-1} \frac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} + h^n \frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + \ldots \right] + h^n f_1(a+h \end{aligned}$$

Puisqu'on est parti d'une identité, cette dernière égalité a lieu quel que soit h. Les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres sont donc égaux, et l'on a, en s'arrêtant *exclusivement* aux termes qui contiennent h à la puissance n et aux puissances supérieures,

$$(3)\quad \begin{cases} A_0 \dfrac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} = f(a), \\ A_0 \dfrac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + A_1 \dfrac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{f'(a)}{1}, \\ A_0 \dfrac{F^{n+2}(a)}{1.2.3\ldots(n+2)} + A_1 \dfrac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)} + A_2 \dfrac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{f''(a)}{1.2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_0 \dfrac{F^{2n-1}(a)}{1.2.3\ldots(2n-1)} + A_1 \dfrac{F^{2n-2}(a)}{1.2.3\ldots(2n-2)} + \ldots + A_{n-1} \dfrac{F^n(a)}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{f^{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}. \end{cases}$$

La première de ces égalités donnera A_0; la deuxième fera alors connaître A_1; connaissant A_0 et A_1, la troisième déterminera A_2; et ainsi de suite, jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, qui déterminera A_{n-1}, les précédentes ayant conduit successivement aux valeurs de $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$.

On pourra ensuite opérer de même pour la fraction complémentaire $\dfrac{f_1(x)}{F_1(x)}$.

1555. Lorsque la racine multiple a considérée est imaginaire, les fractions simples obtenues sont imaginaires; mais, en les groupant convenablement avec les fractions simples qui répondent à la racine conjuguée, on parvient, pour les deux racines, au développement *réel* dont nous avons indiqué la forme précédemment (1551).

Pour en déterminer les constantes, on peut opérer comme il suit.

Soient $\alpha \pm \beta i$ les deux racines imaginaires conjuguées, dont l'ordre de multiplicité est n. On peut poser (1551)

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{M_0 x + N_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \ldots \\ & + \frac{M_{n-1} x + N_{n-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \end{aligned}$$

et l'on a

$$F(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x).$$

Pour trouver les constantes M_0, N_0, M_1, N_1, ..., M_{n-1}, N_{n-1}, nous transformerons l'identité (1) en chassant le dénominateur $F(x)$ et en isolant le dernier terme du second membre. Il viendra

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) - (M_0x+N_0)F_1(x) - (M_1x+N_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]F_1(x) \\ - (M_2x+N_2)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2F_1(x) - \dots \\ - (M_{n-1}x+N_{n-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x \\ = [(x-\alpha)^2+\beta^2]^n f_1(x). \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de l'identité (2) doit donc être divisible par $[(x-\alpha)^2+\beta^2)^n$. Par conséquent, pour $x=\alpha+\beta i$, ce premier membre deviendra nul, et il en sera de même de ses $n-1$ premières dérivées (1135).

On aura ainsi n équations de condition qui se partageront chacune en deux autres, en égalant à zéro leur partie réelle et leur partie imaginaire.

On remarque alors que, dans la première équation, tous les termes du premier membre, à partir du troisième, s'annulent pour $x=\alpha+\beta i$, de sorte que cette équation ne contient que les deux constantes M_0 et N_0 au premier degré. Comme elle se décompose en deux autres équations, ces deux constantes seront facilement déterminées.

Dans la seconde équation ou dans la première équation dérivée, les termes du premier membre ne s'annulent pour $x=\alpha+\beta i$ qu'à partir du quatrième, et les termes conservés contiennent M_0, N_0, M_1, N_1, toujours au premier degré. Comme cette seconde équation se décompose également en deux autres, et qu'on connaît déjà M_0, N_0, on trouvera rapidement M_1 et N_1. On poursuivra le calcul de la même manière, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ équation dérivée qui fera connaître les deux dernières constantes M_{n-1}, N_{n-1}.

Exemples.

1556. 1° *Soit à décomposer la fraction rationnelle*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2-4x}{x^2-x-2}.$$

$F(x)=0$ donne ici l'équation du second degré

$$x^2-x-2=0,$$

dont les racines sont $x_1=2$ et $x_2=-1$.

On aura donc (1545)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Pour trouver A et B, nous formerons le quotient

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{2-4x}{2x-1},$$

et nous y remplacerons successivement x par les racines x_1 et x_2. Nous aurons ainsi

$$A = -\frac{6}{3} = -2 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{6}{-3} = -2;$$

d'où

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2} = -\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

1557. 2° *Soit à décomposer la fraction rationnelle*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x(a^2-x^2)}.$$

L'équation $F(x) = 0$ ayant pour racines $x = 0$, $x = -a$, $x = a$, nous aurons

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{x-a}.$$

Pour trouver A, B, C, nous formerons le quotient

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{1}{a^2-3x^2},$$

et nous y substituerons successivement, à la place de x, les trois racines de $F(x) = 0$. Il viendra donc

$$A = \frac{1}{a^2}, \qquad B = -\frac{1}{2a^2}, \qquad C = -\frac{1}{2a^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(x+a)} - \frac{1}{2a^2(x-a)}.$$

1558. 3° *Soit à décomposer la fraction rationnelle*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ sont la racine réelle $x = -1$, et les deux racines imaginaires conjuguées $x = +i$ et $x = -i$.

On aura donc

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}.$$

Pour trouver A, B, C, nous formerons le quotient

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 2x + 1},$$

et nous y remplacerons successivement x par les trois racines de $F(x) = 0$. On a ainsi

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{-i}{-2+2i} = \frac{i}{2(1-i)}, \quad C = \frac{i}{-2-2i} = -\frac{i}{2(1+i)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3}{2(x+1)} + \frac{i}{2(1-i)(x-i)} - \frac{i}{2(1+i)(x+i)}.$$

La somme des deux dernières fractions, qui sont imaginaires, donnant la fraction réelle $-\frac{x+1}{2(x^2+1)}$, on a finalement

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

On aurait pu arriver plus rapidement au résultat, en utilisant directement la transformation spéciale indiquée au n° 1548, c'est-à-dire en posant immédiatement

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1},$$

et en appliquant la méthode des coefficients indéterminés (1553).

En chassant les dénominateurs, on obtient l'identité

$$x^2 - x + 1 = A(x^2+1) + (Mx+N)(x+1).$$

En y faisant $x = -1$, on trouve

$$A = \frac{3}{2}.$$

En égalant ensuite les coefficients de x^2 et de x dans les deux membres, on a les deux relations

$$1 = A + M, \qquad -1 = M + N,$$

d'où l'on déduit

$$M = 1 - A = -\frac{1}{2}, \qquad N = -1 - M = -\frac{1}{2}.$$

On parvient donc, comme cela doit être, à la même décomposition que précédemment.

1559. 4° *Soit à décomposer la fraction rationnelle*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{5x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 5x + 3}{(x-1)^3(x+1)x}.$$

L'équation $F(x) = 0$ admettant la racine triple $x = 1$ et deux racines inégales $x = -1$ et $x = 0$, nous poserons (1549)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x}.$$

On a ici $F(x) = (x-1)^3 F_1(x)$ ou $F_1(x) = x^2 + x$. Comme il s'agit d'une racine triple, on n'a à poursuivre la division de $f(x)$ par $F_1(x)$, ordonnées suivant les puissances croissantes de $x-1$, que jusqu'au troisième terme du quotient. Pour plus de rapidité, nous remplacerons dans le calcul $x-1$ par X. On a d'ailleurs

$$f(x) = 5x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 5x + 3,$$
$$f'(x) = 20x^3 - 39x^2 + 28x - 5,$$
$$f''(x) = 60x^2 - 78x + 28,$$
$$f'''(x) = 120x - 78,$$
$$f^{IV}(x) = 120,$$

$$F_1(x) = x^2 + x, \qquad F_1'(x) = 2x + 1, \qquad F_1''(x) = 2,$$

en même temps que

$$f[1 + x - 1] = f(1) + (x-1)\frac{f'(1)}{1} + (x-1)^2\frac{f''(1)}{1.2} + (x-1)^3\frac{f'''(1)}{1.2.3} + (x-1)^4\frac{f^{IV}(1)}{1.2.3.4},$$

$$F_1[1 + x - 1] = F_1(1) + (x-1)\frac{F_1'(1)}{1} + (x-1)^2\frac{F_1''(1)}{1.2}.$$

Comme on trouve

$$f(1) = 4, \quad f'(1) = 4, \quad \frac{f''(1)}{1.2} = 5, \quad \frac{f'''(1)}{1.2.3} = 7, \quad \frac{f^{IV}(1)}{1.2.3.4} = 5,$$

$$F_1(1) = 2, \quad F_1'(1) = 3, \quad \frac{F_1''(1)}{1.2} = 1,$$

il reste à effectuer la division indiquée :

$$\begin{array}{l|l} 4 + 4X + 5X^2 + 7X^3 + 5X^4 & 2 + 3X + X^2 \\ \quad - 6X - 2X^2 & \hline 2 - X + 3X^2 \\ \hline - 2X + 3X^2 + 7X^3 + 5X^4 & \\ \quad + 3X^2 + X^3 & \\ \hline 6X^2 + 8X^3 + 5X^4 & \\ \quad - 9X^3 - 3X^4 & \\ \hline - X^3 + 2X^4 & \end{array}$$

Le quotient obtenu équivaut à $A_0 + A_1 X + A_2 X^2$. On a donc immédiatement

$$A_0 = 2, \qquad A_1 = -1, \qquad A_2 = 3.$$

Le reste de la division est (1549)

$$-(x-1)^3 + 2(x-1)^4 = (x-1)^3 f_1(x),$$

et il en résulte

$$f_1(x) = 2x - 3.$$

Par suite,

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{2x-3}{(x+1)x} = \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x}.$$

En formant le quotient

$$\frac{f_1(x)}{F_1'(x)} = \frac{2x-3}{2x+1}$$

et en mettant successivement -1 et 0 à la place de x, nous aurons

$$B = \frac{-5}{-1} = 5, \qquad C = -3$$

Il viendra donc finalement

$$\frac{5x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 5x - 3}{(x-1)^3(x+1)x} = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{3}{x}.$$

Les formules (3) du n° 1555 conduiraient au même résultat.

1560. 5° *Soit à décomposer la fraction rationnelle*

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}.$$

L'équation $F(x) = 0$ présente ici deux racines réelles inégales (0 et -1) et deux racines imaginaires conjuguées ($+i$ et $-i$), qui sont doubles. On pourrait opérer par voie de division, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, ou encore suivre la marche indiquée au n° 1509 relativement aux racines imaginaires multiples. On peut aussi, moins régulièrement, mais plus rapidement, se servir directement et sans algorithme spécial de la méthode des coefficients indéterminés. D'après la formule générale du n° 1553, nous écrirons

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_0 x + N_0}{(x^2+1)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+1}.$$

En chassant les dénominateurs, on doit avoir identiquement

$$1 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B\,x(x^2+1)^2 + (M_0 x + N_0)(x^2+x) + (M_1 x + N_1)(x^2+1)(x^2+x).$$

Si l'on suppose successivement $x = 0$ et $x = -1$, on trouve

$$A = 1 \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{1}{4}.$$

Égalons maintenant les coefficients des quatre premières puissances de x dans les deux membres, en admettant qu'on ait ordonné le second membre suivant les puissances décroissantes de x. Il viendra

$$A + B + M_1 = 0, \qquad A + M_1 + N_1 = 0,$$
$$2A + 2B + M_0 + M_1 + N_1 = 0. \qquad 2A + M_0 + N_0 + M_1 + N_1 = 0.$$

Connaissant A et B, ces quatre relations d'identité donnent immédiatement et successivement

$$M_1 = -\frac{3}{4}, \qquad N_1 = -\frac{1}{4}, \qquad M_0 = -\frac{1}{2}, \qquad N_0 = -\frac{1}{2},$$

et l'on a finalement

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{4(x^2+1)}.$$

Intégration des fractions rationnelles.

1561. La décomposition des fractions rationnelles permet de trouver plus facilement leurs dérivées successives ; elle permet aussi d'effectuer leur développement en série. Mais le but principal poursuivi par cette décomposition concerne l'intégration des différentielles correspondantes.

Nous allons indiquer succinctement les résultats fournis par cette intégration.

D'après ce qui précède, on a seulement *quatre cas* à examiner, puisque l'intégrale d'une somme algébrique de différentielles est la somme algébrique de leurs intégrales respectives.

1° et 2° Les deux premiers cas n'ont besoin d'aucun développement, et l'intégration est immédiate.

S'il s'agit de *racines réelles inégales*, on a (1545)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

et, par suite,

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + \int \frac{C\,dx}{x-c} + \dots$$
$$= A\,l(x-a) + B\,l(x-b) + C\,l(x-c) + \dots.$$

S'il s'agit de *racines réelles multiples*, on a (1549)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \dots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \dots$$

et, par suite (775),

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{A_0\,dx}{(x-a)^n} + \dots + \int \frac{B_0\,dx}{(x-b)^p} + \dots$$
$$= -\frac{1}{n-1}\frac{A_0}{(x-a)^{n-1}} - \dots - \frac{1}{p-1}\frac{B_0}{(x-b)^{p-1}} - \dots$$

1562. 3° Considérons maintenant le cas de *deux racines imaginaires simples conjuguées*. Il s'agit alors (1548) d'intégrer une différentielle de la forme

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx.$$

Posons $x-\alpha = z$, d'où $x = z+\alpha$ et $dx = dz$. Il en résulte

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{Mz+M\alpha+N}{z^2+\beta^2}\,dz$$
$$= \frac{Mz\,dz}{z^2+\beta^2} + \frac{(M\alpha+N)\,dz}{z^2+\beta^2}.$$

Mais (1019)

$$\int \frac{Mz\,dz}{z^2+\beta^2} = \frac{M}{2}\,l(z^2+\beta^2),$$
$$\int \frac{(M\alpha+N)\,dz}{z^2+\beta^2} = \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{\beta}.$$

On a donc, en revenant à la variable x,

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{M}{2}\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

1563. 4° Considérons enfin le cas des *racines imaginaires conjuguées multiples*. On a alors (1551) à intégrer une différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx.$$

Elle revient à la somme (1020)

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{M}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{(\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

On a d'abord (1020), pour le premier terme,

$$\int\frac{\mathrm{M}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}=-\frac{\mathrm{M}}{2(n-1)}\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}.$$

Pour intégrer le second terme de la somme, nous poserons cette fois, pour simplifier l'écriture, $x-\alpha=\beta z$, d'où $dx=\beta\,dz$. Il viendra ainsi

$$\frac{(\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}=\frac{\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N}}{\beta^{2n-1}}\frac{dz}{(z^2+1)^n}.$$

Tout revient donc à l'intégration de la différentielle

$$\frac{dz}{(z^2+1)^n}.$$

Or on a identiquement

$$\frac{1}{(z^2+1)^n}=\frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}}-\frac{z^2}{(z^2+1)^n}.$$

Il en résulte

$$(2)\qquad \int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Mais (1019)

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int z\,\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^n}$$

et

$$\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^n}=d\left[-\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}}\right].$$

Par suite, on peut écrire

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int z\,.\,d\left[-\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}}\right].$$

Il vient donc, en intégrant par parties (1020),

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = -\frac{z}{2n-2}\,\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

et, en substituant dans la relation (2) et en réduisant,

$$(3)\qquad \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2n-2}\,\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

La recherche de la première intégrale est ainsi ramenée à celle d'une seconde intégrale toute pareille, où l'exposant n est seulement diminué d'une unité. La même réduction aura donc lieu pour celle-ci; et, comme n est un nombre entier, on parviendra finalement à l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^2+1}$$

dont la valeur est arc tang z. La question sera donc complètement résolue.

On trouve, en partant de la relation (3) et en remplaçant successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 2,

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2n-2}\,\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} = \frac{z}{2n-4}\,\frac{1}{(z^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}} = \frac{z}{2n-6}\,\frac{1}{(z^2+1)^{n-3}} + \frac{2n-7}{2n-6}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-3}},$$

.....

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2}\,\frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}.$$

En ajoutant ces $n-1$ équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par les facteurs

$$1,\quad \frac{2n-3}{2n-2},\quad \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)},\quad \ldots,\quad \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots 4}$$

il vient, après réduction,

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \times \left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \dots + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\dots 3}{(2n-4)(2n-6)(2n-8)\dots 2}(z^2+1)^{n-2}\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\dots 3.1}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\dots 4.2} \operatorname{arc\,tang} z.$$

En multipliant ce résultat par $\frac{M\alpha + N}{\beta^{2n-1}}$ et en remplaçant z par $\frac{x-\alpha}{\beta}$, on aura donc l'intégrale de la seconde partie de la somme (1).

Dans les calculs numériques, on aura soin de ne pas oublier la constante arbitraire qui doit accompagner toute intégrale indéfinie.

1564. On peut remarquer que, lorsqu'on emploie les simplifications qui font disparaître les imaginaires, l'intégrale d'une différentielle rationnelle s'exprime toujours par des fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires.

Exemple.

1565. Appliquons ce qui précède à la fonction rationnelle

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2},$$

que nous avons décomposée au n° 1560, et pour laquelle nous avons trouvé

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{4(x^2+1)}.$$

On aura

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{4(x+1)} - \int \frac{(x+1)\,dx}{2(x^2+1)^2} - \int \frac{(3x+1)\,dx}{4(x^2+1)}.$$

Il viendra successivement

$$\int \frac{dx}{x} = lx; \qquad \int \frac{dx}{4(x+1)} = \frac{1}{4} l(x+1);$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{2(x^2+1)^2} = \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tang} x;$$

enfin,

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+1} = \int \frac{3x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2} l(x^2+1) + \operatorname{arc\,tang} x,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{4(x^2+1)} = \frac{3}{8} l(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tang} x.$$

Par suite, on a, en tenant compte des signes et en réunissant les fonctions de même espèce,

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x}{4(x^2+1)} + lx - \frac{1}{4} l(x+1) - \frac{3}{8} l(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x + C.$$

Retour à la formule d'interpolation de Lagrange.

1566. Il n'est pas inutile de montrer que la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, dans le cas où toutes les racines du dénominateur égalé à zéro sont inégales, conduit très simplement à la formule d'interpolation de Lagrange (1522).

Il s'agit de trouver approximativement les valeurs d'une fonction u de x, lorsqu'on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, qu'elle prend pour $n+1$ valeurs quelconques $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, ou de trouver la fonction entière $f(x)$, *de degré n*, qui peut la remplacer approximativement, et qui est alors complètement déterminée par les $n+1$ valeurs

$$u_0 = f(x_0), \quad u_1 = f(x_1), \quad u_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad u_n = f(x_n).$$

Posons

$$(1) \qquad F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n);$$

$F(x)$ sera de degré $n+1$, et l'on aura (1084)

$$(2) \quad F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_0} + \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{F(x)}{x - x_n}.$$

k étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., n, si l'on fait, dans cette identité, $x = x_k$, le seul terme qui ne s'annule pas dans le second membre est celui dont le dénominateur devient $x_k - x_k$. En simplifiant ce terme, on a donc, d'une manière générale,

$$F'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n).$$

D'ailleurs, le degré de $F(x)$ surpassant d'une unité celui de la fonction cherchée $f(x)$, on a, d'après la décomposition des fractions rationnelles et la détermination des numérateurs des fractions simples (1545),

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}\,\frac{1}{x - x_0} + \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\,\frac{1}{x - x_1} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}\,\frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\,\frac{1}{x - x_n}$$

ou, en chassant le dénominateur $F(x)$ et en tenant compte de la relation (3),

$$\begin{aligned} f(x) = {} & u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\dots(x_0 - x_n)} \\ & + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + u_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien ainsi la formule de Lagrange.

Réciproquement, en partant de cette formule, on pourrait obtenir celle de la décomposition des fractions rationnelles dans le cas considéré.

Des séries récurrentes.

1567. Les séries *récurrentes* ont une liaison intime avec les fractions rationnelles. Nous terminerons donc ce Chapitre par leur étude succincte.

Toute progression par quotient indéfiniment décroissante constitue une série convergente ayant pour limite le premier terme a de la progression divisé par l'excès $1 - q$ de l'unité sur la raison.

Réciproquement, en effectuant la division de a par $1 - q$, on retrouve la série comme quotient illimité. On est donc naturellement conduit à examiner les séries au point de vue du développement par voie de division d'une fraction quelconque.

La fraction $\frac{a'}{a + bx}$ ne donnera pas autre chose que la fraction $\frac{a}{1 - q}$; car, en divisant ses deux termes par a, on la ramène à la même forme. La raison de la progression par quotient sera ici $-\frac{bx}{a}$.

Prenons la fraction

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}.$$

La division du numérateur par le dénominateur montre que le quotient est de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots.$$

On peut donc poser

$$\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

et employer, pour déterminer A, B, C, D, ..., la méthode des coefficients indéterminés.

En chassant le dénominateur et en effectuant, nous aurons, par un calcul régulier,

$$\begin{array}{rl|l|l|l} a' + b'x = & Aa + & Bx + & Cx^2 + & Dx^3 + \dots. \\ & Ab & Ba & Ca & Da \\ & & Bb & Cb & Db \\ & & Ac & Bc & Cc \end{array}$$

En identifiant les deux membres, il vient

$$Aa = a', \qquad Ba + Ab = b', \qquad Ca + Bb + Ac = 0,$$
$$Da + Cb + Bc = 0, \qquad \dots.$$

Il en résulte

$$A = \frac{a'}{a}, \qquad B = \frac{B' - Ab}{a}, \qquad C = -\frac{c}{a}A - \frac{b}{a}B,$$
$$D = -\frac{c}{a}B - \frac{b}{a}C. \qquad \dots.$$

Donc, *à partir du troisième terme du développement,* chaque coefficient est la somme des deux précédents multipliés respectivement par $-\frac{c}{a}$ et par $-\frac{b}{a}$, c'est-à-dire que chaque terme est lui-même la somme des deux précédents multipliés respectivement par $-\frac{c}{a}x^2$ et par $-\frac{b}{a}x$. Ainsi, chaque terme dépend des *deux* précédents, la loi ne s'applique pas aux *deux* premiers termes, et le dénominateur de la fraction est du *second degré* en x.

Considérons encore la fraction

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}.$$

En la développant de la même façon, on s'assure que chaque terme du développement, *à partir du quatrième,* est la somme des trois précédents multipliés respectivement par $-\frac{d}{a}x^3$, $-\frac{c}{a}x^2$, $-\frac{b}{a}x$. Ici, chaque terme dépend des *trois* précédents, la loi ne s'applique pas aux *trois* premiers termes, et le dénominateur de la fraction est du *troisième degré* en x....

D'une manière générale, toute fraction de la forme

$$\frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^{m-1}}{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^m}, \tag{1}$$

c'est-à-dire *toute fraction rationnelle* [telle que nous les avons définies (1344)] engendre un développement dans lequel chaque terme, à partir du $(m+1)^{\text{ième}}$, est la somme des m précédents multipliés respectivement par $-\frac{k}{a}x^m$, $-\frac{h}{a}x^{m-1}$, ..., $-\frac{c}{a}x^2$, $-\frac{b}{a}x$. Le dénominateur étant du $m^{\text{ième}}$ degré en x, la loi ne s'applique pas aux m premiers termes.

A cause de la relation constante qui existe entre un même nombre de termes consécutifs pris n'importe où dans le développement (sauf la réserve indiquée), on donne aux séries ainsi obtenues, et qui sont ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable x, le nom de SÉRIES RÉCURRENTES (1). L'ensemble des quantités par lesquelles il faut multiplier les coefficients des termes précédents pour trouver le coefficient du terme qu'on cherche constitue l'*échelle de relation* de la série, et le nombre de ces quantités représente, si l'on veut, l'*ordre* de la série récurrente.

(1) *Récurrent,* qui remonte vers son origine.

La série qui répond à la fraction (1) a pour échelle de relation la suite

$$-\frac{k}{a},\quad -\frac{h}{a},\quad \ldots,\quad -\frac{c}{a},\quad -\frac{b}{a},$$

et elle est du $m^{\text{ième}}$ ordre.

Il faut remarquer que les m premiers termes du développement échappant à la relation constante qui caractérise la série, ces termes peuvent se former d'après des lois très diverses. On doit avoir soin, en raison de ce qui précède, de ne pas étendre ces lois à toute la série.

1568. Lorsqu'on effectue, comme on vient de l'indiquer, le développement d'une fraction rationnelle, ce développement étant toujours équivalent au quotient du numérateur par le dénominateur, il faut nécessairement le compléter par la fraction qui a pour numérateur le reste auquel on s'arrête, et pour dénominateur, le diviseur. On ne peut supprimer cette fraction complémentaire, que si l'on a établi qu'elle a pour limite zéro quand on prolonge le quotient ou la série indéfiniment. C'est ce qui a lieu d'ailleurs lorsqu'on n'attribue à la variable x que des valeurs suffisamment petites et, dans tous les cas, moindres que l'unité. Le développement représente alors une série convergente.

1569. En laissant de côté toute considération relative aux fractions rationnelles, soit une série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

ordonnée par rapport aux puissances entières et croissantes de la variable x. Pour qu'elle soit *récurrente* (1567), il faut que, pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, le coefficient A_n de x^n soit une même fonction linéaire des coefficients précédents ou des coefficients des puissances inférieures de x, pris toujours en même nombre quel que soit n. Si l'on désigne ce nombre fixe par m, on devra donc avoir identiquement, en désignant par α_0, α_1, α_2, ..., α_m des quantités constantes,

$$\alpha_0 A_{n-m} + \alpha_1 A_{n-m+1} + \ldots + \alpha_{m-1} A_{n-1} + \alpha_m A_n = 0.$$

L'*échelle de relation* de la série récurrente sera alors

$$-\frac{\alpha_0}{\alpha_m},\quad -\frac{\alpha_1}{\alpha_m},\quad -\frac{\alpha_2}{\alpha_m},\quad \ldots,\quad -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Les deux théorèmes suivants établissent la liaison entre les séries récurrentes définies directement et les fractions rationnelles.

1570. I. *Lorsqu'une série récurrente, ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable x, est convergente, elle a pour limite ou pour somme une fraction rationnelle.*

Soit S la somme de la série récurrente

$$(1) \qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

supposée convergente. La relation (1569)

$$(2) \qquad \alpha_0 A_{n-m} + \alpha_1 A_{n-m+1} + \ldots + \alpha_{m-1} A_{n-1} + \alpha_m A_n = 0$$

sera satisfaite pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, m étant un nombre fixe.

Posons alors

$$(3) \qquad F(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m,$$

et multiplions la série (1) par le polynôme (3). Chaque produit partiel [c'est-à-dire la série (1) multipliée par l'un des termes du polynôme multiplicateur] représentera une série convergente. Le produit total, somme de $m+1$ séries convergentes, sera une série convergente dont la somme sera représentée par le produit $S.F(x)$. Mais, si l'on ordonne cette dernière série suivant les puissances croissantes de x, comme on a

$$\begin{aligned}
&A_{n-m} x^{n-m} \times \alpha_0 x^m = \alpha_0 A_{n-m} x^n, \\
&A_{n-m+1} x^{n-m+1} \times \alpha_1 x^{m-1} = \alpha_1 A_{n-m+1} x^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&A_n x^n \times \alpha_m = \alpha_m A_n x^n,
\end{aligned}$$

on voit que le coefficient de x^n sera précisément le premier membre de la relation (2). Ce premier membre étant nul par hypothèse pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, il s'ensuit que la série dont la somme est $S.F(x)$ est composée d'un nombre fini de termes. Elle équivaut donc à un polynôme $f(x)$, et l'on a

$$S.F(x) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{f(x)}{F(x)}.$$

1571. II. Réciproquement, *lorsqu'on peut développer une fraction rationnelle en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable x, cette série convergente est récurrente.*

Admettons qu'on puisse développer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x et qui soit convergente pour des valeurs convenables de cette variable. On aura

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Posons, en même temps,

$$(2) \qquad F(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m.$$

Le produit de la série (1) par le polynôme (2) sera (1570) une série convergente ayant pour somme le produit

$$\frac{f(x)}{F(x)} F(x) = f(x).$$

La nouvelle série convergente ainsi obtenue aura donc un nombre fini de termes, et le coefficient de x^n dans le produit considéré devra, pour toutes les valeurs de n surpassant une certaine limite, se réduire à zéro On aura donc, pour toutes ces valeurs de n (1570),

$$\alpha_0 A_{n-m} + \alpha_1 A_{n-m+1} + \ldots + \alpha_{m-1} A_{n-1} + \alpha_m A_n = 0,$$

et la série (1) est alors récurrente (1569).

1572. Cherchons à développer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ suivant les puissances croissantes de la variable x.

Soit

$$F(x) = (x-a)^n (x-b)^p \ldots.$$

On aura (1549)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A}{(x-a)^k} + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{B}{(x-b)^l} + \ldots.$$

On voit qu'on a à développer en série par la formule du binôme une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^k}.$$

Or, on peut écrire

$$\frac{A}{(x-a)^k} = \frac{A(-1)^k}{a^k \left(1 - \frac{x}{a}\right)^k} = \frac{A(-1)^k}{a^k} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k}.$$

Et, pour qu'on puisse appliquer la formule du binôme et obtenir une série convergente, il faut (902) que le module de x soit moindre que celui de a ou que le module de $\frac{x}{a}$ soit moindre que l'unité. On a alors, comme développement de la fraction simple dont il s'agit,

$$\frac{A(-1)^k}{a^k} \left[1 + k\frac{x}{a} + \frac{k(k+1)}{1.2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} \frac{x^3}{a^3} + \ldots\right].$$

Les autres fractions simples se développeront également en séries con-

vergentes, pour toutes les valeurs de x dont le module restera inférieur à celui de la racine de $F(x) = 0$ qui a le plus petit module; et, en ajoutant toutes ces séries convergentes, on aura le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$ en série convergente et, par conséquent, récurrente (1571).

Le terme général de la série sera

$$x^m \sum (-1)^k \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)}{1.2.3\ldots m} \frac{A}{a^{k+m}}.$$

Si toutes les racines de $F(x) = 0$ étaient inégales, il deviendrait (1545)

$$-x^m \sum \frac{f(a)}{a^{m+1} F'(a)}.$$

1573. Si le module de x est, au contraire, plus grand que celui de a ou si le module de $\frac{x}{a}$ est supérieur à l'unité, on remarque que celui de $\frac{a}{x}$ est inférieur à l'unité, et l'on écrit

$$\frac{A}{(x-a)^k} = \frac{A}{x^k \left(1 - \frac{a}{x}\right)^k} = \frac{A}{x^k} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-k}.$$

Le développement de la fraction simple considérée devient alors possible en série convergente, et l'on a pour ce développement

$$\frac{A}{x^k}\left[1 + k\frac{a}{x} + \frac{k(k+1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3} + \ldots\right],$$

de sorte qu'il a lieu suivant les puissances *décroissantes* de la variable x.

Les autres fractions simples se développeront également en séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de la variable, pour toutes les valeurs de x dont le module restera supérieur à celui de la racine de $F(x) = 0$ qui a le plus grand module; et, en ajoutant toutes ces séries, on aura le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$ en série convergente *ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable*. Cette série n'en reste pas moins récurrente (1571). Pour le voir, il suffira de remplacer x par $\frac{1}{y}$.

1574. Il est clair que, si l'on donne à x une valeur telle que son module soit compris entre le plus petit et le plus grand des modules des racines de $F(x) = 0$, le développement de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ se composera de deux séries convergentes, l'une ordonnée suivant les puissances croissantes, l'autre suivant les puissances décroissantes de la variable.

1575. On peut réunir en un seul énoncé tous les résultats précédents.

Toute fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ *peut être développée en série convergente et, par conséquent, récurrente, ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable* x, *selon que le module de la valeur de* x *est inférieur ou supérieur au plus petit ou au plus grand des modules des racines de* $F(x) = 0$. *Pour toute valeur intermédiaire du module de* x, *le développement de la fraction rationnelle est à la fois ascendant et descendant par rapport aux puissances de la variable.*

1576. *Lorsqu'on sait qu'une série est récurrente, on peut trouver la somme* S_n *de ses* n *premiers termes* par un procédé dû à THOMAS SIMPSON.

Soit la série récurrente

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + \ldots.$$

Supposons, pour fixer les idées, que son échelle de relation soit composée de trois quantités, c'est-à-dire que chacun de ses termes, à partir du quatrième, dépende seulement des trois précédents. Bien que nous considérions un cas particulier, notre raisonnement nous conduira à une solution générale.

D'après la définition des séries récurrentes (1569), et l'échelle de relation étant $-\frac{\alpha}{\delta}, -\frac{\beta}{\delta}, -\frac{\gamma}{\delta}$, nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4 = 0, \\ \alpha u_2 + \beta u_3 + \gamma u_4 + \delta u_5 = 0, \\ \alpha u_3 + \beta u_4 + \gamma u_5 + \delta u_6 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha u_{n-3} + \beta u_{n-2} + \gamma u_{n-1} + \delta u_n = 0. \end{cases}$$

En faisant la somme de ces équations, on trouve évidemment

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha(S_n - u_{n-2} - u_{n-1} - u_n) + \beta(S_n - u_1 - u_{n-1} - u_n) \\ \quad + \gamma(S_n - u_1 - u_2 - u_n) + \delta(S_n - u_1 - u_2 - u_3) = 0. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement

$$(3)\quad S_n = \frac{\alpha(u_{n-2} + u_{n-1} + u_n) + \beta(u_1 + u_{n-1} + u_n) + \gamma(u_1 + u_2 + u_n) + \delta(u_1 + u_2 + u_3)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

L'échelle de relation contenant *trois* quantités, la somme S_n ne dépend que de ces quantités, en même temps que des *trois premiers* et des *trois derniers termes* de la somme cherchée.

D'une manière générale, si l'échelle de relation contient m quantités, la somme S_n ne dépendra, quel que soit n, que de ces quantités, ainsi que de ses m premiers et de ses m derniers termes.

1577. Si la série récurrente est supposée convergente, la formule (3) [1576] permet de trouver sa limite ou sa somme totale S. Il suffit de se rappeler que, la série étant convergente, on a $\lim u_n = 0$ pour $n = \infty$. La formule (3) deviendra donc, en supposant toujours que l'échelle de relation contient trois quantités,

$$(4) \qquad S = \frac{\beta u_1 + \gamma(u_1 + u_2) + \delta(u_1 + u_2 + u_3)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

D'une manière générale, si l'échelle de relation contient m quantités, la somme S de la série convergente et récurrente ne dépendra que de ces quantités et des m premiers termes de la série, suivant la loi indiquée par la formule (4).

1578. Si la série considérée est ordonnée suivant les puissances d'une même variable x, sa somme S sera une fonction rationnelle de x.

En effet, les équations (1) [1576], posées d'après l'échelle de relation, permettent de déterminer les quantités α, β, γ, δ, ... en fonction des termes u_1, u_2, u_3, u_4, ... de la série. Ces quantités, puisqu'il s'agit d'équations du premier degré, seront donc des fonctions rationnelles des termes u_1, u_2, u_3, u_4, ..., c'est-à-dire de la variable x; et il en sera de même de la somme S, d'après la formule (4) généralisée.

On retrouve ainsi la proposition du n° 1570.

Soit, par exemple, la série récurrente

$$1 + x + x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 9x^5 + 17x^6 + \ldots,$$

dont l'échelle de relation est (1569)

$$-\frac{\alpha}{\delta} = x^3, \qquad -\frac{\beta}{\delta} = x^2, \qquad -\frac{\gamma}{\delta} = x,$$

et qui est évidemment convergente pour x suffisamment petit. On aura, pour sa somme (1577),

$$S = \frac{\frac{\beta}{\delta} u_1 + \frac{\gamma}{\delta}(u_1 + u_2) + (u_1 + u_2 + u_3)}{\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} + 1},$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

En développant cette fraction par voie de division, on retombe bien sur la série proposée.

1579. Il resterait encore à montrer comment on peut essayer de *reconnaître si une série donnée est récurrente*. Nous renverrons sur ce point délicat aux *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1772, où LAGRANGE a exposé, pour résoudre cette question, une ingénieuse méthode.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ.

Indications préliminaires.

1580. On entend, en général, par théorie des *formes algébriques* la théorie des fonctions homogènes d'un nombre quelconque de variables, le mot *forme* ne signifiant pas autre chose qu'un polynôme homogène.

Le théorème démontré précédemment sous le nom de *théorème des fonctions homogènes* (793, 794) est une propriété très importante des fonctions homogènes de tous les degrés.

Les formes sont *linéaires, quadratiques, cubiques, biquadratiques, ...*, suivant qu'elles sont du premier, du second, du troisième, du quatrième degré, ... On les appelle encore *binaires, ternaires, quaternaires, ...*, suivant qu'elles renferment deux, trois, quatre variables, ...

Nous nous occuperons spécialement, dans ce dernier Chapitre, des formes quadratiques ou des propriétés des polynômes homogènes du second degré. Ces propriétés sont utiles dans un grand nombre de circonstances et, notamment, au point de vue de la discussion des courbes et des surfaces du second ordre. C'est ce qui nous a engagé à reporter leur étude à la fin de l'*Algèbre supérieure*. Nous verrons en Géométrie analytique la liaison étroite qui existe entre les figures planes et les formes quadratiques ternaires, ainsi qu'entre les figures de l'espace et les formes quadratiques quaternaires.

Nous commencerons par rappeler ou par établir quelques propriétés des fonctions linéaires homogènes, qui nous seront nécessaires.

Des systèmes de fonctions linéaires et homogènes.

1581. On sait que toute fonction entière du premier degré contenant un certain nombre de variables est une fonction *linéaire* de ces variables. Elle est *homogène,* lorsqu'elle ne renferme pas de terme constant, et devient alors une *forme linéaire.*

Lorsqu'on remplace les variables, dans une fonction homogène de degré quelconque, par des fonctions linéaires homogènes d'autres variables, on dit qu'on exécute une *substitution linéaire homogène.*

Lorsqu'on a plusieurs formes linéaires des variables, toute forme linéaire obtenue en les multipliant par des quantités constantes qui ne soient pas toutes nulles et en ajoutant les produits est une *combinaison linéaire* de ces formes.

Les fonctions linéaires homogènes, considérées ainsi, peuvent être linéairement *dépendantes* ou *indépendantes.*

Elles sont *dépendantes,* lorsqu'on peut former une combinaison linéaire de ces fonctions qui, pour toutes les valeurs des variables, soit identiquement nulle. Elles sont *indépendantes,* dans le cas contraire.

Nous allons chercher les conditions de dépendance de formes linéaires données, suivant le nombre des variables qu'elles contiennent, comparé à celui des formes.

1582. *Lorsque le nombre des formes linéaires surpasse celui des variables qu'elles renferment, ces formes sont nécessairement dépendantes.*

Supposons n formes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m [n > m]$.

Il faut prouver qu'il existe des valeurs des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, qui ne soient pas toutes nulles à la fois, et telles qu'on ait (pour toutes les valeurs des variables)

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots \\ + \lambda_n f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{array} \right.$$

Or, en ordonnant cette équation de condition par rapport aux m variables et en égalant séparément à zéro les coeffi-

cients de ces variables, on obtient m équations homogènes à n inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Comme n surpasse m, toutes les inconnues ne peuvent pas être *principales*, et le système obtenu est indéterminé (403) [l'indétermination est de l'ordre $n - m$ (393)]. Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pourront donc recevoir une infinité de valeurs simultanées différentes de zéro, par lesquelles l'identité (1) sera satisfaite.

1583. *Lorsque le nombre des formes linéaires est égal à celui des variables qu'elles renferment, ces formes ne peuvent être dépendantes que si leur déterminant est identiquement nul.*

[Lorsqu'on a autant de formes que de variables, le déterminant des formes est celui des coefficients des variables dans ces formes.]

En opérant comme ci-dessus (1582), on a autant d'équations homogènes que d'inconnues (λ), et il suffit de se reporter au n° 404. Si le déterminant des coefficients des variables est nul, toutes les inconnues ne peuvent être principales, et leurs valeurs sont indéterminées. Si, au contraire, le déterminant des formes est différent de zéro, les inconnues (λ) ne peuvent recevoir que la valeur zéro.

1584. *Supposons,* enfin, *que le nombre des formes linéaires soit inférieur à celui des variables,* qu'il y ait, par exemple, n formes et m variables [$n < m = n + p$].

On pourra alors, en regardant p variables *quelconques* comme constantes, calculer le déterminant d'ordre n des coefficients des n variables restantes dans les formes proposées. On trouvera autant de ces déterminants qu'on peut supprimer de fois (avec changement) p objets parmi $n + p$ objets, ou autant qu'il existe de combinaisons de $n + p$ objets pris n à n.

Cela posé, *pour que les n formes linéaires considérées soient dépendantes, il faut et il suffit que les déterminants dont nous venons de parler soient tous nuls.*

En effet, en opérant comme ci-dessus (1582), on obtient m équations homogènes contenant n inconnues $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$. Comme n est inférieur à m, toutes les inconnues peuvent être ou non principales, c'est-à-dire que le système peut être

déterminé ou indéterminé (403). Si tous les déterminants du $n^{\text{ième}}$ ordre dont nous venons d'indiquer la loi de formation sont nuls, les n inconnues resteront toujours indéterminées (404); et il est clair que les valeurs qu'on choisira pour elles satisferont aux m équations posées ou à l'identité (1) [1482]. *Il n'en serait plus ainsi si un seul des déterminants considérés n'était pas nul.*

Supposons, pour fixer les idées, $n = 3$ et $m = 5$. On aura

$$f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5,$$
$$f_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5,$$
$$f_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5.$$

Pour satisfaire à l'identité (1) [1482], il faut trouver, pour les quantités λ_1, λ_2, λ_3, des valeurs non nulles satisfaisant, quelles que soient les valeurs des variables, aux équations

$$(1) \qquad a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 = 0,$$
$$(2) \qquad a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 = 0,$$
$$(3) \qquad a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 = 0,$$
$$(4) \qquad a_4\lambda_1 + b_4\lambda_2 + c_4\lambda_3 = 0,$$
$$(5) \qquad a_5\lambda_1 + b_5\lambda_2 + c_5\lambda_3 = 0.$$

Or, si les dix déterminants du troisième ordre obtenus pour les coefficients des inconnues λ_1, λ_2, λ_3, en supprimant chaque fois deux des cinq équations de condition, sont tous nuls, les mêmes valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 pourront satisfaire simultanément à ces équations.

Par exemple, si l'on rapproche le système (1, 2, 3) et le système (1, 2, 4), qui ne diffèrent que par une équation, les déterminants des deux systèmes étant nuls, on aura, pour le premier système comme pour le second (*Alg. élém.*, 191)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2},$$

de sorte que, si l'on choisit de part et d'autre la même valeur pour λ_3, les valeurs de λ_1 et de λ_2 seront aussi communes; etc.

Propriétés fondamentales des polynômes homogènes du second degré.

1585. Lorsqu'un polynôme homogène du second degré renferme n variables et est *complet*, le nombre de ses termes est

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

En effet, il doit renfermer alors (*Alg. élém.*, 224) la somme des carrés de tous ses termes et la double somme de leurs produits deux à deux, c'est-à-dire n carrés et $\frac{n(n-1)}{2}$ produits des variables (221).

1586. On représente souvent les n variables de la forme quadratique par $x_1, x_2, \ldots, x_n$; le coefficient d'un carré tel que x_i^2, par $a_{i,i}$; le coefficient d'un produit tel que $x_i x_j$, par $2a_{i,j}$ ou $2a_{j,i}$, *indifféremment*.

Toute forme quadratique f ou tout polynôme homogène du second degré à n variables aura alors pour expression

$$f = \sum a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum a_{i,j} x_i x_j$$

(en faisant varier i et j de 1 à n) ou, plus simplement,

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x_i x_j,$$

en convenant de former tous les arrangements deux à deux avec répétition (257) des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et en tenant compte de l'identité $a_{i,j} = a_{j,i}$, de sorte qu'on aura

$$a_{i,j} x_i x_j + a_{j,i} x_j x_i = 2 a_{i,j} x_i x_j.$$

On trouve de cette manière, dans le cas de deux variables, en faisant varier i et j de 1 à 2,

$$f = a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2;$$

et, dans celui de trois variables, en faisant varier i et j de 1 à 3,

$$f = a_{1,1} x_1^2 + a_{2,2} x_2^2 + a_{3,3} x_3^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + 2 a_{1,3} x_1 x_3 + 2 a_{2,3} x_2 x_3.$$

On écrit plus rapidement, surtout en *Géométrie analytique*, dans le cas de deux variables et dans celui de trois variables,

$$f = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2,$$

$$f = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy.$$

1587. Considérons la fonction que nous venons de définir

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{1}$$

et désignons par $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n$ n nouvelles variables. Si l'on pose alors [les quantités (α) étant des constantes arbitraires] les relations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{1,1}\mathrm{X}_1 + \alpha_{1,2}\mathrm{X}_2 + \ldots + \alpha_{1,n}\mathrm{X}_n, \\ x_2 = \alpha_{2,1}\mathrm{X}_1 + \alpha_{2,2}\mathrm{X}_2 + \ldots + \alpha_{2,n}\mathrm{X}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_{n,1}\mathrm{X}_1 + \alpha_{n,2}\mathrm{X}_2 + \ldots + \alpha_{n,n}\mathrm{X}_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

et si l'on transporte ces valeurs dans f, on opère (1581) une substitution linéaire homogène. L'expression (1) devient une fonction F des nouvelles variables, qui contient celles-ci de la même manière que f contient les variables primitives. Cette fonction F est la *transformée* de f par *substitution linéaire*. Le déterminant des coefficients de la substitution linéaire représentée par les équations (2), c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix},$$

est le *module de la substitution*.

Les coefficients $\mathrm{A}_{i,j}$ de F sont évidemment des fonctions entières des coefficients de f et des constantes $\alpha_{i,j}$ de la substitution linéaire, et l'on peut poser

$$\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{i,j}\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j,$$

expression où l'on doit supposer encore $\mathrm{A}_{i,j} = \mathrm{A}_{j,i}$.

Si le déterminant ou le module de la substitution linéaire n'est pas nul, on peut (384 et suiv.) résoudre les équations (2)

par rapport aux nouvelles variables (X) qui sont ainsi des fonctions linéaires homogènes des variables primitives (x). Dans ce cas, les fonctions f et F pourront se déduire indifféremment l'une de l'autre par une substitution linéaire. Nous allons démontrer à ce sujet une importante relation.

1588. Notre raisonnement étant général, considérons seulement, pour simplifier, trois variables x, y, z, et posons

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\,\mathrm{X} + b\,\mathrm{Y} + c\,\mathrm{Z}, \\ y = a_1\mathrm{X} + b_1\mathrm{Y} + c_1\mathrm{Z}, \\ z = a_2\mathrm{X} + b_2\mathrm{Y} + c_2\mathrm{Z}. \end{cases}$$

Nous passerons ainsi de la fonction $f(x, y, z)$ à la fonction $\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, et le module M de la substitution sera

$$(2)\qquad \mathrm{M} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

M n'étant pas nul, X, Y, Z seront, d'après ce qu'on vient de voir (1587), des fonctions linéaires homogènes de x, y, z comme x, y, z sont des fonctions linéaires homogènes de X, Y, Z.

Désignons maintenant par U, V, T trois fonctions des mêmes variables x, y, z; ces fonctions seront alors des fonctions de fonctions par rapport à X, Y, Z. On aura d'abord (868)

$$d\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\,dy + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\,dz.$$

Si l'on divise les deux membres de cette égalité par dX, le premier membre devient la *dérivée partielle* de U par rapport à X (738); dans le second membre, $\frac{dx}{d\mathrm{X}}$, $\frac{dy}{d\mathrm{X}}$, $\frac{dz}{d\mathrm{X}}$ sont les dérivées partielles de x, y, z par rapport à X, dérivées partielles dont les valeurs sont a, a_1, a_2, d'après les équations (1). On aura donc

$$\mathrm{U}'_{\mathrm{X}} = a\,\mathrm{U}'_x + a_1\,\mathrm{U}'_y + a_2\,\mathrm{U}'_z.$$

D'après cela, on obtient, pour les dérivées partielles des

trois fonctions U, V, T par rapport à X, Y, Z,

$$\begin{aligned} U'_X &= a U'_x + a_1 U'_y + a_2 U'_z, & V'_X &= a V'_x + a_1 V'_y + a_2 V'_z, \\ U'_Y &= b U'_x + b_1 U'_y + b_2 U'_z, & V'_Y &= b V'_x + b_1 V'_y + b_2 V'_z, \\ U'_Z &= c U'_x + c_1 U'_y + c_2 U'_z, & V'_Z &= c V'_x + c_1 V'_y + c_2 V'_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_X &= a T'_x + a_1 T'_y + a_2 T'_z, \\ T'_Y &= b T'_x + b_1 T'_y + b_2 T'_z, \\ T'_Z &= c T'_x + c_1 T'_y + c_2 T'_z. \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après la multiplication des déterminants (372, 373),

$$\begin{vmatrix} U'_X & U'_Y & U'_Z \\ V'_X & V'_Y & V'_Z \\ T'_X & T'_Y & T'_Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ T'_x & T'_y & T'_z \end{vmatrix}.$$

Le déterminant formé par les dérivées partielles des trois fonctions U, V, T, *prises par rapport aux nouvelles variables* X, Y, Z, *est* donc *égal au produit du déterminant formé par les dérivées partielles des mêmes fonctions, prises par rapport aux variables primitives* x, y, z, *par le module de la substitution.*

Discriminant d'une forme quadratique.

1589. Considérons toujours la fonction homogène du second degré

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

La *demi-dérivée partielle* de la fonction par rapport à x_i a pour expression (1586)

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,i}x_i + a_{i,j}x_j + \ldots + a_{i,n}x_n.$$

C'est donc une fonction linéaire homogène qu'on peut représenter par

$$\frac{1}{2} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

En opérant de même pour chaque variable, on obtient n fonctions linéaires homogènes. Le déterminant des coefficients de ces n formes linéaires est ce qu'on appelle le DISCRIMINANT

du polynôme ou de la fonction f. D'une manière générale, l'expression du discriminant d'un polynôme homogène du second degré de n variables est donc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En vertu de la condition $a_{i,j} = a_{j,i}$ (1586), on voit que le discriminant est un déterminant *symétrique* (363).

1590. Dans le cas de deux variables, on a, en prenant les notations les plus simples (1586),

$$f(x, y) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2,$$
$$f'_x = 2\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}y, \qquad f'_y = 2\mathrm{B}x + 2\mathrm{C}y,$$
$$f''_{x^2} = 2\mathrm{A}, \qquad f''_{x,y} = 2\mathrm{B}, \qquad f''_{y^2} = 2\mathrm{C}.$$

Le discriminant est alors

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2.$$

D'après les valeurs des dérivées partielles du second ordre, on peut donc encore le mettre sous la forme (356)

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} \\ f''_{x,y} & f''_{y^2} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas de trois variables, on a également

$$f(x, y, z) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy.$$

$$f'_x = 2\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}''y + 2\mathrm{B}'z,$$
$$f'_y = 2\mathrm{B}''x + 2\mathrm{A}'y + 2\mathrm{B}z,$$
$$f'_z = 2\mathrm{B}'x + 2\mathrm{B}y + 2\mathrm{A}''z.$$

$$f''_{x^2} = 2\mathrm{A}, \qquad f''_{x,y} = 2\mathrm{B}'', \qquad f''_{x,z} = 2\mathrm{B}',$$
$$f''_{y^2} = 2\mathrm{A}', \qquad f''_{y,z} = 2\mathrm{B}, \qquad f''_{z^2} = 2\mathrm{A}''.$$

Le discriminant est alors (363)

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

D'après les valeurs des dérivées partielles du second ordre, on peut donc encore le mettre sous la forme

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} & f''_{x,z} \\ f''_{x,y} & f''_{y^2} & f''_{y,z} \\ f''_{x,z} & f''_{y,z} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

1591. On pourrait aussi, pour obtenir le discriminant d'une fonction homogène du second degré désignée par f, avoir recours au *théorème des fonctions homogènes* (793). En supposant trois variables x, y, z, on a immédiatement, d'après ce théorème,

$$\begin{aligned} f'_x &= x f''_{x^2} + y f''_{x,y} + z f''_{x,z}, \\ f'_y &= x f''_{y,x} + y f''_{y^2} + z f''_{y,z}, \\ f'_z &= x f''_{z,x} + y f''_{z,y} + z f''_{z^2}. \end{aligned}$$

Comme les dérivées secondes sont constantes, on peut prendre pour *discriminant*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} & f''_{x,z} \\ f''_{y,x} & f''_{y^2} & f''_{y,z} \\ f''_{z,x} & f''_{z,y} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est symétrique, en vertu de la relation fondamentale

$$f''_{y,x} = f''_{x,y}.$$

Le discriminant ainsi trouvé est identique au précédent (1590), *sauf un facteur numérique*, parce qu'on a considéré les dérivées partielles du premier ordre au lieu de considérer leurs moitiés. Ce facteur numérique disparaissant en général dans les applications, on peut conserver le dernier résultat.

1592. *Lorsque deux fonctions homogènes du second degré peuvent se déduire l'une de l'autre par une substitution linéaire* (1587), *le discriminant de l'une est égal au produit*

du discriminant de l'autre par le carré du module de la substitution.

Le raisonnement étant général, nous l'appliquerons, pour simplifier, au cas de trois variables. Soit donc la forme quadratique

$$f(x, y, z), \tag{1}$$

à laquelle nous ferons subir la substitution linéaire

$$\begin{cases} x = \alpha\,\mathrm{X} + \beta\,\mathrm{Y} + \gamma\,\mathrm{Z}, \\ y = \alpha_1\mathrm{X} + \beta_1\mathrm{Y} + \gamma_1\mathrm{Z}, \\ z = \alpha_2\mathrm{X} + \beta_2\mathrm{Y} + \gamma_2\mathrm{Z}, \end{cases} \tag{2}$$

c'est-à-dire dont nous déterminerons (1587) la transformée

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}). \tag{3}$$

Désignons par Δ et par Δ' les discriminants des deux fonctions f et F.

On a

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = f(x, y, z), \tag{4}$$

et il en résulte, d'après les indications données au n° 1588,

$$\begin{cases} \mathrm{F}'_{\mathrm{X}} = \alpha f'_x + \alpha_1 f'_y + \alpha_2 f'_z, \\ \mathrm{F}'_{\mathrm{Y}} = \beta f'_x + \beta_1 f'_y + \beta_2 f'_z, \\ \mathrm{F}'_{\mathrm{Z}} = \gamma f'_x + \gamma_1 f'_y + \gamma_2 f'_z. \end{cases} \tag{5}$$

Les trois dérivées partielles F'_{X}, F'_{Y}, F'_{Z} peuvent, par suite, être regardées comme des fonctions linéaires de x, y, z, et ces variables sont elles-mêmes, d'après les relations (2), des fonctions linéaires de X, Y, Z. On peut donc appliquer à ces trois dérivées partielles la proposition du n° 1588, et écrire, en représentant par M le module de la substitution exprimée par les relations (2),

$$\begin{vmatrix} \mathrm{F}''_{\mathrm{X}^2} & \mathrm{F}''_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} & \mathrm{F}''_{\mathrm{X},\mathrm{Z}} \\ \mathrm{F}''_{\mathrm{Y},\mathrm{X}} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Y}^2} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Y},\mathrm{Z}} \\ \mathrm{F}''_{\mathrm{Z},\mathrm{X}} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Z},\mathrm{Y}} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Z}^2} \end{vmatrix} = \mathrm{M} \begin{vmatrix} \mathrm{F}''_{\mathrm{X},x} & \mathrm{F}''_{\mathrm{X},y} & \mathrm{F}''_{\mathrm{X},z} \\ \mathrm{F}''_{\mathrm{Y},x} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Y},y} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Y},z} \\ \mathrm{F}''_{\mathrm{Z},x} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Z},y} & \mathrm{F}''_{\mathrm{Z},z} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

On a d'ailleurs, d'après les relations (5),

$$\begin{aligned}
&F''_{X,x} = \alpha f''_{x^2} + \alpha_1 f''_{y,x} + \alpha_2 f''_{z,x},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&F''_{Y,x} = \beta f''_{x^2} + \beta_1 f''_{y,x} + \beta_2 f''_{z,x},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&F''_{Z,x} = \gamma f''_{x^2} + \gamma_1 f''_{y,x} + \gamma_2 f''_{z,x},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On voit ainsi que le second déterminant du second membre de la relation (6) est le produit du module de substitution M par le discriminant (1591)

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} & f''_{x,z} \\ f''_{y,x} & f''_{y^2} & f''_{y,z} \\ f''_{z,x} & f''_{z,y} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

On a donc finalement, à la place de la relation (6),

$$\Delta' = M^2 \Delta;$$

ce qui justifie l'énoncé.

Invariant.

1593. Soit f une forme quadratique contenant n variables. Supposons qu'on la soumette à une substitution linéaire de module M, et qu'on obtienne une transformée F. Désignons par φ une certaine fonction des coefficients de f, et soit Φ la fonction analogue ou *semblable* des coefficients F. Si l'on a

$$\Phi = M^p \varphi,$$

on dit que la fonction φ est un *invariant* de la fonction f. L'invariant est *absolu,* si l'on a $M^p = 1$ ou $p = 0$.

Cette définition peut s'étendre à un ensemble de fonctions.

1594. Si l'on considère maintenant des formes quadratiques, il résulte du théorème fondamental du n° 1592 que *les discriminants sont des invariants,* en raison de la relation

$$\Delta' = M^2 \Delta.$$

Les invariants jouent un rôle important dans la théorie des lignes et des surfaces du second degré.

Décomposition d'une forme quadratique en carrés, méthode directe.

1595. *Toute fonction homogène du second degré contenant n variables est la somme des carrés de n formes linéaires* (*ou d'un nombre moindre*).

Pour parvenir à cette décomposition, nous emploierons d'abord une méthode fondée sur le groupement des termes, à laquelle on donne souvent le nom de *méthode par réduction*.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la forme quadratique considérée. Il y a deux cas à distinguer :

1° *Supposons que la fonction f renferme au moins le carre de l'une des variables,* x_1 par exemple. On pourra alors, en l'ordonnant par rapport à x_1, la mettre sous la forme

$$\lambda x_1^2 + 2\mu x_1 + \nu.$$

λ est une constante; μ est une fonction linéaire des $n-1$ autres variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$; ν est une fonction homogène du second degré des mêmes variables.

On a alors

$$\begin{aligned} f = \lambda x_1^2 + 2\mu x_1 + \nu &= \frac{1}{\lambda}(\lambda^2 x_1^2 + 2\mu\lambda x_1 + \lambda\nu) \\ &= \frac{1}{\lambda}[(\lambda x_1 + \mu)^2 + \lambda\nu - \mu^2] \\ &= \left(x_1\sqrt{\lambda} + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + \nu - \frac{\mu^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

On a ainsi fait apparaître un premier carré, qui est celui d'une forme linéaire pouvant renfermer les n variables; et la partie complémentaire, $\nu - \frac{\mu^2}{\lambda}$, représente une fonction homogène du second degré qui ne contient plus que $n-1$ variables. (Elle peut en contenir moins à cause des réductions possibles.)

2° *Supposons que la fonction f ne renferme le carré d'aucune variable,* mais qu'elle renferme, par exemple, le produit des deux variables x_1 et x_2. En l'ordonnant par rapport à ces

deux variables, on pourra la mettre sous la forme

$$f = \lambda x_1 x_2 + \mu x_1 + \nu x_2 + \rho.$$

λ est une constante; μ et ν sont des fonctions linéaires des $n-2$ variables autres que x_1 et x_2; ρ est une fonction homogène du second degré de ces $n-2$ variables.

On a, évidemment,

$$f = \lambda\left(x_1 + \frac{\nu}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\right) + \rho - \frac{\mu\nu}{\lambda}.$$

Mais, en vertu de l'identité,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2,$$

on a aussi

$$\left(x_1 + \frac{\nu}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \frac{\mu+\nu}{\lambda}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2 - \frac{\mu-\nu}{\lambda}}{2}\right)^2.$$

Par suite,

$$f = \left[\frac{x_1+x_2}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{\mu+\nu}{2\sqrt{\lambda}}\right]^2 - \left[\frac{x_1-x_2}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\lambda}}\right]^2 + \rho - \frac{\mu\nu}{\lambda}.$$

On fait cette fois apparaître deux carrés, et ces carrés sont ceux de deux formes linéaires pouvant renfermer les n variables; mais, en même temps, la partie complémentaire, $\rho - \frac{\mu\nu}{\lambda}$, est une fonction homogène du second degré qui renferme, au plus, les $n-2$ variables autres que x_1 et x_2.

Ainsi, d'après ce qui précède, on peut toujours mettre en évidence, dans la fonction f, *un* ou *deux* carrés de formes linéaires qui peuvent renfermer les n variables. Dans l'hypothèse d'un seul carré, il reste à considérer une fonction homogène du second degré contenant au plus $n-1$ variables; dans l'hypothèse de deux carrés, il reste à considérer une fonction homogène du second degré contenant au plus $n-2$ variables.

On n'a donc qu'à poursuivre l'un ou l'autre procédé sur la fonction complémentaire; et, à chaque carré mis en évidence,

correspondra la disparition d'une nouvelle variable dans la nouvelle fonction à décomposer.

On voit par là qu'on obtiendra finalement n carrés, si les coefficients de la fonction f sont généraux ou indéterminés. Dans le cas contraire, quelques-uns de ces carrés pourront manquer.

1596. Il est évident, par la façon même dont nous venons de procéder, que cette décomposition de la fonction f en n carrés peut se faire de plusieurs manières, suivant l'ordre dans lequel les différentes variables interviennent. Si cet ordre change, les résultats obtenus sont distincts.

On le vérifie directement en appliquant à la question la méthode des coefficients indéterminés. Dès que n est plus grand que 1, le nombre des coefficients indéterminés surpasse celui des équations de condition, et il y a une infinité de solutions ou une infinité de décompositions en n carrés.

Avant d'aller plus loin, il ne sera pas inutile de donner un exemple de la méthode directe qu'on vient d'exposer (1595).

Application.

1597. *Soit la fonction homogène du second degré à trois variables, dont les coefficients sont supposés indéterminés, et qu'on veut décomposer en une somme de trois carrés.*

On a

$$f(x, y, z) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy.$$

En ordonnant par rapport à x, il vient

$$\begin{aligned} f &= \mathrm{A}x^2 + 2(\mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)x + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz \\ &= \frac{1}{\mathrm{A}}[\mathrm{A}^2x^2 + 2(\mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)\mathrm{A}x + \mathrm{A}(\mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz)] \\ &= \frac{1}{\mathrm{A}}\{[\mathrm{A}x + (\mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)]^2 + \mathrm{A}(\mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz) - (\mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)^2\}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$f = \frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{A}x + \mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)^2 + \frac{\mathrm{A}(\mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz) - (\mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y)^2}{\mathrm{A}}.$$

On a donc un premier carré, et il reste à décomposer la fonction

$$f_1 = \frac{A(A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz) - (B'z + B''y)^2}{A}.$$

On a, en développant,

$$f_1 = \frac{AA'y^2 + AA''z^2 + 2AByz - B'^2z^2 - 2B'B''yz - B''^2y^2}{A}$$

ou, en ordonnant par rapport à y,

$$f_1 = \frac{1}{A}[(AA' - B''^2)y^2 + 2(AB - B'B'')yz + (AA'' - B'^2)z^2]$$

$$= \frac{1}{A(AA' - B''^2)}[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2$$

$$+ \frac{1}{A}\left[(AA'' - B'^2)z^2 - \frac{(AB - B'B'')^2}{AA' - B''^2}z^2\right].$$

On trouve ainsi un second carré, et il n'y a plus à considérer que la fonction

$$f_2 = \frac{1}{A}\frac{(AA'' - B'^2)(AA' - B''^2) - (AB - B'B'')^2}{AA' - B''^2}z^2,$$

qui devient, en développant et en simplifiant,

$$f_2 = \frac{AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2}{AA' - B''^2}z^2.$$

En réunissant tous ces résultats et en posant

$$\frac{1}{A} = \alpha, \quad \frac{1}{A(AA' - B''^2)} = \beta, \quad \frac{AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2}{AA' - B''^2} =$$

$$Ax + B'z + B''y = X, \quad (AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = Y, \quad z = Z,$$

on a finalement

$$f(x, y, z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2.$$

On peut remarquer que X est la demi-dérivée partielle $\frac{1}{2}f'_x$, et que Y est la demi-dérivée partielle $\frac{1}{2}f'_{1y}$ multipliée par A. On peut aussi remarquer que γ est le discriminant Δ de la fonction f (1590) divisé par $AA' - B''^2$, c'est-à-dire divisé

par le mineur de première classe et de second ordre (346) qu'on obtient en supprimant, dans le discriminant Δ, la dernière colonne et la dernière ligne.

Des décompositions irréductibles.

1598. Il résulte de ce qui précède (1595) qu'une forme quadratique contenant n variables est toujours décomposable en une somme de n carrés de formes linéaires ou en un nombre moindre au moins égal à 1. Mais, une fois cette première décomposition obtenue, on peut indiquer d'autres décompositions renfermant un nombre *quelconque* de carrés.

En effet, supposons qu'on ait décomposé la forme quadratique f de n variables en une somme de carrés de formes linéaires représentée par Σ_1 et renfermant au moins un carré. Désignons par Σ_2 la somme des carrés de p formes linéaires des mêmes variables, ces formes étant choisies arbitrairement et p étant *quelconque*.

On a identiquement

$$f = \Sigma_2 + (\Sigma_1 - \Sigma_2).$$

Or, $\Sigma_1 - \Sigma_2$ est une forme quadratique des n variables considérées qu'on pourra toujours, par la méthode directe de groupement des termes (1595), décomposer en un nombre de carrés, égal ou inférieur à n, mais au moins égal à 1. Par suite, la forme quadratique f se trouvera décomposée en un nombre de carrés, supérieur à p, et p est quelconque.

1599. Parmi toutes ces décompositions possibles en nombre infini, il est naturel de chercher à distinguer celles qui renferment le plus petit nombre de carrés. Elles ont pour caractère commun de ne pouvoir être remplacées par une autre décomposition contenant un nombre moindre de carrés. On dit alors qu'elles constituent *une décomposition en une somme de carrés* IRRÉDUCTIBLE.

Nous allons montrer que la décomposition en carrés est *réductible* ou *irréductible,* suivant que les formes linéaires élevées au carré dans cette décomposition sont elles-mêmes *dépendantes* ou *indépendantes* (1581).

1600. *Lorsqu'une forme quadratique f, de n variables x_1, x_2, ..., x_n, est décomposée en p carrés de formes linéaires dépendantes, on peut la décomposer en un nombre moindre de carrés de formes linéaires.*

Supposons que (φ) représente une forme linéaire des variables, y compris le facteur numérique que cette forme peut admettre, et qu'on ait

$$f = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_p^2. \tag{1}$$

Les formes linéaires (φ) étant dépendantes, on a (1581), les coefficients (λ) n'étant pas tous nuls,

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_p\varphi_p = 0. \tag{2}$$

Admettons que λ_p soit différent de zéro. On déduit de la relation (2)

$$\varphi_p = -\frac{\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\varphi_{p-1}}{\lambda_p},$$

et l'identité (1) devient

$$\left\{\begin{array}{l} f = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_{p-1}^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\varphi_{p-1}}{\lambda_p}\right)^2. \end{array}\right. \tag{1 bis}$$

Si l'on regarde alors f comme une forme quadratique des nouvelles variables φ_1, φ_2, ..., φ_{p-1}, on pourra, en employant la méthode de groupement des termes (1595), la décomposer en une somme de $p-1$ carrés au plus de formes linéaires des variables φ_1, φ_2, ..., φ_{p-1}, ou des variables primitives x_1, x_2, ..., x_n. Par suite, la décomposition (1) pouvant être remplacée par une autre décomposition, contenant un nombre moindre de carrés, n'est pas irréductible (1599).

1601. *Lorsqu'une forme quadratique f, de n variables x_1, x_2, ..., x_n, est décomposée en p carrés de formes linéaires indépendantes, cette décomposition est irréductible.*

Les formes linéaires étant indépendantes, le nombre n des variables ne peut pas être inférieur au nombre p de ces formes (1582); mais il peut être égal ou supérieur (1583, 1584). On a donc deux cas à distinguer :

Soit d'abord $n = p$.

Il faut prouver qu'il n'existe aucune décomposition contenant moins de p carrés et reproduisant f. Représentons les formes linéaires de la première décomposition par (φ), et les formes linéaires d'une seconde décomposition *réduite* (regardée comme possible) par (ψ), en admettant que ces symboles comprennent les facteurs numériques qui peuvent affecter les formes linéaires correspondantes. Il s'agit de montrer que l'identité

$$(1) \qquad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_p^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \ldots + \psi_{p-1}^2$$

est impossible.

En prenant les dérivées partielles du premier membre de cette identité par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ $[p = n]$, et en les égalant à zéro, on obtient un système de p équations linéaires et homogènes (dont on peut diviser les deux membres par 2). En considérant alors les formes (φ) comme nouvelles variables, le déterminant de ce système est celui des coefficients des variables primitives dans ces mêmes formes, et il ne peut être nul puisque les formes (φ) sont indépendantes (1583). Le système des variables (φ) n'admettra donc pas d'autres solutions (403) que

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p = 0.$$

Mais, si l'on revient dans ce système aux variables primitives, le déterminant reste le même, et l'on n'a pas d'autres solutions pour ces variables que

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_p = 0.$$

D'autre part, si l'on opère de la même manière relativement au second membre de l'identité (1), on obtient un système d'équations

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_{p-1} = 0,$$

dont les solutions devraient être identiques aux précédentes. Or, ici, le nombre des variables surpasse celui des équations. Par conséquent, ce second système est indéterminé (403) et admet une infinité de solutions autres que zéro pour les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Lorsque l'on a $n = p$, l'identité (1) ne peut donc pas exister.

Soit maintenant $n > p$.

En égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'identité (1) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et en prenant pour nouvelles variables les formes (φ), on obtient n équations contenant p variables, les coefficients de ces variables étant les coefficients des variables primitives dans ces mêmes formes (φ).

Ces formes étant indépendantes par hypothèse, les déterminants du $p^{\text{ième}}$ ordre, obtenus en supprimant de toutes les manières possibles $n - p$ équations sur les n équations considérées, ne seront pas tous nuls (1584). Il n'y aura donc pas indétermination, et le système des variables (φ) n'admettra pas d'autres solutions (403) que

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p = 0.$$

Mais, si l'on revient dans ce système aux variables primitives $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a n inconnues et p équations, de sorte qu'il y a pour ces inconnues indétermination de l'ordre $n - p$.

En raisonnant de même par rapport au second membre de l'identité (1), on arrive au système

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_{p-1} = 0,$$

dont les solutions, par rapport aux variables primitives, devraient être identiques aux précédentes. Or, ces solutions seront bien indéterminées, mais l'ordre de leur indétermination sera $n - p + 1$.

Il s'ensuit que l'identité (1) ne peut pas avoir lieu, et que la décomposition de la forme quadratique f est irréductible dans ce second cas comme dans le premier.

1602. *La méthode directe par réduction* (1595) *conduit à une décomposition irréductible.*

Pour le démontrer, il suffit d'établir que les formes linéaires, que cette méthode met en évidence, sont indépendantes (1601).

Or, quand une forme quadratique f, de n variables, contient au moins le carré de l'une d'elles, x_1 par exemple, on sait que l'on peut mettre en évidence un premier carré d'une forme linéaire contenant les n variables, augmenté d'une

autre forme quadratique ne contenant plus x_1. Il y a donc nécessairement indépendance entre la première forme linéaire et celles qu'on peut déduire par le même procédé de la seconde forme quadratique, de sorte que la décomposition de f ainsi poursuivie sera bien irréductible.

Si la forme quadratique f ne contient le carré d'aucune des variables qui y entrent, elle renferme le produit de deux d'entre elles, x_1 et x_2 par exemple. On peut alors mettre en évidence, par une première opération, deux carrés de formes linéaires contenant les n variables, tandis que la partie complémentaire est une seconde forme quadratique qui ne renferme plus x_1 et x_2. Il y a donc nécessairement indépendance entre les deux premières formes linéaires et celles qu'on peut déduire de la seconde forme quadratique en appliquant le même procédé, de sorte que la décomposition de f ainsi continuée sera bien encore irréductible. On peut aller plus loin et montrer que les deux premières formes linéaires obtenues sont elles-mêmes indépendantes, c'est-à-dire qu'on ne peut pas avoir (1581), en désignant par α et β deux constantes différentes de zéro et en se reportant au n° 1595,

$$\alpha\left(\frac{x_1+x_2}{2}\sqrt{\lambda}+\frac{\mu+\nu}{2\sqrt{\lambda}}\right)+\beta\left(\frac{x_1-x_2}{2}\sqrt{\lambda}-\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\lambda}}\right)=0.$$

En effet, cette identité exige que les coefficients de x_1 et de x_2 soient nuls ou qu'on ait $\alpha+\beta=0$ et $\alpha-\beta=0$, ce qui entraîne $\alpha=0$ et $\beta=0$.

Décomposition d'une forme quadratique en carrés, par l'emploi d'une substitution linéaire.

1603. Soit une forme quadratique f de n variables, à laquelle nous ferons subir une substitution linéaire (1581). Admettons que cette substitution ait produit la décomposition de la forme f en n carrés, tels que

$$(A_{1,0}x_1+A_{2,0}x_2+A_{3,0}x_3+\ldots+A_{n,0}x_n)^2.$$

(Le premier indice répond dans chaque terme à la variable associée et le second, au rang du carré dans la décomposition obtenue.)

Il y a identité entre la fonction f et la fonction trans-

formée F, de sorte qu'on peut poser symboliquement (1586)

$$(1)\qquad \begin{cases} f=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j}x_i x_j \\ \quad =\sum_{\theta=1}^{\theta=n}(\mathrm{A}_{1,\theta}x_1+\mathrm{A}_{2,\theta}x_2+\ldots+\mathrm{A}_{n,\theta}x_n)^2. \end{cases}$$

Il y a, en général (1596, 1598), une infinité de systèmes de valeurs des indéterminées (A), qui rendent identiques les deux membres de la relation (1). Choisissons l'un d'eux, et posons pour ce système les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1=\mathrm{A}_{1,1}x_1+\mathrm{A}_{2,1}x_2+\ldots+\mathrm{A}_{n,1}x_n, \\ \mathrm{X}_2=\mathrm{A}_{1,2}x_1+\mathrm{A}_{2,2}x_2+\ldots+\mathrm{A}_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{X}_n=\mathrm{A}_{1,n}x_1+\mathrm{A}_{2,n}x_2+\ldots+\mathrm{A}_{n,n}x_n. \end{cases}$$

Si le déterminant D des coefficients des variables x_1, x_2, ..., x_n, dans les équations (2), n'est pas nul, on pourra tirer de ces équations des valeurs finies et déterminées (384) pour ces mêmes variables, et l'on aura (382)

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=\alpha_{1,1}\mathrm{X}_1+\alpha_{2,1}\mathrm{X}_2+\ldots+\alpha_{n,1}\mathrm{X}_n, \\ x_2=\alpha_{1,2}\mathrm{X}_1+\alpha_{2,2}\mathrm{X}_2+\ldots+\alpha_{n,2}\mathrm{X}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n=\alpha_{1,n}\mathrm{X}_1+\alpha_{2,n}\mathrm{X}_2+\ldots+\alpha_{n,n}\mathrm{X}_n. \end{cases}$$

Cette substitution linéaire transformera alors la forme quadratique f en une somme de n carrés, et l'on aura

$$f=\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\mathrm{X}_3^2+\ldots+\mathrm{X}_n^2.$$

Nous avons trouvé précédemment (1586), pour l'expression de la demi-dérivée partielle de f par rapport à x_i,

$$\frac{1}{2}f'_{x_i}=a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+a_{i,3}x_3+\ldots+a_{i,i}x_i+\ldots+a_{i,n}x_n,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \frac{1}{2}f'_{x_i}=\sum_{k=1}^{k=n}a_{i,k}x_k.$$

Comme on a aussi

$$f=\sum_{\theta=1}^{\theta=n}(A_{1,\theta}x_1+A_{2,\theta}x_2+\ldots+A_{i,\theta}x_i+\ldots+A_{n,\theta}x_n)^2,$$

on peut en déduire également, en prenant les demi-dérivées partielles des deux membres par rapport à x_i,

$$(5)\qquad \frac{1}{2}f'_{x_i}=\sum_{\theta=1}^{\theta=n}(A_{1,\theta}x_1+A_{2,\theta}x_2+\ldots+A_{n,\theta}x_n)A_{i,\theta}.$$

En comparant les valeurs (4) et (5), on trouve [le coefficient de x_k dans la relation (5) étant $A_{k,\theta}$]

$$a_{i,k}=\sum_{\theta=1}^{\theta=n}A_{k,\theta}A_{i,\theta},$$

pour toutes les valeurs des indices i et k. On a donc

$$(6)\qquad a_{i,k}=A_{i,1}A_{k,1}+A_{i,2}A_{k,2}+\ldots+A_{i,n}A_{k,n}.$$

Mais le discriminant Δ de la forme f est précisément (1589) le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n}\end{vmatrix},$$

tandis qu'on a, pour le déterminant D des équations (2), en prenant les colonnes pour les lignes et inversement,

$$D=\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \ldots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ldots & A_{2,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \ldots & A_{n,n}\end{vmatrix}.$$

Or, d'après la relation (6) et l'expression du carré d'un déterminant (375), on a évidemment

$$(7)\qquad \Delta=D^2.$$

Ainsi, le discriminant de la forme quadratique est égal au

carré du déterminant des équations (2) [par lesquelles on repasserait de la transformée F à la fonction donnée f].

D'ailleurs, la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution linéaire qui transforme f en une somme de n carrés puisse être effectuée, c'est que le déterminant D soit différent de zéro ou, ce qui revient au même d'après la relation (7), que le discriminant ou l'invariant Δ de la forme quadratique f soit différent de zéro.

En résumé, tant que le discriminant de la forme quadratique considérée n'est pas nul, on peut la décomposer par une substitution linéaire en une somme formée d'autant de carrés que la forme contient de variables. C'est ce qui devient impossible, lorsque le discriminant de la forme est nul.

Nous allons préciser davantage ce résultat important.

Conditions relatives au nombre des carrés de la décomposition, lorsque ce nombre est moindre que celui des variables de la forme quadratique.

1604. *Pour qu'une forme quadratique f de n variables puisse se décomposer, d'une manière irréductible, en moins de n carrés, il faut et il suffit que son discriminant Δ soit nul.*

Supposons $p < n$, et soit

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2.$$

Les formes linéaires $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont nécessairement indépendantes, sans quoi la décomposition ne serait pas irréductible (1600). D'ailleurs (101), le système obtenu en égalant à zéro ces formes linéaires admet une solution où les valeurs des inconnues ne sont pas toutes nulles.

D'autre part, il est clair que les demi-dérivées partielles de f, telles que $\frac{1}{2} f'_{x_i}$, sont des formes linéaires des (X). La solution indiquée annulera donc les demi-dérivées partielles par des valeurs des variables qui ne sont pas toutes nulles. Il en résulte que le déterminant des demi-dérivées partielles ou le discriminant de f (1589) est nul (404).

Ainsi, toutes les fois que la décomposition contient, d'une manière irréductible, moins de carrés qu'il n'y a de variables, le discriminant Δ est nul

Inversement, supposons $\Delta = 0$ et admettons pour un instant qu'on ait

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2. \tag{1}$$

Il y aura entre les demi-dérivées partielles de la forme quadratique f (dont le discriminant Δ est le déterminant), ou entre ces dérivées partielles elles-mêmes, certaines relations linéaires et homogènes (407), et au moins une, de la forme [tous les (λ) n'étant pas nuls]

$$\lambda_1 f'_{x_1} + \lambda_2 f'_{x_2} + \ldots + \lambda_n f'_{x_n} = 0. \tag{2}$$

Ces dérivées partielles étant toujours des formes linéaires des (X), telles que

$$f'_{x_i} = \alpha_{i,1} X_1 + \alpha_{i,2} X_2 + \ldots + \alpha_{i,n} X_n, \tag{3}$$

si on les remplace par leurs valeurs dans la relation (2), il vient évidemment, en ordonnant par rapport aux (X),

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda_1 \alpha_{1,1} + \lambda_2 \alpha_{2,1} + \ldots + \lambda_n \alpha_{n,1}) X_1 \\ + (\lambda_1 \alpha_{1,2} + \lambda_2 \alpha_{2,2} + \ldots + \lambda_n \alpha_{n,2}) X_2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\lambda_1 \alpha_{1,n} + \lambda_2 \alpha_{2,n} + \ldots + \lambda_n \alpha_{n,n}) X_n = 0. \end{array}\right. \tag{2 bis}$$

Si tous les coefficients des (X) ne sont pas nuls, la relation (2 *bis*) prouve que l'une de ces formes linéaires peut s'exprimer en fonction des autres. Si tous les coefficients des (X) sont nuls dans cette relation, le déterminant des coefficients (α) des (λ) est forcément nul (406); ce qui entraîne encore certaines relations linéaires et homogènes entre les (X) dont les (α) sont les coefficients dans les équations analogues à l'équation (3) [393], et la même conclusion subsiste.

La forme quadratique f ne renfermera alors au plus, par l'élimination de l'une d'elles, que $n-1$ variables (X). La méthode de réduction (1595) ne pourra donc ramener f à plus de $n-1$ carrés de formes linéaires de ces mêmes variables qui, par substitution, deviendront $n-1$ carrés de formes linéaires des variables primitives $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Le théorème est donc établi.

1605. *Pour qu'une forme quadratique f de n variables se décompose, d'une manière irréductible, en une somme de p carrés de formes linéaires de ces variables* ($p < n$), *il faut et il suffit que, son discriminant* Δ *étant nul, les mineurs de ce déterminant, d'ordre* $p+1$ *ou de classe* $n-p-1$, *soient tous nuls, sans que la même condition soit remplie par les mineurs d'ordre p ou de classe* $n-p$ (346).

Supposons qu'on ait

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2. \tag{1}$$

On a, à la fois (1583), les n variables étant $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\frac{1}{2} f'_{x_i} = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n, \tag{2}$$

$$X_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n. \tag{3}$$

En appliquant alors le théorème des fonctions composées à l'équation (1), il vient

$$\frac{1}{2} f'_{x_i} = \alpha_{1,i}X_1 + \alpha_{2,i}X_2 + \ldots + \alpha_{p,i}X_p. \tag{4}$$

Le discriminant Δ étant le déterminant des coefficients des demi-dérivées partielles (1589), considérons l'*un quelconque* de ses mineurs d'ordre $p+1$. On peut admettre que, par des changements permis, on ait amené ce mineur à occuper les $p+1$ premières colonnes de Δ, en faisant concorder les indices des variables avec les rangs des colonnes. On fera ainsi intervenir les coefficients des $p+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$. Annulons les $n-p-1$ autres. Les relations telles que (2) et (3) contiendront alors seulement les $p+1$ premières variables, et leurs premiers membres deviendront, si l'on veut, φ'_i et X'_i pour $x_{p+2} = x_{p+3} = \ldots = x_n = 0$.

Mais les équations $X'_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, p$), contenant $p+1$ variables et étant en nombre p, admettront une solution où toutes les valeurs des inconnues *ne seront pas nulles* (403). Pour cette solution, tous les φ'_i [équations (4) et (2)] s'annuleront, de sorte que le déterminant des coefficients des variables conservées [équation (2)] $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, *sera lui-même égal à zéro*, puisque toutes ces variables ne sont pas

nulles (403). Ce déterminant n'est d'ailleurs autre chose que le mineur d'ordre $p+1$ considéré dans le discriminant Δ.

Le même raisonnement pouvant être répété pour tous les mineurs d'ordre $p+1$, *ces mineurs sont tous nuls,* et il en est nécessairement de même des mineurs d'ordre $p+2$, $p+3$, ..., jusqu'au discriminant Δ lui-même.

Ainsi, la décomposition irréductible de la forme f de n variables en p carrés entraîne la nullité de tous les mineurs d'ordre $p+1$ de son discriminant Δ.

Supposons maintenant, *réciproquement,* que tous les mineurs d'ordre $p+1$ du discriminant Δ soient nuls, sans que tous les mineurs d'ordre p remplissent la même condition : on pourra alors décomposer, d'une manière irréductible, la forme quadratique f en p carrés.

Prenons l'*un quelconque* des mineurs d'ordre p quine sont pas nuls. On peut admettre, comme précédemment, qu'on l'a amené, par des changements convenables, à occuper les p premières lignes et les colonnes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, du discriminant Δ. Ce mineur sera alors exprimé de la manière suivante, et l'on aura, par hypothèse,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_1^{\beta_2} & \ldots & a_1^{\beta_p} \\ a_2^{\beta_1} & a_2^{\beta_2} & \ldots & a_2^{\beta_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^{\beta_1} & a_p^{\beta_2} & \ldots & a_p^{\beta_p} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

On a en même temps, en bordant ce déterminant comme il est indiqué,

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_1^{\beta_2} & \ldots & a_1^{\beta_p} & \frac{1}{2} f'_{x_1} \\ a_2^{\beta_1} & a_2^{\beta_2} & \ldots & a_2^{\beta_p} & \frac{1}{2} f'_{x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^{\beta_1} & a_p^{\beta_2} & \ldots & a_p^{\beta_p} & \frac{1}{2} f'_{x_p} \\ a_{p+h}^{\beta_1} & a_{p+h}^{\beta_2} & \ldots & a_{p+h}^{\beta_p} & \frac{1}{2} f_{x_{p+h}} \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, si l'on décompose ce dernier déterminant en raison des n éléments polynômes de la dernière colonne (358), on

obtient n déterminants de la forme (nous écrivons seulement [*voir* équation (2)] a_1^k, a_2^k, ..., au lieu de $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, ...)

$$(6\,bis)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_1^{\beta_2} & \dots & a_1^{\beta_p} & a_1^k \\ a_2^{\beta_1} & a_2^{\beta_2} & \dots & a_2^{\beta_p} & a_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^{\beta_1} & a_p^{\beta_2} & \dots & a_p^{\beta_p} & a_p^k \\ a_{p+h}^{\beta_1} & a_{p+h}^{\beta_2} & \dots & a_{p+h}^{\beta_p} & a_{p+h}^k \end{vmatrix} x_k,$$

et tous ces déterminants sont nuls : les uns, identiquement, si l'on donne à k les valeurs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, puisqu'ils ont alors deux colonnes identiques (349); les autres, comme mineurs d'ordre $p+1$, si l'on donne à k les autres valeurs entières entre 1 et n, y compris ces deux limites.

Il résulte de la nullité du déterminant (6), qu'il existe (406) une relation linéaire homogène entre les demi-dérivées partielles qui y entrent, de sorte qu'on pourra obtenir $\frac{1}{2}f'_{x_{p+h}}$ en fonction des autres demi-dérivées partielles $\frac{1}{2}f'_{x_1}$, $\frac{1}{2}f'_{x_2}$, ..., $\frac{1}{2}f'_{x_p}$. Le coefficient de $\frac{1}{2}f'_{x_{p+h}}$ dans cette relation est précisément le mineur d'ordre p considéré spécialement [relation (5)].

Comme ce qu'on vient de dire s'applique pour

$$h = 1, 2, 3, \dots, n-p,$$

on voit qu'on pourra obtenir les $n-p$ demi-dérivées partielles $\frac{1}{2}f'_{x_{p+1}}$, $\frac{1}{2}f'_{x_{p+2}}$, ..., $\frac{1}{2}f'_{x_n}$, en fonction des p premières $\frac{1}{2}f'_{x_1}$, $\frac{1}{2}f'_{x_2}$, ..., $\frac{1}{2}f'_{x_p}$.

Cela posé, on peut écrire, en remplaçant [équation (2)] i par β_i et en mettant cet indice en exposant,

$$(7)\qquad \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_i}} = \overbrace{a_1^{\beta_i}x_1 + a_2^{\beta_i}x_2 + \dots + a_p^{\beta_i}x_p}^{G^{\beta_i}} + a_{p+1}^{\beta_i}x_{p+1} + \dots + a_n^{\beta_i}x_n,$$

et l'on a, évidemment,

$$(8)\qquad f = \overbrace{\frac{1}{2}f'_{x_1}x_1 + \frac{1}{2}f'_{x_2}.x_2 + \dots + \frac{1}{2}f'_{x_p}.x_p}^{\varphi} + \frac{1}{2}f'_{x_{p+1}}x_{p+1} + \dots + \frac{1}{2}f'_{x_n}.x_n.$$

D'ailleurs, en bordant le déterminant (5) comme ci-dessus, après avoir échangé les lignes et les colonnes, on a

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_2^{\beta_1} & \dots & a_p^{\beta_1} & G^{\beta_1} \\ a_1^{\beta_2} & a_2^{\beta_2} & \dots & a_p^{\beta_2} & G^{\beta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\beta_p} & a_2^{\beta_p} & \dots & a_p^{\beta_p} & G^{\beta_p} \\ \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & \dots & \frac{1}{2}f'_{x_p} & \varphi \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, dans la dernière colonne, les (G^{β_i}) se décomposent en p termes de la forme $a_k^{\beta_i}x_k$, et φ se décompose en p termes de la forme $\frac{1}{2}f'_{x_k}.x_k$. Le déterminant (9) se décompose donc lui-même en p déterminants de la forme

$$(9\ bis)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_2^{\beta_1} & \dots & a_p^{\beta_1} & a_k^{\beta_1} \\ a_1^{\beta_2} & a_2^{\beta_2} & \dots & a_p^{\beta_2} & a_k^{\beta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\beta_p} & a_2^{\beta_p} & \dots & a_p^{\beta_p} & a_k^{\beta_p} \\ \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & \dots & \frac{1}{2}f'_{x_p} & \frac{1}{2}f'_{x_k} \end{vmatrix} x_k,$$

et tous ces déterminants s'évanouissent comme ayant deux colonnes identiques, quand on fait varier k depuis 1 jusqu'à p.

Remplaçons maintenant dans le déterminant (9), dont nous venons de démontrer la nullité, les (G^{β_i}) et φ par leurs valeurs déduites des relations (7) et (8).

φ comprendra $n-p+1$ termes, et il en sera de même des (G^{β_i}). On pourra donc décomposer le déterminant (9) [qui est nul] en $n-p+1$ autres déterminants. Le premier de ces déterminants sera

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_2^{\beta_1} & \dots & a_p^{\beta_1} & \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_1}} \\ a_1^{\beta_2} & a_2^{\beta_2} & \dots & a_p^{\beta_2} & \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_1^{\beta_p} & a_2^{\beta_p} & \dots & a_p^{\beta_p} & \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_p}} \\ \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & \dots & \frac{1}{2}f'_{x_p} & f \end{vmatrix}.$$

Les $n-p$ déterminants qui le suivent sont évidemment (356) de la forme

$$-\begin{vmatrix} a_1^{\beta_1} & a_2^{\beta_1} & \dots & a_p^{\beta_1} & a_{p+h}^{\beta_1} \\ a_1^{\beta_2} & a_2^{\beta_2} & \dots & a_p^{\beta_2} & a_{p+h}^{\beta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\beta_p} & a_2^{\beta_p} & \dots & a_p^{\beta_p} & a_{p+h}^{\beta_p} \\ \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & \dots & \frac{1}{2}f'_{x_p} & \frac{1}{2}f'_{x_{p+h}} \end{vmatrix}_{x_{p+h}},$$

et chacun d'eux est nul, d'après le calcul développé précédemment relativement au déterminant (6), dont ces $n-p$ déterminants ne diffèrent que par l'échange des lignes et des colonnes. Il en résulte que le premier déterminant (10) doit être nul lui-même, et l'on obtiendra ainsi f comme fonction quadratique de $\frac{1}{2}f'_{x_1}, \frac{1}{2}f'_{x_2}, \dots, \frac{1}{2}f'_{x_p}$ et de $\frac{1}{2}f'_{x_{\beta_1}}, \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_2}}, \dots, \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_p}}$.

Mais nous avons vu, à la fin de la première partie de cette démonstration, qu'on peut obtenir $\frac{1}{2}f'_{x_{p+1}}, \frac{1}{2}f'_{x_{p+2}}, \dots, \frac{1}{2}f'_{x_n}$ et, *a fortiori*, $\frac{1}{2}f'_{x_{\beta_1}}, \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_2}}, \dots, \frac{1}{2}f'_{x_{\beta_p}}$, en fonction de $\frac{1}{2}f'_{x_1}, \frac{1}{2}f'_{x_2}, \dots, \frac{1}{2}f'_{x_p}$.

Il faut donc en conclure que, toute réduction faite, f est une forme quadratique qui ne contient que ces dernières formes linéaires qui sont en nombre p, c'est-à-dire que sa décomposition irréductible comporte seulement p carrés : c'est ce qu'il s'agissait de prouver (1).

Conditions pour qu'une forme quadratique se réduise à un carré parfait ou à un produit de deux formes linéaires.

1606. Pour que la forme quadratique soit un carré parfait (sauf un coefficient numérique), il faut que sa décomposition irréductible ne renferme qu'un carré. Il suffit donc, pour

(1) Voir à ce sujet un Mémoire de M. BIEHLER sur les Équations linéaires (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XX, 1880).

trouver les conditions nécessaires, de faire $p = 1$ dans l'énoncé du théorème précédent (1605).

Par conséquent, *pour qu'une forme quadratique soit carré parfait, il faut et il suffit que tous les mineurs du second ordre de son discriminant soient nuls, sans que cette condition soit remplie par les mineurs du premier ordre ou par les éléments mêmes du discriminant.*

1607. Reprenons, par exemple, la forme quadratique à trois variables (1597)

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'xz + 2B''xy.$$

Le discriminant est ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

Pour que la forme soit un carré parfait, tous les mineurs du second ordre de Δ doivent être nuls, et l'on doit avoir

$$\begin{vmatrix} A' & B \\ B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B'' & B \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B'' & A' \\ B' & B \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} B'' & B' \\ B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B'' \\ B' & B \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile de voir que ces conditions se réduisent à trois. Trois d'entre elles se reproduisant deux fois, on n'a en réalité à considérer que les six conditions

$$(1) \qquad A'A'' = B^2,$$

$$(2) \qquad AA'' = B'^2,$$

$$(3) \qquad AA' = B''^2,$$

$$(4) \qquad A''B'' = BB',$$

$$(5) \qquad A'B' = BB'',$$

$$(6) \qquad AB = B'B''.$$

Les mineurs du premier ordre ne devant pas être tous nuls, supposons A différent de zéro, et considérons les égalités (2), (3), (6), où entre A.

En combinant les égalités (3) et (6) par division, on a

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{B''^2}{B'B''} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'}{B} = \frac{B''}{B'} \quad [\text{égalité (5)}];$$

en combinant (2) et (6), on a

$$\frac{AA''}{AB} = \frac{B'^2}{B'B''} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A''}{B} = \frac{B'}{B''} \quad [\text{égalité (4)}];$$

enfin, en combinant (2) et (3), on a

$$\frac{AA''}{AA'} = \frac{B'^2}{B''^2} = \frac{A''^2}{B^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{A'} = \frac{A''}{B^2} \quad [\text{égalité (1)}].$$

Les six conditions précédentes se réduisent donc aux trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire à la nullité des trois mineurs distincts du second ordre, où entre le mineur du premier ordre A, supposé différent de zéro.

Si l'on revient au discriminant Δ, on tire facilement des conditions trouvées, mises sous la forme

$$AA' = B''^2, \qquad AA'' = B'^2, \qquad AB = B'B'',$$

les deux suites de rapports

$$\frac{A}{B''} = \frac{B''}{A'} = \frac{B'}{B}, \qquad \frac{B''}{B'} = \frac{A'}{B} = \frac{B}{A''}.$$

Lorque la forme quadratique de trois variables est un carré parfait, deux lignes quelconques de son discriminant Δ *ont* donc *leurs éléments proportionnels* [ce qui assure à la fois la nullité du discriminant (357) et celle des trois mineurs du second ordre indiqués]. Cette propriété, comme il serait facile de l'établir, est générale et s'étend à une forme de n variables.

Enfin, si nous nous reportons à la décomposition en trois

carrés de la même fonction $f(x, y, z)$, telle que nous l'avons effectuée précédemment (1597), nous avons obtenu d'abord

$$f = \frac{1}{A}(Ax + B'z + B''y)^2 + f_1,$$

et l'on vérifie immédiatement que la forme complémentaire f_1 s'annule d'elle-même lorsque les conditions que nous venons de trouver sont satisfaites. f se réduit donc bien alors à un carré parfait, sauf un coefficient numérique.

1608. Cherchons encore les conditions pour qu'une forme quadratique se réduise à un produit de deux formes linéaires ou, d'après ce qui précède (1595), à la somme de deux carrés.

En faisant $p = 2$ dans l'énoncé du théorème fondamental (1605), on voit que tous les mineurs du troisième ordre du discriminant de la forme doivent être nuls, sans que la même condition soit remplie par les mineurs du second ordre.

Si l'on considère la forme quadratique à trois variables, *il faut* donc *que son discriminant* Δ *soit nul, et que les mineurs du second ordre ne soient pas tous nuls.*

Or, quand on la décompose d'une manière générale en trois carrés (1597), on a

$$f(x, y, z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2,$$

la valeur du coefficient γ étant

$$\gamma = \frac{\Delta}{AA' - B''^2}.$$

Si le mineur du second ordre

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}$$

est supposé, en particulier, différent de zéro, la condition $\Delta = 0$ entraîne $\gamma = 0$, et l'on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \alpha X^2 + \beta Y^2 = \alpha X^2 - \beta i^2 Y^2 \\ &= (X\sqrt{\alpha} + Y i\sqrt{\beta})(X\sqrt{\alpha} - Y i\sqrt{\beta}). \end{aligned}$$

Loi d'inertie des signes des formes quadratiques.

1609. Supposons que les coefficients des formes quadratiques considérées soient *réels*, hypothèse que nous n'avons pas eu besoin d'invoquer jusqu'à présent. En appliquant alors la méthode de réduction (1595) à une pareille forme, il peut se faire que, dans quelques-unes des formes linéaires obtenues, on ait à mettre $\sqrt{-1}$ ou i en facteur. La forme quadratique sera alors décomposée en une somme de carrés de formes linéaires, chacun de ces carrés étant affecté d'un coefficient *positif* ou *négatif*.

On peut alors démontrer le théorème suivant, qu'on désigne souvent sous le nom de *loi d'inertie des formes quadratiques à coefficients réels ou loi de M. Sylvester*.

1610. *Une forme quadratique, à coefficients réels, dont le discriminant n'est pas nul, ayant été transformée, de deux manières différentes et quelconques, en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes ou distinctes, à coefficients réels, et ces carrés étant affectés de coefficients numériques également réels, il y aura toujours, dans chaque décomposition obtenue, le même nombre de carrés à coefficients positifs et le même nombre de carrés à coefficients négatifs.*

Les deux décompositions étant irréductibles par hypothèse (1601), elles présenteront un même nombre de carrés (1599).

Cela posé, puisque les formes linéaires qui entrent dans les deux décompositions sont indépendantes, leur nombre est égal ou inférieur à celui des variables de la forme quadratique (1583, 1584).

Soit d'abord autant de formes linéaires que de variables. Le raisonnement étant général, supposons-en trois seulement.

L'une des décompositions étant $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$, il est impossible que l'autre décomposition se présente, *par exemple*, sous la forme $V_1^2 - V_2^2 - V_3^2$.

Posons, en effet,

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = V_1^2 - V_2^2 - V_3^2. \tag{1}$$

On en déduit, en transposant les carrés précédés du signe —,

$$X_1^2 + X_2^2 + V_2^2 + V_3^2 = X_3^2 + V_1^2. \qquad (2)$$

Il est facile de voir que cette identité est impossible.

Égalons séparément à zéro les formes linéaires du second membre. Nous obtiendrons le système

$$X_3 = 0, \qquad V_1 = 0,$$

où l'indétermination des inconnues est du premier ordre, puisque le nombre des variables est supérieur d'une unité à celui des équations. Mais ces solutions indéterminées devraient annuler aussi le premier membre de l'identité (2), c'est-à-dire satisfaire, puisqu'il s'agit d'une somme absolue de quatre carrés, au système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad V_3 = 0,$$

et, par suite, au système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 = 0.$$

Ce dernier système serait donc lui-même indéterminé. C'est ce qui est impossible, puisque, les formes linéaires considérées étant indépendantes, leur déterminant ne peut pas être égal à zéro (1583, 404). L'identité (1) elle-même ne peut donc avoir lieu.

Soit maintenant moins de formes linéaires que de variables. Le raisonnement étant général, supposons trois formes linéaires et cinq variables.

Reprenons les identités (1) et (2), et le système indéterminé

$$X_3 = 0, \qquad V_1 = 0.$$

L'indétermination des inconnues sera cette fois du troisième ordre, puisque le nombre des variables surpasse de trois unités celui des équations. Mais ces solutions indéterminées devraient encore, comme précédemment, satisfaire au système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 = 0,$$

qui est bien indéterminé, mais où l'indétermination des inconnues est seulement du deuxième ordre; car tous les déterminants formés en supprimant dans les trois équations

deux des cinq variables de toutes les manières possibles, ne peuvent être égaux à zéro (1584). On arrive donc encore à une conclusion inadmissible, l'identité (1) ne peut avoir lieu, et le nombre des carrés affectés de coefficients positifs ou négatifs est nécessairement le même dans les deux décompositions de la forme quadratique.

1611. Nous terminerons ici la théorie des polynômes homogènes du second degré, et l'Algèbre supérieure telle que nous avons voulu la présenter. La discussion de quelques équations importantes, que la considération des propriétés des formes quadratiques permet de simplifier et d'élucider, trouvera mieux sa place en Géométrie analytique.

FIN DE L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR

L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

SECONDE PARTIE.

LIVRE DIXIÈME.

ETUDE DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES.

1. Démontrer que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est un infiniment petit d'un ordre supérieur.

2. La tangente en un point M d'une courbe est, par définition, la limite de la sécante MM′, lorsque la distance des deux points M et M′ pris sur la courbe tend vers zéro ou devient un infiniment petit, qu'on peut prendre comme infiniment petit principal (220).

Démontrer que la direction limite de MM′ ne change pas, lorsqu'on substitue au point M′ un point M″ pris hors de la courbe et tel, que la distance M′M″ soit un infiniment petit d'ordre supérieur au premier ou à MM′.

3. Si une courbe AB est déduite d'une courbe *ab*, de manière que, à chaque point *m* de *ab* corresponde un point M de AB, la distance de deux points infiniment voisins de l'une des courbes est de même ordre que la distance des points correspondants de l'autre courbe.

4. Si une surface Σ est déduite d'une surface S, de manière que, à chaque point de l'une corresponde un point déterminé de l'autre, la distance de deux points infiniment voisins de l'une des surfaces est de même ordre que la distance des points correspondants de l'autre surface.

5. Étant donnée une courbe plane AB, si l'on abaisse des perpendiculaires (telles que OP) d'un point ou d'un *pôle* fixe O sur des tangentes (telles que MP) à la courbe AB, le lieu des projections du pôle sur les tangentes constitue une nouvelle courbe A′B′, qu'on appelle la *podaire* de la première par rapport au pôle choisi. La courbe AB est, à son tour, l'*anti-podaire* de la courbe A′B′.

Cela posé, on demande de mener la tangente en un point P de la podaire de la courbe AB, en démontrant que la normale en P à la podaire passe par le milieu du *rayon vecteur* OM qui correspond au point de contact M de la tangente MP à la courbe AB.

6. Retrouver, par les propriétés des infiniment petits, la construction connue de la tangente en un point donné d'une ellipse dont les foyers sont déterminés (*Géom.*, 670).

7. Quelle est la podaire de l'éclipse par rapport à l'un de ses foyers pris pour pôle?

8. Quelle est la podaire de la parabole par rapport à son foyer pris pour pôle?

9. Construire par points l'anti-podaire d'une courbe donnée par rapport à un pôle donné.

10. Application à l'ellipse, le pôle étant en son centre.

11. Lorsque, sur chaque normale à une courbe *ab*, l'on porte, à partir du point de contact de la tangente correspondante, une longueur constante, le lieu des points ainsi construit est une courbe AB qui a les mêmes normales que la courbe *ab* (à cause de cette propriété, les courbes *ab* et AB sont dites *parallèles*).

12. Différentier (1) la fonction

$$y = e^x(1 - x^3).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = e^x(1 - 3x^2 - x^3).$

13. Différentier la fonction

$$y = \left(\frac{x}{p}\right)^{px}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = p\left(\dfrac{x}{p}\right)^{px}\left[1 + l\dfrac{x}{p}\right].$

14. Différentier la fonction

$$y = \frac{x^n}{(1+x)^n}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}.$

15. Différentier la fonction

$$y = l\left[\frac{b}{2} + x + (a + bx + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = (a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$

---

(1) La différentielle de la fonction étant le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable, nous nous bornerons, dans les exemples suivants, à indiquer cette dérivée.

16. Différentier la fonction

$$y = \frac{x^3 - \frac{96}{25}x + \frac{288}{125}}{(4-5x)^2} + \frac{12}{125}\,l(4-5x).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5x^3}{(5x-4)^3}$.

17. Différentier la fonction

$$y = (a+x)^m(b+x)^n.$$

18. Différentier la fonction

$$y = \frac{1}{(a+x)^m} \cdot \frac{1}{(b+x)^n}.$$

19. Différentier la fonction

$$y = \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} - \operatorname{tang} x + x.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tang}^4 x.$

20. Différentier la fonction

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

21. Différentier la fonction

$$y = l(e^x + e^{-x}).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

22. Différentier la fonction

$$y = \text{arc tang}\,\frac{x(3a^2 - x^2)}{a(a^2 - 3x^2)}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a}{a^2 + x^2}$.

23. Différentier la fonction

$$y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-\sin x}$.

24. Différentier la fonction

$$y = e^{(x+a)^2}\sin x.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = e^{(x+a)^2}[2(a+x)\sin x + \cos x].$

25. Différentier la fonction

$$y = x^{\sin x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\cos x\, l x + \dfrac{\sin x}{x}\right].$

26. Différentier la fonction

$$y = \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x - \frac{13}{15}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{1}{2}\cot x\,\mathrm{cosec}\,x - \frac{3}{2}\,l\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \cot^3 x.$

27. Différentier la fonction

$$y = \frac{4x\sin x - \cos x}{20\cos^5 x} + \frac{4x\sin x - 2\cos x}{15\cos^3 x} - \frac{8}{15}(x\,\mathrm{tang}\,x + l\cos x).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\cos^6 x}.$

28. Différentier la fonction

$$y = l\,\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$

29. Différentier la fonction

$$y = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ny}{x\sqrt{1-x^2}}.$

30. Différentier la fonction

$$y = x + l\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+\mathrm{tang}\,x}.$

31. Différentier la fonction

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right]$.

32. Différentier la fonction

$$y = a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy\,la}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

33. Différentier la fonction

$$y = \operatorname{tang} a^{\frac{1}{x}}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sec^2 a^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, a^{\frac{1}{x}}\, la.$

34. Différentier la fonction

$$y = \sin mx \sin^m x.$$

$$\frac{dy}{dx} = m \sin^{m-1} x \sin(m+1)x.$$

35. Différentier la fonction

$$y = \frac{a + b \operatorname{tang}\frac{x}{2}}{a - b \operatorname{tang}\frac{x}{2}},$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ab}{a^2\cos^2\frac{x}{2} - b^2\sin^2\frac{x}{2}}$.

36. Différentier la fonction

$$y = e^{x^x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = y x^x (1 + lx)$.

37. Différentier la fonction

$$y = x^{x^x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = y x^x \left(\dfrac{1}{x} + lx + l^2 x\right)$.

38. Différentier la fonction

$$y = x^{e^x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = y e^x \left(\dfrac{1}{x} + lx \right).$

39. Différentier la fonction

$$y = \operatorname{tang} \sqrt{1 - x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = - \dfrac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}.$

40. On a les relations

$$m^2 = a + b + c, \qquad n^2 = a - b + c,$$
$$p^2 = \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 - 2c, \qquad q^2 = \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - 2c,$$

et l'on demande de différentier la fonction

$$y = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \operatorname{arc\,tang} \frac{2p \sin x}{m + n + (m-n)\cos x}$$
$$+ \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \operatorname{arc\,tang} \frac{2q \sin x}{m - n + (m+n)\cos x}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a + b\cos x + c\cos 2x}.$

41. Les fonctions x_1, x_2, x_3, ..., x_n étant définies par les relations

$$x_1 = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{x}}, \qquad x_2 = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_1}},$$
$$x_3 = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_2}}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \sqrt[p]{x\sqrt[q]{xx_{n-1}}},$$

on demande de différentier la fonction vers laquelle tend x_n, lorsque n croît indéfiniment.

Rép. $\dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{q+1}{pq-1} x^{\frac{q-pq+2}{pq-1}}.$

42. Un mobile parcourt la droite AB, de longueur d. Si sa vitesse initiale au point A demeurait constante, la distance d serait parcourue par lui en une seconde. Mais la vitesse du mobile diminue à mesure qu'il se rapproche du point B, en restant proportionnelle à la distance variable x du mobile à ce point. On demande à quelle distance x du point B sera parvenu le mobile, au bout du temps t.

Rép. $x = \dfrac{d}{e^t}.$

43. Différentier la fonction implicite

$$y^5 - 5xy + x^5 = 0.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^4 - y}{y^4 - x}.$

44. Différentier la fonction implicite

$$a^2 \sin\frac{x+y}{a} = xy.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - a\cos\dfrac{x+y}{a}}{a\cos\dfrac{x+y}{a} - x}.$

45. Différentier la fonction implicite

$$y^n = \frac{x+y}{x-y}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^n}{n(y^2 - x^2) + 2xy}.$

46. Différentier la fonction implicite

$$1 + xy = l(e^{xy} + e^{-xy}).$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}.$

47. Différentier la fonction implicite

$$\frac{l^2 y}{y^2} = \frac{l^2 x}{x^2}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{1 - lx}{1 - ly}.$

48. Différentier la fonction implicite

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = l\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}.$

49. Différentier la fonction implicite

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{y^3 - 3x^2y + x^3}{y^3 - 3xy^2 + x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = a.$$

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}.$

50. Montrer que l'exemple précédent n'est qu'un cas particulier de l'équation générale

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = a,$$

dont la différentiation conduit au même résultat.

51. Étant données les deux équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$ax + by + cz = p,$$

trouver les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

Rép. $\frac{dy}{dx} = \frac{az - cx}{cy - bz}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{bx - ay}{cy - bz}$.

52. Étant données les deux équations

$$x^3 + y^2 - 3z + a = 0,$$
$$z^2 - 2y^2 - x + b = 0,$$

trouver les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

Rép. $\frac{dy}{dx} = \frac{3(1 - 2zx^2)}{4y(z - 3)}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 6x^2}{2(z - 3)}$.

53. Étant données les équations

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad y = \frac{2}{e^u + e^{-u}}, \quad z = \arcsin x + \arcsin y,$$

on demande la valeur de la dérivée $\frac{dz}{du}$.

Rép. $\frac{dz}{du} = 0$.

54. Éliminer la constante arbitraire m de l'équation

$$(a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2.$$

Rép. $axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (bx^2 - ay^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - bxy = 0.$

55. Vérifier le théorème fondamental relatif aux fonctions homogènes (793), en l'appliquant aux deux fonctions

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

56. Trouver la deuxième dérivée de la fonction

$$y = (x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3.$$

Rép. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4e^x[(x-2)e^x + x + 2].$

57. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction

$$y = (a - bx)^p.$$

Rép. $\dfrac{d^ny}{dx^n} = (-b)^n p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)(a-bx)^{p-n}.$

58. Appliquer la formule qui donne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'un produit et qui est due à LEIBNITZ à la recherche de la $n^{\text{ième}}$ dérivée de l'expression

$$x^n(1-x)^n.$$

Rép. $\dfrac{d^n[x^n(1-x)^n]}{dx^n}$

$$= 1.2.3\dots n\left\{(1-x)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2(1-x)^{n-1}x + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(1-x)^{n-2}x^2 - \dots\right\}$$

59. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction

$$y = \frac{lx}{x}.$$

Rép. $\dfrac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\dfrac{1.2.3\dots n}{x^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - lx\right).$

60. Étant données les fonctions

$$y = \sin ax, \qquad y = \cos ax,$$

démontrer les formules

$$\frac{d^n \sin ax}{dx^n} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{d^n \cos ax}{dx^n} = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

61. Si l'on a

$$y = a\cos(lx) + b\sin(lx),$$

on a aussi

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (n^2+1)\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

62. Étant donnée la fonction

$$u = x^m y^n,$$

trouver l'expression de

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q}.$$

Rép. $\dfrac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1) \times n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)x^{m-p}y^{n-q}.$

63. Étant donnée la fonction

$$u = l\frac{\cos x}{\cos y},$$

prouver qu'on a

$$\left[1+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

64. Trouver la différentielle totale du premier ordre de la fonction

$$u = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3.$$

Rép. $du = 3(3x-2y)^2(3\,dx - 2\,dy).$

65. Trouver la différentielle totale du premier ordre de la fonction

$$u = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$$

Rép. $du = \dfrac{x\sqrt{2}(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

66. Trouver les différentielles totales successives de la fonction

$$u = \text{arc tang}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Rép. On obtient, pour la première, $du = \dfrac{y(1+y^2)\,dx + x(1+x^2)\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

67. Calculer directement les dérivées partielles p, q, r, s, t de la fonction précédente.

68. Étant donnée la fonction

$$\text{arc cos}\frac{y}{a} = l\left(\frac{x}{b}\right)^n,$$

prouver que l'on a

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2n^2\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

69. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Rép. $$\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2n}} \left[1 + \frac{n}{1}(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2 + \dots\right].$$

(Consulter l'excellent *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal,* par M. F. TISSERAND.)

70. Se servir du résultat précédent pour trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction

$$y = \varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Rép. $$\frac{d^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \left[\varphi^n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n}{1}(n-1)x\,\varphi^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2\,\varphi^{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots\right].$$

71. Trouver les valeurs des dérivées successives de $\arcsin x$, pour $x = 0$.

72. En déduire le développement en série de la fonction

$$y = \arcsin x,$$

par la formule de Maclaurin.

Rép. $$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots.$$

73. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{x^n - a^n}{lx^n - la^n},$$

pour $x = a$.

Rép. a^n.

74. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

pour $x = 1$, et vérifier le résultat obtenu en cherchant à quelle somme équivaut la fonction proposée.

Rép. $\frac{n(n+1)}{2}$.

75. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1) x^{n+2} - n^2 x^{n+3}}{(1-x)x^3},$$

pour $x = 1$, et vérifier le résultat obtenu en cherchant à quelle somme équivaut la fonction proposée.

Rép. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

76. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - lx},$$

pour $x = 1$.

Rép. 2.

77. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3},$$

pour $x = 0$.

Rép. $\frac{1}{6}$.

78. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1},$$

pour $x = \frac{\pi}{6}$.

Rép. 3.

79. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{lx}{x},$$

pour $x = \infty$.

Rép. 0.

80. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{\operatorname{tang} x}{\log\left(x - \frac{\pi}{2}\right)},$$

pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Rép. ∞.

81. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$x - x^2 l\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

pour $x = \infty$.

Rép. $\frac{1}{2}$.

82. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x,$$

pour $x = 0$.

Rép. $\frac{2}{3}$.

83. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4},$$

pour $x = 0$,

Rép. $\frac{1}{60}$.

84. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x},$$

pour $x = 0$.

Rép. 1.

85. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang} \frac{\pi x}{2a}},$$

pour $x = a$.

Rép. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

86. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$x^n l x,$$

pour $x = 0$.

Rép. 0 ou $-\infty$.

87. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$x^{x^n},$$

pour $x = 0$.

Rép. 1 ou 0.

88. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}},$$

pour $x = 0$.

Rép. $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$.

89. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$xe^{\frac{1}{x}},$$

pour $x = 0$.

Rép. ∞.

90. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\sqrt[x]{\cos mx},$$

pour $x = 0$.

Rép. 1.

91. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$(\operatorname{tang} x)^{\operatorname{tang} 2x},$$

pour $x = \frac{\pi}{4}$.

Rép. $\frac{1}{e}$.

92. Trouver la véritable valeur de l'expression

$$\frac{3x - 2\sin x - \operatorname{tang} x}{3x^5},$$

pour $x = 0$.

Rép. $-\frac{1}{20}$.

93. Étant donnée l'équation

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 6axy^2 + a^2x^2 = 0$$

trouver la véritable valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x = 0$.

Rép. ∞

94. Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

à l'aide de sa dérivée.

95. Même question pour les fonctions

$$y = l(1+x) - x, \qquad y = l(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

96. Étudier les variations de la fonction

$$y = x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\tan x,$$

lorsque x passe d'une manière continue de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

97. Étudier les variations de la fonction

$$y = x^{\frac{1}{x}},$$

lorsque x passe d'une manière continue de 0 à $+\infty$.

98. Trouver les valeurs de x qui répondent au maximum et au minimum de la fonction

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rép. $x = 1$ (max.), $\qquad x = -1$ (min.).

99. Trouver la valeur de x qui répond au minimum de la fonction

$$y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}.$$

La fonction admet-elle un maximum?

Rép. $x = 0$ (min.).

100. Un point lumineux, situé sur une verticale donnée, éclaire une surface horizontale infiniment petite dont la position est connue. A quelle hauteur, par rapport à cette surface, doit-on placer le point lumineux, pour que l'éclairement de la surface soit un maximum?

On sait que l'éclairement (ou la quantité de lumière reçue) varie proportionnellement au sinus de l'angle de la direction des rayons lumineux avec la surface éclairée, et en raison inverse du carré de la distance du point lumineux à cette surface

Rép. En désignant par a la distance de la verticale du point lumineux à la surface infiniment petite qu'il éclaire, on trouve, pour la hauteur qui correspond au maximum d'éclairement, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ et, pour le maximum de la quantité de lumière reçue, $y = \frac{1}{3a^2\sqrt{3}}$.

101. Trouver le maximum de la fonction

$$y = \frac{lx}{x^n}.$$

Rép. Ce maximum est $\frac{1}{ne}$, pour $x = e^{\frac{1}{n}}$.

102. Trouver le maximum de la fonction implicite

$$2yx^2 + y^2 + 4x - 3 = 0.$$

La fonction admet-elle un minimum?

Rép. Le maximum est $y = 2$, pour $x = -\frac{1}{2}$.

103. Trouver le maximum et le minimum de la fonction implicite

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Rép. Le maximum est $y = a\sqrt[3]{4}$, pour $x = a\sqrt[3]{2}$; le minimum est $y = 0$, pour $x = 0$.

104. Trouver, sur la circonférence d'un cercle donné, les points dont la distance à un point pris dans le plan du cercle est un maximum ou un minimum.

105. Les longueurs a, b, c étant rangées par ordre de grandeur décroissante, on a la relation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et l'on demande de trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Rép. $u = a$ (max.), $u = c$ (min.).

106. Un point lumineux, appartenant à la circonférence d'un cercle donné, éclaire une surface infiniment petite dont le plan est perpendiculaire à celui du cercle et passe par son centre. Cette surface étant supposée située au point d'intersection des deux plans et intérieure au cercle, quelle position doit occuper le point lumineux pour que la surface qu'on vient de définir reçoive le maximum d'éclairement?

107. Parmi tous les segments circulaires terminés par des arcs de même longueur $2a$, quel est celui dont la surface est un maximum, c'est-à-dire quel est le rayon du cercle correspondant?

Rép. Si x est ce rayon, on trouve $x = \frac{2a}{\pi}$. Le segment cherché est donc un demi-cercle.

108. Parmi tous les segments sphériques terminés à des zones à une seule base d'aire constante πa^2, quel est celui dont le volume est un maximum, c'est-à-dire quel est le rayon de la sphère correspondante?

Rép. On trouve que ce rayon doit être égal à la hauteur du segment sphérique. Le segment cherché est donc un hémisphère.

109. Trouver, sur la droite qui joint deux points lumineux, le point qui reçoit le maximum d'éclairement (*Alg. élém.*).

110. Parmi toutes les *Niches* de même surface, quelle est celle dont le volume est un maximum?

111. Trouver, parmi tous les cylindres de révolution inscrits dans une sphère donnée, celui dont la surface totale est un maximum?

112. Même problème pour les cônes de révolution inscrits dans une sphère donnée.

113. Le moment de la résistance étant donné, quel doit être, dans un levier du second genre, le bras de levier de la puissance pour qu'elle soit un minimum?

114. Étant donné un cône circulaire droit, on demande de le couper par un plan parallèle à l'une des génératrices, de manière que l'aire du segment parabolique obtenu soit un maximum (*Géom.*, 768, 769, 3°).

115. Étant donné un cône circulaire droit, quelle est, parmi toutes ses sections elliptiques, celle dont l'aire est un maximum? (*Géom.*, 702, 769, 1°.)

116. Quel est le rayon de la sphère dans laquelle l'aire totale d'un secteur sphérique de volume donné est un minimum?

117. Parmi tous les vases tronconiques de même capacité, dont l'arête fait un angle donné avec l'une ou l'autre base, trouver celui dont l'aire totale est un minimum? (Le vase peut être ouvert ou fermé.)

118. De tous les tétraèdres de même base et de même hauteur, quel est celui dont l'aire totale ou l'aire latérale est un minimum?

119. Trouver le minimum de la fonction

$$z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}.$$

Rép. Le minimum a lieu pour $x = y = \frac{a\sqrt[3]{3^2}}{3}$.

120. α et β étant des angles donnés, trouver le maximum de la fonction

$$\varphi = \cos x \cos\alpha + \sin x \sin\alpha \cos(y - \beta).$$

Rép. Le maximum a lieu pour $x = \alpha$ et $y = \beta$.

121. Trouver les maximums ou les minimums de la fonction

$$z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2),$$

en supposant le nombre donné a supérieur, inférieur ou égal au nombre donné b.

122. Trouver le maximum de la fonction

$$z = x^3 y^2 (6 - x - y).$$

Rép. Le maximum a lieu pour $x = 3, y = 2$.

123. Trouver le maximum de la fonction

$$z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Rép. Le maximum a lieu pour $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$.

124. Montrer que la fonction

$$z = xe^{y + x\sin y}$$

n'admet ni maximum ni minimum.

125. Trouver les maximums ou les minimums de la fonction

$$z = \frac{(ax + by - h)(ax + by - k)}{1 + x^2 + y^2}$$

126. Diviser un nombre A en trois parties x, y, z, telles, que la somme $\frac{xy}{2} + \frac{xz}{3} + \frac{yz}{4}$ soit un maximum ou un minimum.

Rép. $\frac{x}{21} = \frac{y}{20} = \frac{z}{6} = \frac{A}{47}$ (max.).

127. Un triangle étant donné, trouver, à l'intérieur de ce triangle, un point tel, que le produit de ses distances aux trois côtés soit un maximum.

Rép. Le maximum a lieu lorsque les droites qui joignent le point cherché aux trois sommets du triangle le divisent en trois triangles équivalents.

128. Trouver un point tel, que la somme de ses distances aux sommets d'un triangle donné soit un minimum.

(Ce problème a été proposé à FERMAT par TORRICELLI, et Fermat en donna trois solutions.)

Le point cherché est, d'une manière générale, à l'intersection des trois segments capables de 120° décrits sur les côtés du triangle. Examiner le cas où le triangle donné a un angle égal à 120°, et celui où il présente un angle plus grand que 120°.

129. Étant donnée l'équation

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0,$$

trouver le maximum de $\frac{dy}{dx}$.

130. Trouver les maximums ou les minimums de la fonction

$$u = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}.$$

Rép. En posant $r = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, le maximum de la fonction a lieu pour $x = ar$, $y = ar^2$, $z = ar^3$.

131. Trouver le minimum de la fonction

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables indépendantes étant liées par les relations

$$ax + by + cz = 1,$$
$$a'x + b'y + c'z = 1.$$

132. Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables indépendantes étant liées par les relations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$lx + my + nz = 0.$$

133. Déterminer, parmi tous les quadrilatères qu'on peut former avec les quatre côtés α, β, γ, δ pris dans l'ordre indiqué, celui dont l'aire est un maximum.

Rép. Le quadrilatère cherché doit être inscriptible.

LIVRE ONZIÈME.

ÉLÉMENTS DE CALCUL INTÉGRAL.

134. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4}.$$

Rép. $\frac{1}{2a^2} \operatorname{arc\,tang} \frac{x^2}{a^2} + C.$

135. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x^2}{a^2} + C.$

136. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}.$$

Rép. $\operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}} + C, \qquad \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2}} + C.$

137. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Rép. $\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

138. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \operatorname{tang}^2 x\,dx.$$

Rép. $\operatorname{tang} x - x + C.$

139. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

[Consulter l'excellent *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, par M. F. FRENET.]

140. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

Rép. $\frac{1}{4}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6}\right) + C.$

141. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int x^m e^x \, dx.$$

Rép. $[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \dots$
$\pm m(m-1)(m-2)\dots 2.1]e^x + C$

142. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc\,tang} x \, dx.$$

Rép. $\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x\right)\operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} l(1+x^2) + C.$

143. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} \, dx.$$

Rép. $\frac{\pi}{8} l.2.$

144. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{x \, lx}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Rép. $l.2 - 1.$

145. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \cos^2 mx \, dx.$$

Rép. $\frac{\pi}{2}.$

146. Déterminer par l'intégration la limite de la série

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}-\frac{x^9}{9}+\ldots.$$

en supposant les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Rép. $\frac{1}{3}\,l\,\frac{(x^2+x+1)^2}{1-x}$.

147. En effectuant la division $\frac{1}{x^2+1}$, trouver le développement de arc tang x, *dans le cas où x est plus grand que* 1.

Rép. $\text{arc tang}\,x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\ldots.$

148. Interpréter géométriquement la règle qui constitue le procédé d'intégration par parties.

149. Intégrer l'expression

$$\int\frac{dx}{x^2+bx+c},$$

lorsque les racines de l'équation $x^2+bx+c=0$ sont réelles.

150. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+bx+c}}$$

Intégrer les équations différentielles :

151. $$\frac{dy}{dx}-ay=x^4.$$

Rép. $y=Ce^{ax}-\frac{x^4}{a}-\frac{4x^3}{a^2}-\frac{4.3x^2}{a^3}-\frac{4.3.2x}{a^4}-\frac{4.3.2.1}{a^5}$.

152. $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2.$$

Rép. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}+e^{2x}(C+C'x)$.

153. $$\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = \sin mx.$$

Rép. $$y = \frac{\sin mx}{m^4 - 5m^2 + 6} + C\cos\left(\frac{1}{2^2}x + \alpha\right) + C'\cos\left(\frac{1}{3^2}x + \beta\right).$$

LIVRE DOUZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

PREMIERS PRINCIPES.

155. Vérifier, en considérant l'équation

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$$

dont on peut immédiatement trouver les racines, le procédé de résolution fondé sur la construction des *points-racines*.

156. Résoudre l'équation générale du troisième degré, connaissant la somme *ou* le produit de deux racines, et indiquer la relation qui existe alors entre les coefficients de l'équation.

157. Résoudre l'équation générale du troisième degré, dans le cas où l'une des racines est moyenne proportionnelle entre les deux autres, et déterminer la relation qui lie alors les coefficients de l'équation.

158. Résoudre l'équation du quatrième degré, dans le cas où ses racines forment une proportion dont la raison est donnée, et déterminer la relation qui lie alors les coefficients de l'équation.

159. Résoudre l'équation du quatrième degré, connaissant la somme *ou* le produit de deux racines, et indiquer la relation qui existe alors entre les coefficients de l'équation.

160. Résoudre l'équation

$$x^4 + x^3 - 25x^2 + 41x + 66 = 0,$$

sachant que l'une de ses racines est égale à $3 + i\sqrt{2}$.

161. Résoudre l'équation

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 9x - 54 = 0,$$

sachant que l'une de ses racines est égale à $\sqrt{2} + i$.

162. Déterminer les racines communes aux deux équations

$$2x^4 - 9x^3 - 6x^2 - 17x - 6 = 0,$$
$$x^5 - 4x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 9x + 2 = 0.$$

163. Former une équation du troisième degré, connaissant la somme des premières puissances, la somme des carrés et la somme des cubes des racines.

164. Former une équation du quatrième degré, connaissant les sommes respectives des premières, des secondes, des troisièmes et des quatrièmes puissances des racines.

165. Étant donnée une équation algébrique, trouver la somme des premières puissances et la somme des carrés des inverses de ses racines.

166. Étant donnée une équation algébrique, former l'équation dont les racines sont les carrés des racines de la proposée.

Appliquer le résultat obtenu à l'équation complète du troisième degré.

167. Faire disparaître le troisième terme de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

168. Chercher la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$

pour qu'une même transformation fasse disparaître à la fois le second et le quatrième terme de l'équation.

169. Chercher si l'équation

$$x^7 - 2x + 1 = 0$$

peut admettre des racines égales.

170. Appliquer la théorie des racines égales à l'équation

$$f(x) = x^6 - 6x^5 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Rép. $(x-2)^2(x+1)^4 = f(x)$.

171. Appliquer la théorie des racines égales à l'équation

$$f(x) = x^7 - 11x^6 + 42x^5 - 50x^4 - 59x^3 + 153x^2 - 108 = 0.$$

Rép. $(x+1)^2(x-2)^2(x-3)^3 = f(x)$.

172. Chercher la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

pour que cette équation ait une racine double.

173. Déterminer les coefficients de l'équation

$$x^4 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$

de manière que cette équation admette une racine triple *ou* deux racines doubles.

174. Si a est racine multiple d'ordre m de l'équation algébrique $f(x) = 0$, a est en même temps racine multiple d'ordre $m - 1$ de l'équation obtenue en multipliant respectivement les termes de $f(x)$, supposée sans lacune, par les termes consécutifs d'une progression par différence.

175. Montrer que, si l'équation

$$x^5 + qx^3 + rx^2 + t = 0$$

a une racine double, cette racine appartient à l'équation du second degré

$$x^2 - \frac{2q^2}{5r}x + \frac{5t}{3r} - \frac{4q}{15} = 0.$$

176. Indiquer la marche à suivre pour trouver deux racines d'une équation algébrique, lorsqu'on connaît leur produit.

Appliquer cette marche à l'équation

$$3x^4 - 19x^3 + 9x^2 - 19x + 6 = 0,$$

sachant qu'elle admet deux racines dont le produit est égal à 2

177. Trouver les racines de l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

sachant que ces racines forment une progression par différence.

[Les racines de l'équation proposée peuvent être représentées par a, $a + b$, $a + 2b$, ..., $a + (m-1)b$, et il faut trouver a et b.

En exprimant la somme des racines et la somme de leurs carrés en fonction des coefficients A_1 et A_2, on parvient aux formules

$$-A_1 = ma + \frac{m(m-1)}{2}b,$$

$$(m-1)A_1^2 - 2mA_2 = \frac{m^2(m^2-1)b^2}{12},$$

qui font connaître a et b.]

178. Sachant que les racines de l'équation

$$x^4 + pax^3 + (k^2 + k)a^2x^2 + qa^3x + a^4 = 0$$

sont en progression par quotient, les exprimer en fonction de a et de k. Calculer les constantes p et q en fonction des mêmes quantités.

[On représentera les quatre racines par $\frac{\alpha}{\beta^3}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^3$. — On doit trouver $p = q$.]

179. Résoudre les équations

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0,$$
$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0,$$

sachant que la première a une racine qui est le triple d'une racine de la seconde.

180. Résoudre les équations

$$2x^6 + x^5 - 13x^4 + 13x^2 - x - 2 = 0,$$
$$6x^5 - 11x^4 - 33x^3 + 33x^2 + 11x - 6 = 0,$$

en les ramenant à la forme générale des équations réciproques.

181. Transformer en équation réciproque l'équation

$$x^{2m} + A_1x^{2m-1} + A_2x^{2m-2} + \dots + A_mx^m + A_{m-1}ax^{m-1} + A_{m-2}a^2x^{m-2} + \dots + A_2a^{m-2}x^2 + A_1a^{m-1}x + a^m = 0.$$

[Il suffit de poser $x = z\sqrt{a}$.]

182. Si l'équation algébrique $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation obtenue en égalant à zéro la seconde dérivée de l'inverse $\frac{1}{f(x)}$ de son premier membre a toutes ses racines imaginaires.

183. Lorsqu'une équation réciproque $f(z) = 0$ a des racines multiples, sa transformée en $u = z + \frac{1}{z}$ admet des racines multiples du même ordre de multiplicité.

184. Chercher les fonctions symétriques simples des racines de l'équation

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0.$$

Rép. $S_1 = 1$, $S_2 = 15$, $S_3 = 19$,
$S_4 = 99$, $S_5 = 211$, $S_6 = 795$, ...,
$S_{-1} = -\frac{1}{6}$, $S_{-2} = \frac{85}{36}$, ...

185. Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation algébrique de degré m, $f(x) = 0$, pour que deux de ses racines satisfassent simultanément à l'équation du premier degré à deux inconnues $ay + bz = c$, et déterminer ces racines lorsque les relations nécessaires existent. — Discussion.

186. Étant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$, former l'équation dont les racines sont les racines carrées des racines de l'équation proposée, prises avec un seul signe. — Même question, en supposant les racines carrées prises avec leur double signe.

187. Étant donnée une équation algébrique de degré m, $f(x) = 0$, trouver les relations qui doivent lier ses coefficients pour que ses racines soient en progression par quotient.

[On commencera par chercher la condition pour que deux des racines de la proposée soient telles, que l'une d'elles soit q fois plus grande que l'autre. On généralisera ensuite, en remarquant que, si toutes les racines sont en progression par quotient de raison q, il y a $m - 1$ couples de racines satisfaisant à la même condition.]

188. Ayant vérifié qu'une équation algébrique de degré m, $f(x) = 0$, a ses racines en progression par quotient, les déterminer.

On distinguera deux cas, suivant que la raison est ou non donnée.

189. Déterminer le coefficient M de manière que l'équation

$$2x^4 - 15x^3 + Mx^2 - 30x + 8 = 0$$

ait ses racines en progression par quotient, et résoudre ensuite cette équation.

Rép. $M = 35$.

190. Sachant que le volume d'un segment sphérique à une base, de hauteur h, est exprimé par une fonction de h qui est du troisième degré, retrouver par la méthode des coefficients indéterminés la formule connue (*Géom.*, 596).

191. Chercher les $n - 1$ conditions nécessaires pour que les n équations obtenues en égalant à zéro les dérivées de la fonction entière

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_n x^{m-n} + \ldots + A_m,$$

depuis celle d'ordre $m - n$ jusqu'à celle d'ordre $m - 1$, aient une racine commune.

En conclure la forme générale des fonctions entières qui jouissent de cette propriété, et résoudre l'équation dont une pareille fonction est le premier membre, en supposant $n = m - 1$.

[Les $n-1$ conditions nécessaires sont

$$A_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{A_1}{m}\right)^2, \qquad A_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{A_1}{m}\right)^3, \quad \ldots,$$

$$A_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{A_1}{m}\right)^n.\Big]$$

192. La recherche des racines complexes de toute équation algébrique à coefficients réels peut se ramener à celle des diviseurs du premier membre de la forme x^2+px+q, à la condition de rejeter ceux où la quantité $q-\frac{p^2}{4}$ ne serait pas un carré.

193. Pour obtenir la somme des valeurs prises par une fonction entière $\varphi(x)$, lorsqu'on y remplace successivement x par toutes les racines de l'équation algébrique $f(x)=0$, il suffit d'effectuer la division

$$\frac{f'(x)\varphi(x)}{f(x)},$$

où le dividende et le diviseur sont supposés ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, jusqu'à ce qu'on écrive au quotient un terme indépendant de x. Le coefficient du premier terme du reste correspondant est la somme demandée.

LIVRE TREIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

DE L'ÉLIMINATION.

194. Appliquer la méthode d'élimination par les fonctions symétriques au système

$$(y-1)x^2+2x-5y+3=0,$$
$$yx^2+9x-10y=0.$$

[L'équation finale en y est

$$25y^4-70y^3-126y^2+414y-243=0.]$$

195 Vérifier que, si l'on traite l'exemple précédent par la méthode du plus grand commun diviseur, l'équation finale en y renferme des solutions étrangères.

196. Éliminer x entre les deux équations

$$x^3+3yx^2+(3y^2-y+1)x+y^3-y^2+2y=0,$$
$$x^2+2yx+y^2-y=0.$$

[L'équation finale en y est

$$y^2-y=0.]$$

197. Éliminer x entre les deux équations

$$x^3+2yx^2+2y(y-2)x+y^2-4=0,$$
$$x^2+2yx+2y^2-5y+2=0.$$

[L'équation finale en y est

$$y^3-7y^2+16y-12=0.]$$

198. Éliminer x entre les deux équations

$$(y-2)x^2-2x+5y-2=0,$$
$$yx^2-5x+4y=0.$$

[L'équation finale en y est

$$y^4+12y^3+87y^2-200y+100=0.]$$

199. Éliminer x entre les deux équations

$$(y-1)x^3+y(y+1)x^2+(3y^2+y-2)x+2y=0,$$
$$(y-1)x^2+y(y+1)x+3y^2-1=0.$$

[L'équation finale en y est

$$y^2-1=0.]$$

200. Chercher s'il existe des solutions pour les deux équations

$$yx^3-(y^3-3y-1)x+y=0,$$
$$x^2-y^2+3=0.$$

201. Former l'équation qui a pour racines les sommes deux à deux des carrés des racines de l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

202. Deux racines quelconques d'une équation algébrique $f(x)=0$ étant désignées par x_1 et x_2, et p et q étant deux constantes données, former l'équation qui a pour racines toutes les combinaisons représentées par l'expression

$$p(x_1+x_2)+qx_1x_2.$$

203. Éliminer l'angle α entre les deux équations

$$A\sin\alpha+B\cos\alpha=C,$$
$$A'\sin\alpha+B'\cos\alpha=C'.$$

204. Trouver l'équation finale qui répond à l'équation irrationnelle

$$1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=0.$$

205. Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation complète du troisième degré, pour qu'elle soit l'équation aux carrés des différences d'une équation du troisième degré de la forme

$$x^3+ax+b=0.$$

[Le carré de la moitié du coefficient du second terme de l'équation cherchée doit être égal au produit des coefficients du premier et du

troisième terme, en supposant le coefficient du premier terme égal à l'unité.]

206. Résoudre d'une manière générale le système

$$x^m + y^m = a,$$
$$x^n + y^n = b,$$

et appliquer la solution au cas particulier

$$x^3 + y^3 = 1343,$$
$$x^5 + y^5 = 116807.$$

207. Résoudre d'une manière générale le système

$$x^m + y^m + z^m = a,$$
$$x^n + y^n + z^n = b,$$
$$x^p + y^p + z^p = c,$$

et appliquer la solution au cas particulier

$$x + y + z = 48,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 810,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 14364.$$

208. Chercher les racines communes aux deux équations

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8 = 0,$$
$$x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8 = 0,$$

en suivant la marche indiquée au n° 1221.

[Les racines communes sont -4 et 2.]

209. Résoudre l'équation

$$x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 10 = 0,$$

sachant que deux de ses racines, x_1 et x_2, sont liées par la relation

$$x_2 = 2x_1 + 1.$$

210. Calculer (par les fonctions symétriques, par le procédé du plus grand commun diviseur ou par la méthode de Cauchy) l'équation aux carrés des différences de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

[Cette équation est du troisième degré et de la forme

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

On a

$$a = 6q - 2p^2 = 2(3q - p^2),$$
$$b = 9q^2 - 6p^2q + p^4 = (3q - p^2)^2,$$
$$c = 4q^3 - p^2q^2 + 4p^3r - 18pqr + 27r^2.]$$

211. Calculer de même l'équation aux carrés des différences de l'équation du quatrième degré, privée de son second terme,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

[Cette équation est du sixième degré et de la forme

$$z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez + f = 0.$$

On a (en corrigeant deux fautes d'impression qui se sont glissées dans l'*Analyse des équations numériques*) :

$$a = 8p, \qquad b = 2(11p^2 + 4r), \qquad c = 28p^3 - 16pr - 26q^2,$$
$$d = 17p^4 + 24p^2r + 48pq^2 - 112r^2,$$
$$e = 4p^5 + 32p^3r + 18p^2q^2 - 192pr^2 + 216q^2r,$$
$$f = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3.]$$

212. Désignons par a, b, c, ... les racines de l'équation algébrique de degré m, $f(x) = 0$, et par α, β, γ, ... les racines de l'équation dérivée $f'(x) = 0$.

Démontrer que le terme constant de l'équation aux carrés des différences de l'équation $f(x) = 0$ a pour expression

$$f'(a)f'(b)f'(c)\ldots = m^m f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots.$$

213. Combien y a-t-il de manières de résoudre m équations à m inconnues, en tenant compte de l'ordre des éliminations ?

214. Deux racines quelconques d'une équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré peuvent être exprimées rationnellement en fonction des $m - 2$ autres racines.

LIVRE QUATORZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

215. Soit l'équation à coefficients réels $f(x) = 0$ et a un nombre positif. Si le produit $f(x)(x+a)$ présente n variations de moins que le polynôme $f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins n ou $n+1$ racines imaginaires, suivant que n est pair ou impair.

216. Lorsqu'une équation algébrique $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, le carré du coefficient d'un terme quelconque surpasse ou égale le produit des coefficients des termes entre lesquels le terme considéré est placé. Une pareille équation a donc nécessairement des racines imaginaires, quand tous ses coefficients ne satisfont pas à la condition indiquée.

Ce théorème est connu sous le nom de *Théorème de* DE GUA (Académie des Sciences de Paris, 1741).

La réciproque n'a pas lieu, c'est-à-dire que, la condition énoncée étant remplie par tous les coefficients de l'équation, cette équation peut admettre des racines imaginaires.

217. Si les coefficients de trois termes consécutifs d'une équation algébrique, tels que

$$A x^m, \quad B x^{m-1}, \quad C x^{m-2},$$

satisfont à la condition

$$AC \geq \frac{B^2}{2},$$

l'équation proposée admet au moins deux racines imaginaires.

(OSSIAN-BONNET.)

218. Si les coefficients de trois termes consécutifs d'une équation algébrique, $f(x) = 0$, sont en progression par quotient, cette équation admet au moins deux racines imaginaires

219. Si les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique, $f(x) = 0$, sont en progression par différence, cette équation admet des racines imaginaires.

(HERMITE, *Grand Concours de* 1842.)

220. Lorsque, dans une équation algébrique, les coefficients de quatre termes consécutifs sont en proportion, les antécédents des deux rapports égaux ayant le même signe, l'équation proposée a des racines imaginaires. (PAUL SERRET.)

221. Démontrer, comme application du théorème de Rolle, que, si l'on donne

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)^n}{1.2 \dots n.2^n},$$

l'équation $f^n(x) = 0$, formée par la $n^{ième}$ dérivée de la fonction égalée à zéro, a ses n racines réelles et inégales, et comprises entre -1 et $+1$.

222. Démontrer la même proposition comme application du théorème de Sturm.

223. La moyenne arithmétique de deux nombres réels et inégaux surpasse leur moyenne géométrique; c'est l'inverse, lorsqu'il s'agit de deux imaginaires conjuguées.

Trouver, en s'appuyant sur cette propriété connue, les conditions de réalité des racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

[On devra supposer q négatif, ce qui est permis.]

224. Trouver, dans cette hypothèse, les mêmes conditions de réalité, en ramenant l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

au second degré.

225. Chercher, en appliquant les théorèmes généraux, la relation qui doit avoir lieu entre les coefficients de l'équation

$$x^m + px + q = 0,$$

pour qu'elle admette le plus grand nombre possible de racines réelles.

Rép. $\left(-\frac{p}{m}\right)^m - \left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} > 0.$

226. Déterminer la nature des racines d'une équation trinôme quelconque et, en particulier, le nombre des racines positives de l'équation

$$x^m - px^n + q = 0,$$

où les signes sont explicites, mais où les exposants peuvent être pairs ou impairs.

227. Démontrer que, si l'équation algébrique $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$f(x) - f'(x) = 0.$$

228. L'équation du $n^{\text{ième}}$ degré, formée en égalant à zéro la $n^{\text{ième}}$ dérivée de

$$x^n(x-1)^n,$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre 0 et 1.

229. Résoudre l'équation

$$x^m = (1-x)^{m-1}.$$

230. Les quantités $A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots$, et B étant des quantités réelles, l'équation

$$\frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} - B = 0$$

a toutes ses racines réelles.

231. En appliquant la transformation $z + \frac{1}{z} = x$ aux deux équations

$$z^{2n} + 1 = 0,$$

$$z^{2n} + z^{2n-1} + z^{2n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0,$$

démontrer, comme application du théorème de Sturm, que les équations en x qu'on en déduit ont toutes leurs racines réelles.

232. Démontrer que les deux équations

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0,$$

$$3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 + 11596x + 5602 = 0$$

ont toutes leurs racines imaginaires.

[Mémoire de LE VERRIER sur la planète *Uranus*. — *Connaissance des Temps*, 1849.]

233. Trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a, pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

[*École Polytechnique*, 1876, Composition d'admissibilité.]

234. L'équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)\dots(x-a_{2n-1}) + b^m(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)\dots(x-a_{2n}) = 0,$$

où b est positif, où m est un entier positif et où les différences a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_4, $\dots$, $a_{2n-1}-a_{2n}$, sont positives, a toutes ses racines réelles et respectivement comprises entre les nombres a_1 et a_2, a_2 et a_4, a_5 et a_6, $\dots$, a_{2n-1} et a_{2n}.

235. Chercher les racines imaginaires de l'équation

$$x^6+x+1=0.$$

236. Soient l'équation $x^3+3px^2+3qx+r=0$ et la quantité $A=\sqrt{p^2-q}$.

Démontrer que, si les trois racines de l'équation sont réelles, elles sont respectivement séparées par les quantités

$$-p-2A, \quad -p-A, \quad -p+A, \quad -p+2A.$$

Lorsque l'équation proposée n'a qu'une seule racine réelle, cette racine est extérieure à l'intervalle

$$(-p-2A, \quad -p+2A).$$

237. Déterminer les fonctions de Sturm pour l'équation complète du troisième degré.

Rép.
$$X = A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3,$$
$$X_1 = 3A_0x^2+2A_1x+A_2,$$
$$X_2 = 2(A_1^2-3A_0A_2)x+(A_1A_2-9A_0A_3),$$
$$X_3 = -4A_0A_1^3A_3+18A_0^2A_1A_2A_3-27A_0^3A_3^2+A_0A_1^2A_2^2-4A_0^2A_2^3.$$

238. Toute équation algébrique à coefficients entiers, réels ou imaginaires, dont le coefficient du premier terme est égal à l'unité, ne peut avoir de racines imaginaires fractionnaires. (Wantzel.)

239. Déterminer un nombre de trois chiffres, sachant que le produit des trois chiffres est 54, que le chiffre du milieu est le sixième de la somme des deux autres et que, en soustrayant 594 du nombre cherché, on obtient un nombre formé des mêmes chiffres pris en ordre inverse.

Rép. 923.

240. Trouver la base du système de numération dans lequel le nombre décimal 538 est exprimé par 4123.

Rép. 5.

241. D'une manière générale, A étant un nombre décimal exprimé,

dans le système dont la base inconnue est x, par les n chiffres a, b, c, ..., u, on a l'équation

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + u = A,$$

qui n'admet qu'une racine positive, laquelle doit être entière et supérieure aux chiffres a, b, c, ..., u.

242. Résoudre l'équation

$$8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3} = 125.$$

[L'une des racines est égale à 2.]

243. Partager un triangle par une droite parallèle à sa base, de manière que, si le triangle tourne autour de cette base, le volume engendré par le trapèze ainsi déterminé soit la moitié du volume total engendré par le triangle tournant.

[Il faut que la parallèle à la base passe par le milieu de la hauteur du triangle.]

244. a étant un entier, appliquer la méthode de recherche des racines commensurables à l'équation

$$x^3 - (2a+1)x^2 + a(a+2)x - a(a+1) = 0.$$

[L'une des racines est $a+1$.]

245. a et b étant des entiers, appliquer la méthode de recherche des racines commensurables à l'équation

$$x^3 + 3ax^2 - (b^4 + b^3 + b^2 - 3a^2)x - (b^5 + ab^4 + b^4 + ab^3 + ab^2 - a^3) = 0.$$

[Les trois racines sont $-(a+b)$, $-(a+b^2)$, $b(b+1)-a$.]

246. Trouver les valeurs entières de x et de y qui satisfont aux deux équations

$$x^3 + y^3 = 468, \quad x^5 + y^5 = 19932.$$

Rép. $x = 5, \quad y = 7.$

247. Résoudre l'équation

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$$

et trouver ses racines, toutes comprises entre 0 et 1, avec sept décimales exactes.

Rép. $x_1 = 0,1127016,$

$x_2 = 0,5,$

$x_3 = 0,8872983.$

248. Résoudre l'équation

$$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0$$

et trouver ses racines, toutes comprises entre 0 et 1, avec sept décimales exactes.

Rép. $x_1 = 0,0694318,$
$x_2 = 0,3300094,$
$x_3 = 0,6699905,$
$x_4 = 0,9305681.$

249. Résoudre l'équation

$$252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1 = 0$$

et trouver ses racines, toutes comprises entre 0 et 1, avec sept décimales exactes.

Rép. $x_1 = 0,0469100,$
$x_2 = 0,2307653,$
$x_3 = 0,5,$
$x_4 = 0,7692346,$
$x_5 = 0,9530899.$

250. Résoudre l'équation

$$924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 + 420x^2 - 42x + 1 = 0$$

et trouver ses racines, toutes comprises entre 0 et 1, avec sept décimales exactes.

Rép. $x_1 = 0,0337652,$
$x_2 = 0,1693953,$
$x_3 = 0,3806904,$
$x_4 = 0,6193095,$
$x_5 = 0,8306046,$
$x_6 = 0,9662347.$

251. Résoudre l'équation

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0$$

et trouver ses racines, toutes comprises entre 0 et 1, avec sept décimales exactes.

Rép. $x_1 = 0,0254462,$
$x_2 = 0,1292345,$
$x_3 = 0,2970774,$
$x_4 = 0,5,$
$x_5 = 0,7029226,$
$x_6 = 0,8707656,$
$x_7 = 0,9745536.$

Les cinq exemples précédents sont tirés de l'Ouvrage de GAUSS, intitulé : *Methodus nova integralium valores per approximationes inveniendi*. Gœttingue, 1814.]

252. $f(x) = 0$ étant une équation algébrique à coefficients entiers, si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation proposée n'a aucune racine entière. (GAUSS.)

253. Soit l'équation algébrique

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Cette équation ne peut avoir aucune racine commensurable dans les deux cas suivants :

1° Si les coefficients extrêmes A_0 et A_m étant des nombres impairs, l'un des résultats $f(1)$ et $f(-1)$ est aussi impair ;

2° Si aucun des quatre nombres A_0, A_m, $f(1)$, $f(-1)$ n'est divisible par 3. (E. MATHIEU.)

254. Séparer les racines de l'équation

$$x^4 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

255. Étant donnée l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

si l'on a

$$(m-1) A_1^2 - (m+2) A_2 < 0,$$

cette équation admet au moins une couple de racines imaginaires.

256. Soit l'équation algébrique $f(x) = 0$. Remplaçons x par $x + h$, et développons $f(x+h)$. Soient P_0 l'ensemble des termes du développement de degré pair en x, et P_1 l'ensemble des termes de degré impair. Cherchons le plus grand commun diviseur de P_0 et de $\frac{P_1}{x}$, en poursuivant l'opération jusqu'au reste du premier degré R, qui est fonction de h.

Cela posé, l'équation $f(x) = 0$ ou son premier membre a autant de diviseurs commensurables du second degré, qu'il y a de valeurs commensurables de h satisfaisant à l'équation $R = 0$. (PROUHET.)

257. Soit l'équation algébrique

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + x \mp R = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers. Si, abstraction faite du signe, N est la valeur absolue du plus grand coefficient et si R est un nombre positif moindre que

$$\frac{1}{2 + 4N},$$

l'équation $f(x) = 0$ a nécessairement une racine positive moindre que $2R$ *ou* une racine négative plus grande que $-2R$, suivant que le dernier terme de son premier membre est $-R$ *ou* $+R$.

258. Si l'équation

$$Ax^m + \ldots + Dx^p + Ex^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \ldots + U = 0$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients de quatre termes consécutifs quelconques doivent satisfaire à l'inégalité

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

[*Voir* le théorème énoncé, Exercice 218.] (CATALAN.)

259. Trouver l'équation qui a pour racines les racines de l'équation algébrique $f(x) = 0$, élevées à la $n^{ième}$ puissance.

260. Si l'équation algébrique $f(x) = 0$ est de degré pair et si ses racines se partagent par couples de même somme $2S$, l'équation dérivée $f'(x) = 0$ admet la racine S, et ses autres racines se partagent par couples de même somme $2S$.

Réciproquement, si l'équation algébrique $f(x) = 0$, de degré impair, admet la racine S et si ses autres racines se partagent par couples de même somme $2S$, les racines de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ se partagent par couples de même somme $2S$.

En outre, dans le premier cas, toutes les équations dérivées $f'(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, $f^{v}(x) = 0$, ... admettent la racine S; et il en est de même, dans le second cas, des équations dérivées $f''(x) = 0$, $f^{iv}(x) = 0$, $f^{vi}(x) = 0$, ...

261. L'équation algébrique

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0$$

ne peut pas avoir plus d'une racine réelle.

Il en est de même de l'équation

$$f(x) = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}x^n = 0,$$

lorsque γ est positif, *ou* lorsqu'il est inférieur à $-n$.

(SYLVESTER.)

262. Si l'équation algébrique $f(x) = 0$, de degré m, n'a que des racines imaginaires (auquel cas m est pair), l'équation

$$f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) + \ldots + a^m f^m(x) = 0$$

n'a elle-même que des racines imaginaires. (HERMITE.)

263. Déterminer les six racines rationnelles de l'équation

$$(a^5 - a)^4 (x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x (x - 1)^4.$$

(ABEL.)

Rép. $x_1 = a^4$, $\quad x_2 = \frac{1}{a^4}$,

$$x_3 = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4, \qquad x_4 = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^4,$$

$$x_5 = \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^4, \qquad x_6 = \left(\frac{a-i}{a+i}\right)^4.$$

264. Résoudre l'équation

$$x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 = 0.$$

[Elle admet les deux racines imaginaires

$$x = 7{,}0295488 \pm 1{,}5554515\, i.]$$

LIVRE QUINZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE).

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS.

265. Résoudre l'équation

$$x^3 + 3x = a^3 - \frac{1}{a^3},$$

sans avoir recours à la formule de Cardan, c'est-à-dire en la mettant sous une forme particulière.

266. Sachant que les coefficients de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

satisfont à la relation $3ac = b^2$, résoudre l'équation en la mettant sous une forme particulière.

267. Résoudre l'équation

$$x^3 + 6ax^2 - 36a^3 = 0.$$

[L'une des racines est $\frac{6a}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$.]

268. Résoudre l'équation

$$x^3 - 3(a^2 + b^2)x - 2a(a^2 - 3b^2) = 0.$$

[L'une des racines est $2a$.]

269. Résoudre l'équation

$$3x^3 - 6x^2 - 2 = 0.$$

[L'une des racines est $\frac{2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{32}}{3}$.]

270. Quelle relation doit lier les coefficients de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

pour que ses racines soient en progression par quotient?

Rép. $rp^3 = q^3$.

271. Si l'on diminue de h les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

à quelle condition doit satisfaire h pour que l'équation transformée ait ses racines en progression par quotient?

Rép. $27qh^3 - 9p^2h^2 - p^3 = 0$.

272. Quelle relation doit lier les coefficients de l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0,$$

pour que ses racines soient en proportion harmonique (t. III, 364)?

Rép. $r(3pq - r) = 2q^3$.

273. Si les racines de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

forment une proportion harmonique, il en est de même des racines de l'équation

$$(pq - r)y^3 - (p^3 - 2pq + 3r)y^2 + (pq - 3r)y - r = 0.$$

274. Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0.$$

[11 est une racine double.]

275. Lorsque l'équation du troisième degré privée de son second terme a une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités placées sous les radicaux cubiques de la formule de Cardan deviennent des cubes parfaits.

276. a, b, c étant les trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

calculer la fonction symétrique des racines

$$\Sigma a^2 b.$$

277. Les racines d'une équation du troisième degré, $f(x) = 0$, étant de la forme

$$p^2, \quad q^2, \quad 2pq,$$

les racines de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ sont rationnelles.

278. a étant la seule racine réelle de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

on peut mettre les deux autres racines sous la forme

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{4p^2 - 9aq + 6a^2p}{\sqrt{-(4p^3 + 27q^2)}}.$$

279. Lorsqu'une équation du troisième degré, $f(x) = 0$, et son équation dérivée, $f'(x) = 0$, ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première ont des expressions de la forme

$$a = m + h, \qquad b = mu^2 + h, \qquad c = 2mu + h,$$

les quantités m, h, u étant des nombres rationnels.

Réciproquement, si les racines a, b, c de l'équation $f(x) = 0$ admettent des expressions de cette forme, les racines de l'équation $f'(x) = 0$ sont rationnelles.

280. Soient l'équation complète du troisième degré

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

et son équation dérivée $f'(x) = 0$.

La condition de réalité des trois racines de l'équation $f(x) = 0$ peut être exprimée par la relation

$$4\overline{f'\left(-\frac{p}{3}\right)}^3 + 27\overline{f\left(-\frac{p}{3}\right)}^2 \leqq 0.$$

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

281. Montrer que la transformation linéaire

$$y = \frac{x+a}{x+b}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{a - by}{y - 1},$$

permet de ramener l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0$$

à la forme binôme

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 + pa - q}{b^3 + pb - q}}.$$

282. En appliquant la méthode de Descartes à la résolution de l'équation du quatrième degré privée de son second terme

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

nous avons trouvé (1386) la résolvante du troisième degré

$$z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4C)z - B^2 = 0.$$

Montrer que, si α, β, γ sont les trois racines de cette résolvante, les quatre racines de la proposée ont pour expressions

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma), \quad \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta), \quad \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha), \quad -\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

283. Résoudre l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 44x - 84 = 0.$$

[Deux des racines sont -2 et 3.]

284. Les racines d'une équation du quatrième degré, $f(x) = 0$, étant de la forme

$$p^2, \quad q^2, \quad p^2 + 2pq, \quad q^2 + 2pq,$$

les racines de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ sont rationnelles.

285. Déterminer la hauteur et le rayon de la base d'un segment sphérique à une base, connaissant son aire convexe et son volume. — Discussion.

286. Lorsqu'une équation algébrique, $f(x) = 0$, à coefficients commensurables, admet pour racine le nombre irrationnel $\sqrt[m]{a}$, le premier membre $f(x)$ est nécessairement divisible par le binôme $x^m - a$, étant entendu qu'aucune puissance de $\sqrt[m]{a}$, de degré moindre que m, n'est commensurable.

287. Soit une équation algébrique à coefficients entiers, $f(x) = 0$, dont le premier terme a pour coefficient l'unité. Si toutes les racines de cette équation ont l'unité pour module, elles se confondent toutes avec des racines de l'unité. (L. KRONECKER.)

288. Obtenir sous forme de déterminant l'équation aux différences ou aux carrés des différences de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0.$$

289. L'équation du cinquième degré

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

a ses cinq racines réelles, *ou* une seule racine réelle et quatre racines imaginaires, suivant qu'on a

$$p^5 + \frac{q^2}{4} < 0 \qquad ou \qquad p > 0.$$

290. Résoudre l'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} - \ldots - a^n = 0.$$

Rép. $x = \dfrac{a}{\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{k\pi}{n}\right) - 1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

291. Résoudre l'équation

$$x^6 - 6x^5 + ax^3 + 9x^2 - 3ax + b = 0.$$

[La résolution peut se ramener à celle de deux autres équations, l'une du second degré, l'autre du troisième.]

292. Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2 + x^2]^3 = 8x^5(x+2)^2.$$

Rép. -1, $\dfrac{-3-\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$, $\dfrac{-3+\sqrt{5}\pm\sqrt{2-2\sqrt{5}}}{2}$.

293. Chercher la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^5 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

pour qu'elle admette une racine double *ou* une racine triple.

LIVRE SEIZIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

(SUITE ET FIN).

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES.

294. Le dernier terme d'une suite de quantités surpasse le premier terme de la somme de toutes les différences entre deux termes consécutifs de la suite (1489).

Se servir de cette propriété évidente pour retrouver immédiatement la formule connue (286)

$$(m+1)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1} S_n + \frac{(n+1)n}{1.2} S_{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} S_{n-2} + \ldots + \frac{n+1}{1} S_1 + \overset{[m]}{S_0},$$

qui lie les sommes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, des premières, secondes, ..., $n^{\text{ièmes}}$ puissances des m premiers nombres entiers.

295. Si la différence $m^{\text{ième}}$ d'une fonction $f(x)$ est constante, la fonction est un polynome entier, de degré m.

296. Résoudre l'équation

$$3^x = 54x - 135.$$

[L'équation a 3 et 4 pour racines réelles.]

297. Résoudre l'équation

$$4^x + 5^x = 10.$$

Rép. $x = 1,0697432.$

298. Résoudre le système

$$x^y = 5, \qquad y^x = 4.$$

Rép. $x = 2,5416, \qquad y = 1,7253.$

299. Étendre aux équations transcendantes le théorème général du n° 1071.

Il est entendu que la fonction transcendante $f(x)$, égalée à zéro, reste continue dans l'intervalle où se font les substitutions, et que toute racine α de l'équation $f(x) = 0$ est regardée comme une racine multiple d'ordre n, si, outre $f(x)$, elle annule toutes ses dérivées jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$.

300. Démontrer que l'équation

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\, e^{\cos\psi},$$

où l'on a $a = \sin\psi$ et où l'on suppose $\psi < 90°$, admet deux racines égales.

Même question pour l'équation

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \cot\frac{\psi}{2}\, e^{-\cos\psi}.$$

[Les deux racines égales sont $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$ pour la première équation et $\cot\frac{\psi}{2}$ pour la seconde.] (V. Puiseux.)

301. Résoudre l'équation

$$x = \sin x(1 + 2\cos x).$$

302. Résoudre l'équation

$$\log x = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Rép. $x = 201°\,54'\,39'',3.$

303. Résoudre l'équation

$$x \operatorname{tang} x = 2^x.$$

[Cette équation admet une infinité de racines réelles. La plus petite des racines positives est

$$x = 62°\,50'\,59'',95.]$$

304. Résoudre l'équation

$$x \sin\frac{x}{2} = 1.$$

Rép. $x = 1,781682.$

305. Résoudre l'équation

$$x^x = e^{\frac{3\pi}{2}}.$$

Rép. $x = 3,644174.$

306. Résoudre l'équation

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Rép. $x = 1,19967867.$

307. Résoudre l'équation

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

[Cette équation, qu'on rencontre dans la théorie des vibrations des corps élastiques, a une infinité de racines réelles, qui sont deux à deux égales et de signes contraires. Les racines positives sont terminées dans les quadrants de rang pair. La plus petite racine positive est $x = 0$. Poisson (Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VIII) trouve, pour la seconde racine positive comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la valeur 2,56334 et, pour la troisième racine positive comprise entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, la valeur 6,05973.]

308. Résoudre l'équation

$$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0.$$

[Cette équation, qu'on rencontre dans la même théorie, a ses racines deux à deux égales et de signes contraires et, à chaque racine réelle a, correspond une racine imaginaire ai. La plus petite racine positive est $x = 0$. La seconde racine positive est comprise entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. Poisson (*loc. cit.*) indique pour cette racine la valeur 4,730003.]

309. Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A\sin x + B,$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de ces racines.

Appliquer les résultats obtenus à l'équation

$$x = 3142\sin x + 157.$$

Rép. L'équation ci-dessus admet 1999 racines réelles.

(*École Polytechnique*, concours de 1857.)

[*Voir* J.-A. Serret : Note sur l'équation dont dépend l'anomalie excen-

trique et sur les séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des corps célestes (*Annales de l'observatoire de Paris*, t. V).]

310. Trouver les racines réelles de l'équation

$$a^x + b^x = c^x,$$

où a, b, c sont des nombres positifs.

311. Trouver les racines réelles et imaginaires de l'équation

$$e^{2x} + e^x = 1.$$

312. Dans un cercle de rayon r, on donne la corde $2a$ et l'aire S d'un segment circulaire moindre qu'un demi-cercle. On demande de calculer le plus petit arc $2x$ qui répond à la corde $2a$.

Appliquer le résultat obtenu au cas où le segment considéré est supposé équivalent au carré construit sur sa demi-corde.

Rép. $2x = 138°\,11'\,53''$ (à $1''$ près).

313. k est un nombre donné; α est un angle également donné, compris entre 0° et 180°; h, g, G sont des inconnues auxiliaires liées entre elles par les relations

$$\mathrm{G}\sin g = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{G}\cos g = k\sin\alpha + \cos\alpha,$$
$$h = \frac{\mathrm{G}\sin^3\alpha}{k}.$$

Cela posé, on demande de déterminer toutes les racines réelles de l'équation

$$h\sin^4 x = \sin(x - \alpha).$$

On donnera à G le signe de k.

(*Concours général*, 1858.)

[L'équation dont il s'agit se rencontre en Astronomie, lorsqu'on veut trouver l'orbite d'une planète à l'aide de trois observations seulement (Gauss, *Theoria motus corporum cœlestium...*, 1809).]

Rép. n étant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul, on a, pour les racines réelles de l'équation proposée, les quatre formules suivantes :

$$14°\,35'\,5'' + n.360°,$$
$$32°\,2'\,28'' + n.360°,$$
$$137°\,27'\,39'' + n.360°,$$
$$193°\,4'\,13'' + n.360°.$$

314. Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes, par une corde menée de l'extrémité du diamètre qui lui sert de base.
(EULER.)

315. Partager l'aire d'un cercle en trois parties équivalentes, par deux cordes menées d'un même point de sa circonférence. (EULER.)

316. Dans un cercle OA, déterminer l'arc AM, de manière que le secteur OAM soit la moitié du triangle formé par le rayon OA, la tangente AT et la sécante OMT. (EULER.)

317. Décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}$$

en fractions simples, et intégrer la différentielle correspondante.

318. Même question pour la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2}.$$

319. L'échelle de relation d'une série récurrente étant exprimée par l'équation

$$\alpha T_n + \beta T_{n+1} + T_{n+2} = 0,$$

on a

$$\alpha T_n^2 + \beta T_{n+1} T_n + T_{n+1}^2 = \text{const.}$$

320. Ramener la forme quadratique de n variables,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

composée de $n+1$ carrés, à la somme de n carrés de formes linéaires des mêmes variables.

TABLE

des arcs de leurs lignes trigonométriques, exprimés en parties décimales du rayon 1, pour les 90 premiers degrés.

ARC.	DEGRÉS.	SINUS.	COSINUS.	TANG.	COT.		
0,00000	0°	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90	1,57079
0,01745	1	0,01745	0,99984	0,01745	57,2900	89	1,55334
0,03490	2	0,03490	0,99939	0,03492	28,6363	88	1,53589
0,05236	3	0,05234	0,99863	0,05241	19,0811	87	1,51843
0,06981	4	0,06976	0,99756	0,06993	14,3007	86	1,50098
0,08726	5	0,08716	0,99619	0,08749	11,4301	85	1,48353
0,10472	6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84	1,46607
0,12217	7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83	1,44862
0,13962	8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82	1,43117
0,15708	9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81	1,41371
0,17453	10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80	1,39626
0,19198	11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79	1,37881
0,20944	12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78	1,36125
0,22689	13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77	1,34390
0,24434	14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76	1,32645
0,26179	15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75	1,30899
0,27925	16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74	1,29154
0,29670	17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73	1,27409
0,31415	18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72	1,25663
0,33161	19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71	1,23918
0,34906	20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70	1,22173
0,36651	21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69	1,20427
0,38397	22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68	1,18682
0,40142	23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67	1,16937
0,41887	24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66	1,15191
0,43633	25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65	1,13446
0,45378	26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64	1,11701
0,47123	27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63	1,09955
0,48869	28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62	1,08210
0,50614	29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61	1,06465
0,52359	30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60	1,04719
0,54105	31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59	1,02974
0,55850	32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58	1,01229
0,57595	33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	57	0,99483
0,59341	34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56	0,97738
0,61086	35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55	0,95993
0,62831	36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54	0,94247
0,64577	37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53	0,92502
0,66322	38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52	0,90757
0,68067	39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51	0,89011
0,69813	40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50	0,87266
0,71558	41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49	0,85521
0,73303	42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48	0,83775
0,75049	43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47	0,82030
0,76794	44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46	0,80285
0,78539	45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45°	0,78539
		COSINUS.	SINUS.	COT.	TANG.	DEGRÉS.	ARC.

TABLEAUX

DES

DIFFÉRENTIELLES FONDAMENTALES

ET DES

INTÉGRALES CORRESPONDANTES.

Fonctions.	Différentielles.
$y = a \pm x,$	$dy = \pm dx,$
$y = ax,$	$dy = a\,dx,$
$y = \frac{a}{x},$	$dy = -\frac{a\,dx}{x^2},$
$y = x^m,$	$dy = mx^{m-1}\,dx,$
$y = \sqrt[m]{x},$	$dy = \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}},$
$y = \sqrt{x},$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$
$y = \log x,$	$dy = \log e \frac{dx}{x},$
$y = lx,$	$dy = \frac{dx}{x},$
$y = a^x,$	$dy = a^x \frac{\log a}{\log e}\,dx,$
$y = a^x,$	$dy = a^x la\,dx,$
$y = e^x,$	$dy = e^x\,dx,$
$y = \sin x,$	$dy = \cos x\,dx,$
$y = \cos x,$	$dy = -\sin x\,dx,$
$y = \text{tang}\,x,$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x},$
$y = \cot x,$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x},$
$y = \text{séc}\,x,$	$dy = \text{tang}\,x\,\text{séc}\,x\,dx,$
$y = \text{coséc}\,x,$	$dy = -\cot x\,\text{coséc}\,x\,dx,$

$$\int \pm dx = \pm x + C,$$

$$\int a\,dx = ax + C,$$

$$\int -\frac{a\,dx}{x^2} = \frac{a}{x} + C,$$

$$\int mx^{m-1}dx = x^m + C,$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ (excepté pour } m = -1).$$

$$\int \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} = \sqrt[m]{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{x^{m-1}}} = m\sqrt[m]{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C = lx + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} l \frac{x-a}{x+a} + C,$$

$$\int a^x \frac{\log a}{\log e} dx = a^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a} a^x + C = \frac{a^x}{la} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x\,dx = \operatorname{séc} x + C,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \operatorname{coséc} x\,dx = -\operatorname{coséc} x + C,$$

Fonctions.	Différentielles.
$y = \arcsin x,$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$
$y = \arccos x,$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$
$y = \arctang x,$	$dy = \frac{dx}{1+x^2},$
$y = \arccot x,$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2},$
$y = \arcsec x$	$dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$
$y = \arccosec x,$	$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$
$y = l\sin x,$	$dy = \cot x\, dx.$
$y = l\cos x,$	$dy = -\tang x\, dx,$
$y = l\tang x,$	$dy = \frac{dx}{\sin x \cos x},$
$y = l\tang \frac{x}{2},$	$dy = \frac{dx}{\sin x},$
$y = l\tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$	$dy = \frac{dx}{\cos x},$
$y = f(u, v, t, \ldots)$ (1),	$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dt}dt + \ldots,$
$y = u + v - t \ldots,$	$dy = du + dv - dt \ldots,$
$y = uvt \ldots,$	$dy = vt\, du + ut\, dv + uv\, dt + \ldots,$
$y = \frac{u}{v},$	$dy = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2},$
$y = u^m,$	$dy = mu^{m-1}\, du,$
$y = u^v,$	$dy = u^v\left(\frac{dv}{dx}lu + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right)dx.$

(1) $u, v, t, \ldots$ désignent des fonctions de x.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{-dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc cot}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc séc}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc coséc}\,\frac{x}{a} + \text{C},$$

$$\int \cot x\,dx = l \sin x + \text{C},$$

$$\int -\tan x\,dx = l \cos x + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \tan x + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \tan \frac{x}{2} + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = l \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{a} + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a}\, l \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2} + a} + \text{C},$$

$$\int (du + dv - dt) = \int du + \int dv - \int dt.$$

FIN DU TOME QUATRIÈME.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
66955 Quai des Grands-Augustins, 55.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

SECONDE PARTIE.

COURS
DE MATHÉMATIQUES.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

SECONDE PARTIE.

LIVRE SIXIÈME.

ÉTUDE DES QUANTITES IMAGINAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

ORIGINE DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Du véritable rôle de l'Algèbre.

799. Il ne sera pas inutile de revenir ici, très succinctement, sur des notions déjà établies (t. I, *Alg. élém.*), afin de définir plus complètement le rôle de l'Algèbre.

Comme nous l'avons dit, il y a trois choses à distinguer dans la résolution d'un problème d'Algèbre : sa mise en équations, la résolution des équations ainsi obtenues, la discussion des valeurs qu'elles fournissent pour les inconnues.

La mise en équations n'est que la traduction algébrique des relations établies par l'énoncé entre les données et les inconnues du problème. D'autre part, la résolution des équations est soumise à des règles fixes. Par conséquent, si aucune erreur ne s'est glissée dans la mise en équations et dans la

résolution qui l'accompagne, les valeurs trouvées pour les inconnues, *quelle que soit leur forme,* doivent nécessairement satisfaire aux équations du problème ou *les transformer en identités;* et c'est ce qui a toujours lieu.

Mais l'Algèbre, en raison des symboles généraux qu'elle emploie, conduit, pour les valeurs des inconnues, à des *formules* qui correspondent à tous les cas, possibles ou impossibles actuellement, du problème qu'on étudie. Il faut donc *discuter* ces formules, c'est-à-dire en déduire *les conditions de possibilité* du problème *tel qu'il a été posé,* chercher entre quelles limites les données doivent se mouvoir pour que ces conditions soient remplies, et interpréter les résultats auxquels on parvient lorsque les données franchissent ces limites.

C'est ainsi que l'Algèbre, après avoir indiqué dans ses formules toutes les opérations nécessaires à la détermination des inconnues, sans se préoccuper de savoir d'avance si ces opérations pourront ou non s'effectuer directement dans certains cas, nous laisse le soin de rechercher ce que les diverses formes de résultats peuvent signifier, suivant la nature du problème à résoudre.

800. L'entière généralité des formules algébriques n'est apparue aux géomètres que très lentement. Pendant longtemps, les racines négatives des équations, par exemple, ont été regardées comme des *solutions fausses.*

On sait aujourd'hui, et nous sommes entré précédemment dans de longs détails à ce sujet (*Alg. élém.*, 199 à 203), que, toutes les fois qu'une grandeur, représentée dans ses états successifs par des longueurs prises à une échelle déterminée, est susceptible d'être comptée, sur une même ligne et à partir d'une certaine origine fixe, dans deux sens nettement différents, *le changement de sens est lié algébriquement au changement de signe;* de sorte que, si l'on regarde comme positives, dans la mise en équations, les valeurs de cette grandeur qui sont comptées, à partir de l'origine, dans un certain sens d'ailleurs arbitraire, les résultats négatifs indiquent ensuite simplement des valeurs de la même grandeur comptées en sens contraire à partir de la même origine.

On voit par là que les quantités négatives peuvent être tout aussi admissibles, tout aussi palpables, tout aussi réelles que les quantités positives. Et c'est pourquoi l'on a admis d'abord

que ces deux espèces de quantités constituent, dans leur ensemble, les quantités dites *réelles*.

801. On comprend facilement quelle extension peut prendre dans les applications le principe fondamental que nous venons de rappeler. Nous n'insisterons pas sur ce point, et nous renverrons à l'Algèbre élémentaire et à la Géométrie analytique.

Nous rappellerons seulement qu'une solution négative peut n'être pas acceptable et indiquer une impossibilité complète de satisfaire à la question, lorsqu'il s'agit de grandeurs non susceptibles d'être directement opposées ou pour lesquelles un changement de sens ne modifie en rien les conditions intrinsèques du problème (*Alg. élém.*, 204).

Il peut en être de même, d'ailleurs, d'une solution positive, lorsque certaines conditions de l'énoncé n'ont pu être exprimées dans la mise en équations (*Alg. élém.*, 198).

802. Finalement, il importe de comprendre que l'Algèbre ne crée ou ne détruit rien. Elle ne fait que traduire exactement l'énoncé de la question qu'on lui soumet, sans modifier les rapports qui en résultent; et elle se borne à mettre sous nos yeux, à l'aide de ses symboles et des signes adoptés, le *Tableau* des opérations qui permettent de déduire les inconnues des données.

Si, par suite des valeurs attribuées aux données, ces opérations présentent quelques particularités inattendues ou quelques impossibilités, l'Algèbre nous avertit ainsi, par un don merveilleux, de l'état critique de la question et sollicite notre interprétation.

En un mot, les quantités confiées à l'Algèbre conservent en elles-mêmes toute leur réalité; mais elles peuvent, lors de la résolution des équations, se trouver engagées dans des opérations qui deviennent impossibles au point de vue abstrait ou au point de vue primitivement adopté, quand les données reçoivent certaines valeurs. Le véritable rôle de l'Algèbre consiste à dénoncer ces impossibilités par les formes spéciales que revêtent, dans ce cas, les valeurs des inconnues. A nous, ensuite, de les expliquer.

Nous allons étendre ces considérations, déjà amplement vérifiées à l'égard des quantités négatives, aux quantités dites *imaginaires*.

Origine des quantités imaginaires.

803. On sait (*Alg. élém.*, 235 et suiv.) que l'équation générale du second degré à une inconnue

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a pour expression de ses racines

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La quantité $b^2 - 4ac$ placée sous le radical de la valeur de x pouvant être positive, négative ou nulle, il y a trois cas à distinguer.

Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, les racines sont réelles et inégales. Si l'on a $b^2 - 4ac = 0$, elles sont réelles et égales. Enfin, si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, elles sont dites *imaginaires*.

Cette expression vient de ce que, dans ce dernier cas, aucune valeur *réelle* (800) de x ne peut satisfaire à l'équation.

En effet, $b^2 - 4ac$ étant une quantité négative, on peut poser, en désignant par k une quantité réelle dont le carré sera nécessairement positif,

$$b^2 - 4ac = -k^2.$$

L'équation donnée peut alors, comme on l'a vu, se mettre sous la forme

$$(2ax + b)^2 + k^2 = 0.$$

Son premier membre étant la somme de deux carrés reste donc positif pour toutes les valeurs *réelles* de x. Par conséquent, aucune valeur *réelle* de x ne peut l'annuler, et l'Algèbre doit avertir de cette impossibilité (802) par une forme spéciale que nous allons préciser et simplifier.

En remplaçant $b^2 - 4ac$ par $-k^2$, on a, pour les racines,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-k^2}}{2a}.$$

Or la racine carrée d'une quantité négative $-k^2$ ne peut être, par définition (130, 2°), représentée par aucun résultat réel. Et c'est par cette impossibilité équivalente que l'Algèbre répond

à celle manifestée par la forme du premier membre de l'équation.

Mais les règles trouvées pour les opérations successives devant rester immuables, quelles que soient les quantités qui y sont soumises, sous peine d'enlever à l'Algèbre son caractère fondamental d'universalité, il faut toujours que $\sqrt{-k^2}$ élevée au carré reproduise $-k^2$. Il faut, en outre, que, pour élever un produit au carré, on n'ait qu'à élever chaque facteur au carré et que, par conséquent, pour extraire la racine carrée d'un produit, on n'ait qu'à extraire la racine carrée de chaque facteur.

Nous écrirons donc

$$\sqrt{-k^2} = \sqrt{k^2(-1)} = k\sqrt{-1}. \tag{1}$$

Cette transformation a l'avantage de faire porter l'*imaginarité* sur le seul symbole $\sqrt{-1}$. Nous disons *symbole*, parce qu'il n'y a dans $-k^2$ que la quantité positive k^2 soumise à une soustraction indiquée par le signe *moins*, de sorte que $\sqrt{-1}$ revient au fond à un signe d'opération.

D'ailleurs, pour qu'il y ait identité entre les carrés des deux membres de l'égalité (1), il faut que le carré de $\sqrt{-1}$ soit, lui aussi, regardé comme étant égal à -1.

Nous poserons, suivant l'usage,

$$\sqrt{-1} = i,$$

sous la réserve de remplacer toujours dans les calculs i^2 *par* -1.

En revenant à l'expression des racines, nous aurons, d'après les notations précédentes,

$$x = \frac{-b \pm ki}{2a}$$

et, en posant $-\frac{b}{2a} = \alpha$, $\frac{k}{2a} = \beta$, α et β étant des quantités réelles, il viendra finalement

$$x = \alpha \pm \beta i.$$

Telle est la forme générale des quantités ou des expressions imaginaires auxquelles la résolution de l'équation générale du second degré à une inconnue peut donner naissance.

Ces expressions comprennent deux quantités réelles associées par le signe + ou par le signe —, la seconde de ces quantités étant affectée du facteur ou du signe d'opération $\imath$. On a proposé, par suite, de donner aux expressions imaginaires du second degré la dénomination de *quantités complexes*. Et cette dénomination, qui supprime le mot *imaginaire*, sera encore mieux justifiée quand nous exposerons le mode de représentation géométrique de ces quantités.

Si l'on suppose $\alpha = 0$ (ou $b = 0$), l'imaginaire *complexe* se réduit à l'imaginaire *simple* βi, qui répond à l'équation du second degré privée de son second terme, $ax^2 + c = 0$, lorsque les racines de cette équation sont imaginaires.

804. Il est facile de vérifier que, si l'on applique les règles habituelles de calcul en tenant compte de ce qui précède (803), les valeurs de l'inconnue satisfont à l'équation proposée, aussi bien lorsqu'elles sont *imaginaires* que lorsqu'elles sont *réelles* (799).

En effet, on a, dans la première hypothèse, en prenant l'équation sous la forme correspondante (803)

$$(2ax + b)^2 + k^2 = 0,$$

et en substituant les valeurs de x (803),

$$(-b \pm ki + b)^2 + k^2 = 0.$$

805. On peut remarquer que toute équation du second degré, à une inconnue et à coefficients réels,

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

répond à cette question : *trouver deux nombres x' et x'', connaissant leur somme réelle* S *et leur produit réel* P (*Alg. élém.*, 243).

On a donc

$$x' = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}, \qquad x'' = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}.$$

Il en résulte que les racines x' et x'' sont *réelles* tant que le produit P demeure inférieur au carré de la demi-somme $\frac{S}{2}$, et qu'elles sont *imaginaires* dès que le produit P devient supérieur à ce carré.

L'Algèbre indique ainsi qu'il y a *contradiction* entre la réalité des racines et la condition $P > \frac{S^2}{4}$, et les racines ne revêtent la forme imaginaire que par suite des valeurs spéciales substituées aux données S et P (802).

Si l'on a, comme on vient de le dire,

$$x' + x'' = S, \quad x'x'' > \left(\frac{x' + x''}{2}\right)^2,$$

on en déduit facilement

$$(x' - x'')^2 < 0,$$

inégalité qui ne peut être satisfaite par aucunes valeurs *réelles* de x' et de x''.

806. On a essayé d'interpréter les solutions imaginaires d'une manière analogue à celle qui a réussi pour les solutions négatives (*Alg. élém.*, 199).

Dans le cas que nous venons de considérer (805), les deux racines x' et x'', lorsqu'elles sont imaginaires, peuvent évidemment s'écrire (803)

$$x' = \frac{S}{2} + \sqrt{P - \frac{S^2}{4}}\sqrt{-1}, \qquad x'' = \frac{S}{2} - \sqrt{P - \frac{S^2}{4}}\sqrt{-1}.$$

De même que l'on rend positives les racines négatives pour les interpréter par comparaison, il a pu sembler naturel de rendre réelles les deux racines imaginaires, en supprimant dans les formules ci-dessus le signe d'imaginarité $\sqrt{-1}$, et de chercher ensuite de quelle façon l'énoncé de la question primitive devait être modifié pour s'adapter à ces racines réelles.

Or, la somme des nouvelles racines obtenues étant toujours S, leur produit devient évidemment

$$\frac{S^2}{2} - P,$$

et aucune interprétation ne peut être déduite de cette transformation

La condition de réalité des racines de la nouvelle équation

$$x^2 - Sx + \frac{S^2}{2} - P = 0$$

est simplement *renversée*, et elle est $P > \frac{S^2}{4}$ au lieu d'être $P < \frac{S^2}{4}$. C'est ce que devait faire prévoir la suppression du facteur $\sqrt{-1}$.

807. Il était évident, *a priori*, que la marche convenable pour les quantités *réelles* ne pouvait l'être pour les quantités *complexes* qui ne se confondent avec les premières que lorsque la quantité réelle affectée du facteur $\sqrt{-1}$ s'annule.

D'ailleurs, on n'a pu arriver a interpréter complètement les solutions négatives qu'en introduisant la considération *concrète* du changement de sens manifesté par le changement de signe, dans l'hypothèse de deux directions partant du même point et nettement opposées (800). Et c'est aussi par une représentation *concrète*, empruntée à la Géométrie, que nous parviendrons à la véritable interprétation des quantités imaginaires, comme nous le montrerons plus loin.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES APPLIQUÉES AUX QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Remarques préliminaires.

808. Nous nous proposons de prouver dans ce Chapitre que, si l'on soumet les expressions imaginaires du second degré, c'est-à-dire déduites de la résolution de l'équation générale du second degré à une inconnue, aux six opérations arithmétiques, d'après les règles démontrées en Algèbre élémentaire, on obtient toujours des expressions imaginaires de même espèce, c'est-à-dire pouvant se ramener à la forme

$$a + bi.$$

a et b sont des quantités réelles quelconques; i représente $\sqrt{-1}$ et n'est, à proprement parler, qu'un signe d'opération qu'on traite néanmoins comme une lettre ordinaire; seulement, on doit toujours remplacer i^2 par -1 (803).

809. L'expression imaginaire $a + bi$ est évidemment racine de l'équation du second degré

$$(x - a)^2 + b^2 = 0.$$

L'autre racine est alors nécessairement (803)

$$a - bi.$$

Les expressions $a + bi$ et $a - bi$ sont ce qu'on appelle des *imaginaires conjuguées*. Elles ne diffèrent que par le changement de signe de b (ou de i), et jouissent de propriétés importantes que nous signalerons successivement.

810. Deux quantités imaginaires complexes $a + bi$ et $a' + b'i$ sont égales, lorsque les quantités réelles qui y en-

trent sont égales deux à deux et dans le même ordre, c'est-à-dire lorsqu'on a à la fois

$$a = a', \qquad b = b'.$$

Réciproquement, on ne peut poser l'égalité

$$a + bi = a' + b'i,$$

que si l'on sait d'avance que les conditions $a = a'$ et $b = b'$ sont remplies.

Addition et soustraction.

811. Soit à ajouter ou à retrancher les deux expressions imaginaires

$$a + bi, \quad a' + b'i.$$

On a immédiatement (*Alg. élém.*, 15, 16), en prenant ensemble les signes supérieurs et les signes inférieurs,

$$(a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i,$$

quantité de même forme que les deux imaginaires ajoutées ou retranchées.

812. S'il s'agit de deux imaginaires *conjuguées* (809), il faut faire $a' = a$ et $b' = -b$.

La somme de deux imaginaires conjuguées est donc *réelle* et égale au double $2a$ de leur partie réelle ; *leur différence est une imaginaire simple* (803) égale à $2bi$, *de sorte que le carré de cette différence est une quantité essentiellement négative* égale à $-4b^2$.

Multiplication.

813. Soit à multiplier les deux expressions imaginaires

$$a + bi, \quad a' + b'i.$$

On a immédiatement (*Alg. élém.*, 25)

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ba'i + ab'i + bb'i^2 \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')i,\end{aligned}$$

produit de même forme que les deux quantités imaginaires multipliées et *indépendant de l'ordre des deux facteurs*.

814. Si l'on a à multiplier deux imaginaires *conjuguées,* il faut faire $a' = a$ et $b' = -b$. Il vient ainsi

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Le produit de deux imaginaires conjuguées est donc *réel et égal à la somme des carrés des quantités réelles a et b.*

815. On aurait trouvé plus rapidement ce résultat, en se rappelant que le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités (*Alg. élém.,* 30, II). On a donc immédiatement

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

816. Si l'on a à effectuer le produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires de la forme $a + bi$ (*Alg. élém.,* 29), on calculera le produit des deux premiers facteurs comme on vient de l'indiquer (813). On multipliera ce produit par le troisième facteur, et ainsi de suite. Il est clair que le produit définitif sera encore une imaginaire de même forme.

817. Considérons le cas de trois facteurs imaginaires

$$a + bi, \quad a' + b'i, \quad a'' + b''i.$$

Quel que soit l'ordre des deux premiers, nous aurons toujours (813)

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= (a' + b'i)(a + bi) \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')i.\end{aligned}$$

Nous aurons de même

$$\begin{aligned}&(a + bi)(a' + b'i)(a'' + b''i) \\ &= (a + bi)(a'' + b''i)(a' + b'i) \\ &= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - ba'b'') \\ &\quad + (ab'a'' + ba'a'' + aa'b'' - bb'b'')i.\end{aligned}$$

On peut donc aussi, sans changer le produit de trois facteurs imaginaires, changer l'ordre des deux derniers facteurs.

Il en résulte immédiatement, et on le prouvera en suivant

la même marche qu'en Arithmétique (*Arithm.*, 66), que, *étant donné un produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires de la forme* $a + bi$, *on peut intervertir leur ordre de toutes les manières possibles, sans que le produit varie.*

818. Toutes les conséquences déduites en Arithmétique et en Algèbre du théorème fondamental sur le changement d'ordre des facteurs se trouvent, par suite, étendues aux quantités imaginaires. Nous n'énoncerons pas ces conséquences; mais nous appelons l'attention du lecteur sur ce point.

819. Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que l'emploi des quantités imaginaires permet souvent d'arriver, d'une manière simple et rapide, à des résultats dont la démonstration directe pourrait être pénible. C'est ce qui aura lieu surtout, lorsque les relations qui serviront de point de départ seront fondées sur l'idée de l'*ordre*, c'est-à-dire sur un simple fait de *combinaison*. Nous allons en donner un exemple, en nous appuyant sur le théorème précédent (817).

Soit un produit de quatre facteurs imaginaires, dont les deux premiers sont conjugués, ainsi que les deux derniers,

$$P = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di).$$

Si l'on multiplie séparément les deux premiers facteurs et séparément les deux derniers, ce qui est permis d'après le théorème rappelé, on a (814)

$$P = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Si l'on multiplie ensuite séparément le premier et le troisième, puis le second et le quatrième facteur, il vient (813)

$$P = [(ac - bd) + (ad + bc)i][(ac - bd) - (ad + bc)i],$$

c'est-à-dire, les deux nouveaux facteurs étant conjugués,

$$P = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Si l'on multiplie enfin séparément le premier et le quatrième, puis le second et le troisième facteur, on trouve de même

$$P = [(ac + bd) - (ad - bc)i][(ac + bd) + (ad - bc)i],$$

c'est-à-dire

$$P = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

En rapprochant les trois valeurs de P, on trouve alors cette formule remarquable, dans le second membre de laquelle les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

Cette formule exprime que *le produit de deux sommes de deux carrés est lui-même égal, et cela de deux manières différentes, à la somme de deux carrés.*

Il est très aisé de parvenir directement à ce résultat (*Alg. élém.*, 30, IV); mais cette application montre néanmoins tout le parti qu'on peut tirer, dans la *Théorie des nombres*, de l'introduction des imaginaires.

Du module.

820. On appelle *module* de l'expression imaginaire $a+bi$ le nombre réel et positif $+\sqrt{a^2+b^2}$.

Deux expressions imaginaires conjuguées, $a+bi$ et $a-bi$, ont même module, et leur produit est égal au carré de ce module (814).

On estime la *grandeur* d'une quantité imaginaire $a+bi$ par celle de son module.

Lorsque le module devient nul, il en est de même de la quantité imaginaire, et réciproquement.

D'ailleurs, pour que le module $+\sqrt{a^2+b^2}$ devienne nul, il faut et il suffit, puisque a^2 et b^2 sont des quantités essentiellement positives, qu'on ait à la fois

$$a=0, \qquad b=0.$$

Le module d'une quantité réelle est cette quantité elle-même prise positivement.

821. I. *Le module d'un produit de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs.*

Soient d'abord les deux facteurs $a+bi$ et $c+di$. On a (813)

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Le module du produit est donc égal (820) à

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}.$$

Le théorème étant ainsi établi dans le cas de deux facteurs, on l'étend facilement, par un mode de raisonnement connu et déjà souvent employé, au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Soit, par exemple, le produit de quatre facteurs imaginaires que nous désignerons, pour plus de rapidité, par les lettres α, β, γ, δ. Nous aurons successivement

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(\alpha\beta\gamma\delta)&=\operatorname{mod}(\alpha\beta\gamma).\operatorname{mod}\delta,\\ \operatorname{mod}(\alpha\beta\gamma)&=\operatorname{mod}(\alpha\beta).\operatorname{mod}\gamma,\\ \operatorname{mod}(\alpha\beta)&=\operatorname{mod}\alpha.\operatorname{mod}\beta,\end{aligned}$$

d'où, en multipliant ces égalités membre à membre et simplifiant,

$$\operatorname{mod}(\alpha\beta\gamma\delta)=\operatorname{mod}\alpha.\operatorname{mod}\beta.\operatorname{mod}\gamma.\operatorname{mod}\delta.$$

Ce résultat prouve évidemment que *le produit d'autant de sommes de deux carrés qu'on voudra est encore égal à la somme de deux carrés.* C'est la généralisation du théorème démontré au n° 819.

822. II. *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

Le théorème est évident pour un produit de facteurs réels. Il s'agit de l'étendre au cas de facteurs imaginaires.

Or, si un produit de facteurs imaginaires est nul, son module l'est également (820). Ce module, étant le produit des modules des facteurs (821), est un produit de facteurs réels, et même positifs. Il ne peut donc être nul que si l'un de ses facteurs, c'est-à-dire le module de l'un des facteurs imaginaires, est nul. Mais alors ce facteur imaginaire est nul lui-même, et la condition indiquée est nécessaire. Elle est d'ailleurs suffisante; car, si l'un des facteurs imaginaires est nul, son module est nul, ce qui entraîne la nullité du module du produit et, par conséquent, celle du produit.

Division.

823. Diviser l'expression imaginaire $a + bi$ par l'expression imaginaire $c + di$, c'est trouver une expression de même forme qui, multipliant $c + di$, reproduise $a + bi$ (*Alg. élém.*, 40).

Représentons le quotient cherché par $x + yi$, x et y étant deux quantités réelles à déterminer. Nous devrons avoir

$$a + bi = (c + di)(x + yi) = (cx - dy) + (dx + cy)i;$$

ce qui entraîne comme conséquences (810) les deux équations

$$cx - dy = a, \qquad dx + cy = b.$$

On en déduit

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

On voit que le problème est toujours possible, qu'il n'admet qu'une seule solution et que le quotient de deux imaginaires du second degré est une imaginaire de même forme.

824. On peut arriver plus rapidement au résultat, en remarquant qu'on ne change pas la valeur d'une fraction $\frac{A}{B}$ à termes imaginaires, lorsqu'on multiplie ses deux termes par une même quantité réelle ou imaginaire, telle que C. Et, en effet, si l'on représente par Q le quotient imaginaire qu'on vient de trouver, on a

$$A = BQ.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par C, on a (817)

$$AC = BQC = BCQ$$

ou, en divisant de part et d'autre par BC,

$$\frac{AC}{BC} = Q = \frac{A}{B}.$$

On peut donc écrire immédiatement, en multipliant les deux

termes de la fraction par l'imaginaire conjuguée $c - di$ du dénominateur $c + di$ (814),

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

825. Si l'on considère une équation du premier degré à une inconnue x, où les coefficients soient quelconques, c'est-à-dire réels ou imaginaires, on peut la ramener à la forme habituelle $Ax = B$, A et B étant des quantités imaginaires. Il résulte de ce qui précède que cette équation admettra pour x une valeur imaginaire, et une seule; ce qui suffit pour montrer que la théorie des équations linéaires n'est pas modifiée par l'existence des coefficients imaginaires.

Puissances.

826. Examinons d'abord les puissances successives de $\sqrt{-1}$ ou de i.

On a d'abord (803)

$$i^2 = -1.$$

On a ensuite

$$i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^3 i = -i^2 = +1,$$

et, en continuant,

$$i^5 = i, \qquad i^6 = -1, \qquad i^7 = -i, \qquad i^8 = +1, \qquad \ldots.$$

La quatrième puissance i^4 étant égale à $+1$, il est clair que les résultats obtenus pour les quatre premières puissances de i vont se reproduire ainsi périodiquement et indéfiniment, de sorte qu'on peut écrire d'une manière générale, p étant un entier quelconque (150),

$$i^{4p} = (i^4)^p = +1, \qquad i^{4p+1} = i^{4p} i = +i,$$
$$i^{4p+2} = i^{4p} i^2 = -1, \qquad i^{4p+3} = i^{4p} i^3 = -i.$$

On voit que les puissances *paires* de i sont *réelles* et égales à ± 1, suivant que l'exposant est de la forme $4p$ ou $4p+2$, tandis que les puissances *impaires* sont *imaginaires* et égales à $\pm i$, suivant que l'exposant est de la forme $4p+1$ ou $4p+3$.

827. m étant un nombre entier positif, passons maintenant à la recherche de la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'imaginaire $a+bi$.

Il est évident qu'on obtiendra comme résultat une imaginaire de même forme, puisqu'on a à multiplier entre eux m facteurs égaux à $a+bi$ (813).

On peut d'ailleurs effectuer le développement de $(a+bi)^m$ à l'aide de la formule du binôme (255); il vient

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}bi + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3i^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4i^4 + \dots.$$

Si nous remplaçons les puissances successives de i par les valeurs trouvées au numéro précédent, c'est-à-dire les puissances paires par -1 et $+1$, et les puissances impaires par $+i$ et $-i$, nous aurons

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}bi - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3i + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \dots.$$

On remarque alors que les termes du développement sont alternativement réels et imaginaires et que, à deux termes positifs, succèdent régulièrement deux termes négatifs. Si l'on sépare les termes réels et les termes imaginaires, en mettant dans ces derniers i en facteur commun, les signes $+$ et $-$ alterneront dans chaque parenthèse, et nous pourrons écrire finalement

$$(a+bi)^m = \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \dots\right] + \left[\frac{m}{1}a^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \dots\right]i.$$

Les parenthèses représentant deux quantités essentiellement réelles A et B, on a donc bien

$$(a+bi)^m = A + Bi.$$

Le développement de $(a - bi)^m$ ne diffère du précédent que par le changement de b en $-b$ ou, si l'on veut, de i en $-i$ (261). Par suite, on a également

$$(a - bi)^m = \mathrm{A} - \mathrm{B}i.$$

En rapprochant ces deux résultats, on peut énoncer cette remarque importante : *les puissances semblables de deux imaginaires conjuguées sont elles-mêmes des imaginaires conjuguées.*

En multipliant membre à membre les deux relations précédentes, on trouve encore

$$(a^2 + b^2)^m = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \quad [819, 821].$$

828. Considérons une fonction entière de x (447) ou un polynôme entier en x de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \mathrm{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} x + \mathrm{A}_m,$$

à coefficients quelconques, réels ou imaginaires.

On a souvent à remplacer x dans un pareil polynôme par une valeur imaginaire $a + bi$. Il est clair que le résultat de cette substitution sera encore une imaginaire de même forme. En effet, d'après ce qu'on vient de voir (827), toute puissance entière de $a + bi$ est une imaginaire de même forme et, si on la multiplie par une quantité imaginaire, le produit satisfera encore à la même condition (813). En réunissant les résultats obtenus pour chaque terme, on aura donc finalement (811)

$$\mathrm{F}(a + bi) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i.$$

829. On peut se demander si, en substituant à la place de x, dans $\mathrm{F}(x)$, l'imaginaire conjuguée de la première substitution, c'est-à-dire $a - bi$, on trouvera un résultat conjugué du précédent. Il y a alors *deux cas à distinguer.*

Si tous les coefficients du polynôme considéré sont réels, le terme $\mathrm{A}_n x^n$, par exemple, devient simplement

$$\mathrm{A}_n(a - bi)^n \quad \text{au lieu de} \quad \mathrm{A}_n(a + bi)^n,$$

et les deux résultats partiels correspondant à chaque terme sont évidemment conjugués, de sorte qu'il en est de même de leurs ensembles.

Mais, *si le polynôme proposé renferme des coefficients imaginaires,* si l'on a, par exemple, $A_n = \alpha_n + \beta_n i$, les deux résultats partiels à comparer sont

$$(\alpha_n + \beta_n i)(a + bi)^n \quad \text{et} \quad (\alpha_n + \beta_n i)(a - bi)^n,$$

et ils ne sont plus conjugués, puisque i ne change de signe que dans l'un des facteurs des deux produits. Par suite, les ensembles des résultats obtenus ne sont pas eux-mêmes conjugués.

Ce n'est donc que *dans le cas où tous les coefficients du polynôme proposé sont réels que les valeurs conjuguées de* x *donnent des résultats conjugués* et qu'on peut écrire

$$F(a + bi) = P + Qi, \qquad F(a - bi) = P - Qi.$$

Cette observation nous sera utile plus tard.

830. Soit une fraction à termes imaginaires

$$\frac{a + bi}{c + di}.$$

Si l'on remplace chaque terme par l'expression conjuguée, la fraction obtenue

$$\frac{a - bi}{c - di}$$

est *conjuguée* de la première, puisque l'on a (824)

$$\frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2}.$$

Il en résulte (829) que, si l'on considère une fonction rationnelle de x (447) de la forme

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m}{B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x + B_n},$$

et *si tous les coefficients de la fonction sont réels,* on obtient deux fractions conjuguées en substituant à la place de x, dans la fonction, deux imaginaires conjuguées $a + bi$ et $a - bi$.

Racines.

831. Proposons-nous d'abord d'extraire la *racine carrée* de la quantité imaginaire $a + bi$. Il faut chercher une quantité imaginaire $x + yi$ qui, élevée au carré, reproduise $a + bi$. On

doit donc avoir

$$(x+yi)^2=a+bi$$

ou, en développant le carré du premier membre,

$$x^2-y^2+2xyi=a+bi.$$

Il en résulte (810)

$$x^2-y^2=a, \qquad 2xy=b.$$

En éliminant y entre ces deux équations, on trouve, par la substitution de $y=\frac{b}{2x}$ dans la première, l'équation bicarrée

$$4x^4-4ax^2-b^2=0,$$

d'où

$$x=\pm\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Comme x et y doivent avoir des valeurs réelles, on ne peut conserver pour x que les deux valeurs

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}};$$

y, à son tour, admet donc les deux valeurs correspondantes

$$y=\frac{b}{2x}=\frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

ou, par des transformations faciles (*Alg. élém.*, 30, II),

$$y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

On doit assembler les signes des valeurs de x et de y, de manière que le produit xy reproduise $\frac{b}{2}$. On a donc finalement

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

On trouverait de même

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Les racines carrées de deux imaginaires conjuguées sont donc elles-mêmes conjuguées.

[On peut comparer ce qui précède avec la marche suivie en Algèbre élémentaire (*Alg. élém.*, 266).]

832. On voit que la quantité imaginaire $a + bi$ a toujours deux racines carrées de même forme qu'elle, et que ces racines sont égales et de signes contraires.

Il en résulte que l'équation du second degré à une inconnue et à coefficients imaginaires peut être traitée absolument comme l'équation à coefficients réels, et qu'elle admet deux racines imaginaires de la forme habituelle.

833. L'équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

a pour expression de ses racines (*Alg. élém.*, 260, 261)

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, les quatre racines de l'équation, toujours deux à deux égales et de signes contraires, sont imaginaires (831).

x^2 étant une quantité imaginaire, il y a lieu d'appliquer, pour obtenir x, le calcul indiqué au n° 831 pour extraire la racine carrée de l'expression $a + bi$. On arrivera évidemment au résultat cherché en remplaçant, dans les formules du n° 831, a par $-\frac{b}{2a}$ et b par $\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ou b^2 par $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$. On aura ainsi

$$x = \pm\left(\sqrt{\frac{-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}{2}}\right)$$

ou, après simplifications,

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}} \pm i\sqrt{\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}}\right).$$

834. Si l'équation bicarrée à une inconnue a ses coefficients imaginaires, on peut la traiter, d'après ce qui précède,

comme l'équation bicarrée à coefficients réels, et l'on est conduit à quatre racines imaginaires, deux à deux égales et de signes contraires, de la forme habituelle.

835. Extraire la racine $m^{\text{ième}}$ de la quantité imaginaire $a + bi$, c'est trouver une quantité imaginaire de même forme qui, élevée à la $m^{\text{ième}}$ puissance, reproduise la quantité proposée.

Nous résoudrons complètement cette question dans le Chapitre suivant, qui traite de l'introduction des rapports trigonométriques dans les expressions imaginaires, et des conséquences qui en résultent au point de vue de la facilité des démonstrations et des calculs.

CHAPITRE III.

INTRODUCTION DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. — CONSÉQUENCES.

Forme nouvelle donnée à l'expression imaginaire $a + bi$.

836. Soit l'expression imaginaire $a + bi$.

r étant un nombre *positif* et α un certain angle, on peut toujours poser

$$(1) \qquad a = r\cos\alpha, \qquad b = r\sin\alpha.$$

En élevant ces deux relations au carré et en les ajoutant membre à membre, il vient (*Trigon.*, 34)

$$a^2 + b^2 = r^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = r^2,$$

d'où

$$(2) \qquad r = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

r étant connu, les relations (1) donnent

$$(3) \quad \cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{+\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{+\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs, il vient

$$(4) \qquad a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Telle est la forme nouvelle qu'on peut donner à toute imaginaire du second degré.

Le nombre positif $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* de la quantité imaginaire (820), l'angle α est son *argument*.

Il est essentiel de remarquer que le module r a une seule valeur, parfaitement définie; mais que l'argument α est susceptible d'une infinité de valeurs.

En effet, l'angle α est, d'après les relations (3), déterminé par son sinus et par son cosinus. Il a donc, en le supposant mesuré sur le cercle trigonométrique, une valeur, *et une seule*, de 0 à 2π (voir la *Trigon.*). Mais on peut ensuite, sans modifier l'expression imaginaire, faire varier α d'un multiple quelconque de 2π (*Trigon.*, 12, 18). En désignant par α_0 la première valeur de α entre 0 et 2π, et par k un entier quelconque positif, négatif ou nul, on aura, par conséquent,

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi. \tag{5}$$

837. Pour que deux imaginaires sous forme trigonométrique soient égales, il faut et il suffit qu'elles aient même module et des arguments qui soient égaux ou qui diffèrent d'un nombre entier de circonférences $2k\pi$ (810, 836).

Pour qu'une imaginaire trigonométrique soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul (820, 822).

Deux imaginaires trigonométriques sont égales et de signes contraires, lorsqu'elles ont même module et que leurs arguments diffèrent de π ou d'un nombre impair quelconque de demi-circonférences (*Trigon.*, 11, 17).

Deux imaginaires trigonométriques conjuguées (809) ont même module et leurs arguments ont une somme égale à 2π ou à un nombre entier quelconque de circonférences (*Trigon.*, 13, 19).

838. *Les imaginaires trigonométriques* par lesquelles nous venons de remplacer les imaginaires complexes *renferment les quantités réelles et les imaginaires simples* (803).

En effet, si l'on désigne par A un module quelconque (836), on a successivement

$$+\mathrm{A} = \mathrm{A}(\cos 0 + i \sin 0),$$
$$-\mathrm{A} = \mathrm{A}(\cos\pi + i\sin\pi),$$
$$+\mathrm{A}i = \mathrm{A}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$
$$-\mathrm{A}i = \mathrm{A}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

839. Nous allons reprendre, au point de vue de la nouvelle notation adoptée, les quatre opérations supérieures sur les

imaginaires. Quant à l'addition et à la soustraction, nous n'avons rien à ajouter à ce qui précède (811), et nous nous contenterons de démontrer le théorème suivant, qui se rattache à ces opérations.

Module d'une somme ou d'une différence.

840. *Le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces expressions.*

Soient les deux expressions imaginaires

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha').$$

La somme ou la différence de deux expressions imaginaires étant une expression de même forme (811), on peut poser

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \pm r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha') = \mathrm{R}(\cos\mathrm{A} + i\sin\mathrm{A}).$$

On en déduit immédiatement (810)

$$r\cos\alpha \pm r'\cos\alpha' = \mathrm{R}\cos\mathrm{A},$$
$$r\sin\alpha \pm r'\sin\alpha' = \mathrm{R}\sin\mathrm{A}.$$

On tire facilement de ces égalités, en les élevant au carré, en les ajoutant ensuite membre à membre et en extrayant la racine carrée du résultat (*Trigon.*, 53),

$$\mathrm{R} = \sqrt{r^2 \pm 2rr'\cos(\alpha - \alpha') + r'^2}.$$

On a donc, pour le module R du résultat, *quantité essentiellement positive* (820, 836), dans le cas de l'addition comme dans celui de la soustraction, et les limites supérieure et inférieure de $\cos(\alpha - \alpha')$ étant $+1$ et -1,

$$\mathrm{R} \leqq \sqrt{(r + r')^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} \leqq r + r'$$

et

$$\mathrm{R} \geqq \sqrt{(r - r')^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} \geqq \pm(r - r').$$

Il résulte de ce théorème que *le module de la somme d'un nombre quelconque d'expressions imaginaires ne peut être supérieur à la somme des modules de ces expressions.*

Multiplication.

841. Soit à multiplier les deux expressions

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha').$$

Nous obtiendrons, en remplaçant toujours i^2 par -1,

$$rr'[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')],$$

c'est-à-dire (*Trigon.*, 53)

$$rr'[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')].$$

Pour multiplier l'une par l'autre deux expressions imaginaires sous forme trigonométrique, il suffit donc de multiplier leurs modules et d'ajouter leurs arguments.

Cette règle s'étend sans peine à un nombre quelconque de facteurs. Ainsi, *le produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires s'obtient en multipliant leurs modules et en ajoutant leurs arguments.*

Il en résulte immédiatement que :

1° *Un produit de facteurs imaginaires ne change pas, lorsqu'on change d'une manière quelconque l'ordre des facteurs* (817);

2° *Le module d'un produit de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs* (821).

Division.

842. La division étant l'opération inverse de la multiplication, si l'on a à diviser l'une par l'autre les deux expressions

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$$

le quotient est évidemment égal à

$$\frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\alpha') + i\sin(\alpha-\alpha')].$$

En effet, en multipliant, suivant la règle précédente (841), ce résultat par le diviseur, on retrouve bien le dividende.

Le quotient de deux imaginaires trigonométriques s'ob-

tient donc *en divisant le module du dividende par celui du diviseur et en retranchant l'argument du diviseur de celui du dividende.*

Puissances, formule de Moivre.

843. m étant entier et positif, on veut élever à la puissance m l'expression imaginaire

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Si l'on applique alors la règle trouvée pour la multiplication (841) au cas de m facteurs égaux entre eux, il vient

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^m = r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha).$$

On voit que, *pour élever une imaginaire trigonométrique à une puissance entière, on élève le module à cette puissance et l'on multiplie l'argument par l'exposant de la puissance.*

Si l'on suppose, en particulier, le module r égal à l'unité, on a

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha.$$

Cette égalité remarquable constitue la *formule de* Moivre, du nom du géomètre français qui l'a découverte (1667-1754).

Il est utile de remarquer que le développement de

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m$$

ne peut différer de celui de

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$$

que par les signes des termes qui renferment les puissances impaires de i (827). On a donc aussi

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha - i\sin m\alpha.$$

844. Quand on suppose le module égal à l'unité dans une imaginaire trigonométrique, on la qualifie d'*expression réduite.*

Le produit de deux imaginaires conjuguées étant toujours égal au carré de leur module commun (820), *si l'on divise l'unité par une expression réduite, on a pour quotient la conjuguée de cette expression réduite.* Ainsi

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

845. La *formule de* Moivre, établie seulement dans le cas d'un exposant entier et positif (843), subsiste pour toutes les valeurs réelles et commensurables de cet exposant, qu'il soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif. C'est ce que nous allons montrer.

Puisque, par définition (129), la racine $p^{\text{ième}}$ d'une expression imaginaire est une autre expression imaginaire qui, élevée à la puissance p, reproduit la première, on a bien (140, 143)

$$(1) \qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{p}} = \cos\frac{\alpha}{p} + i\sin\frac{\alpha}{p}.$$

En effet, en élevant les deux membres de cette relation à la puissance entière p, ce qui se fera pour le second membre en multipliant, d'après la règle précédente (843), l'argument $\frac{\alpha}{p}$ par p, on trouvera des deux parts $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

De même, si l'on élève à la puissance entière m les deux membres de la relation (1), on aura encore (143, 843)

$$(2) \qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{m}{p}} = \cos\frac{m}{p}\alpha + i\sin\frac{m}{p}\alpha.$$

Enfin, on a aussi (145), en supposant m positif, mais entier ou fractionnaire d'après la relation (2),

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m} = \frac{1}{\cos m\alpha + i\sin m\alpha}$$

ou (844)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \cos m\alpha - i\sin m\alpha,$$

résultat qui revient évidemment (*Trigonom.*, 13, 19) à

$$(3) \qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \cos(-m\alpha) + i\sin(-m\alpha)$$

La formule de Moivre *subsiste* donc bien *pour toutes les valeurs réelles et commensurables de l'exposant,* en remarquant que, dans le cas où la puissance quelconque indiquée dans le premier membre de la formule serait susceptible de *plusieurs* valeurs, notre démonstration prouve seulement que le second membre de la formule est l'une de ces valeurs.

Nous allons revenir sur ce point essentiel, en cherchant à obtenir directement la racine d'ordre quelconque d'une imaginaire trigonométrique (835).

Racines.

846. Proposons-nous d'extraire la racine $m^{\text{ième}}$ de la quantité imaginaire $a + bi$, ramenée à la forme trigonométrique $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, où α est la plus petite valeur de l'argument, comprise entre o et 2π (836).

Admettons que cette racine $m^{\text{ième}}$ soit une imaginaire de même forme, que nous représenterons par

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Si l'on élève cette dernière expression à la puissance m, on devra reproduire la première. On aura donc, d'après la formule de Moivre (843),

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho^m(\cos m\omega + i\sin m\omega).$$

Pour que ces deux imaginaires soient, en effet, égales, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux et que leurs arguments soient égaux ou, *d'une manière générale*, diffèrent d'un nombre exact de circonférences (836). Nous poserons, par suite,

$$(1) \qquad \rho^m = r \quad \text{ou} \quad \rho = \sqrt[m]{r}$$

et

$$(2) \qquad m\omega = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\alpha + 2k\pi}{m}.$$

Il en résulte que, *pour extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'une imaginaire trigonométrique, il faut extraire la racine $m^{\text{ième}}$ du module et diviser par m la valeur générale de l'argument.* Ainsi, nous écrirons, ce qui n'est qu'une transformation de la formule de Moivre,

$$(3) \qquad \sqrt[m]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right);$$

et c'est bien encore une imaginaire de même forme.

Il faut maintenant démontrer que *le second membre de la formule* (3) *a exactement m valeurs distinctes et n'en a pas davantage.*

D'abord, le module r est une quantité essentiellement positive, et il doit en être de même du module $\sqrt[m]{r}$ qui n'aura ainsi qu'une seule valeur.

Cela posé, attribuons à l'entier indéterminé k les m valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Nous obtiendrons, pour l'argument $\frac{\alpha + 2k\pi}{m}$, les m valeurs

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{\alpha}{m} + \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{\alpha}{m} + \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{m} + \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Toutes ces valeurs sont distinctes et moindres que la circonférence 2π. Il suffit de le prouver pour la plus grande d'entre elles. Or on a bien

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{2(m-1)\pi}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{m} + 2\pi - \frac{2\pi}{m} < 2\pi,$$

puisque, par hypothèse, α est moindre que 2π.

Les m premières valeurs de l'argument étant ainsi distinctes et moindres que la circonférence 2π, aucun de ces arcs ne pourra avoir *à la fois* le même sinus et le même cosinus qu'un autre d'entre eux, et les m valeurs correspondantes du second membre de la formule (3) seront elles-mêmes distinctes.

Si l'on donne à k, en continuant, les valeurs m, $m+1$, $m+2$, ..., on obtient des arguments qui ne peuvent différer des précédents que d'un nombre exact de circonférences. On retrouve donc, indéfiniment et périodiquement, *les mêmes valeurs* pour le second membre de la formule (3).

Par exemple, pour $k = m$, on a

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{m} = \frac{\alpha}{m} + \frac{2m\pi}{m} = \frac{\alpha}{m} + 2\pi.$$

On trouvera donc, pour cette valeur de l'argument, les mêmes valeurs du sinus et du cosinus que pour $\frac{\alpha}{m}$, et ainsi de suite.

Enfin, si k prend les valeurs négatives $-1, -2, -3, \ldots$, on retrouve encore, pour le second membre de la formule (3), les mêmes valeurs, mais *en ordre inverse*.

Par exemple, pour $k = -1$, on a

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{m} = \frac{\alpha}{m} - \frac{2\pi}{m},$$

qui diffère de 2π de l'arc

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Ainsi, il revient au même de faire $k=-1$ ou $k=m-1$, $k=-2$ ou $k=m-2$, ...

On peut donc, si l'on veut, à partir de $k=0$, donner à k des valeurs successives, deux à deux égales et de signes contraires, *jusqu'à ce qu'on ait obtenu m racines distinctes,* puisqu'il n'y en a pas davantage.

En résumé, *la racine d'une quantité imaginaire présente autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son indice; et, comme les quantités imaginaires comprennent les quantités réelles* (838), *cette propriété fondamentale se trouve établie pour les quantités réelles* (129), *auxquelles la formule de Moivre est également applicable.* On peut juger par là des conséquences fécondes de l'introduction des imaginaires dans la Science.

Il est évident que si, p étant un autre entier, on avait à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ de l'expression

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^p=r^p(\cos p\alpha+i\sin p\alpha),$$

on aurait de même

$$\sqrt[m]{[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^p}=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^{\frac{p}{m}}$$
$$=r^{\frac{p}{m}}\left[\cos\frac{p\alpha+2k\pi}{m}+i\sin\frac{p\alpha+2k\pi}{m}\right],$$

et que l'on obtiendrait toutes les valeurs distinctes du second membre en substituant encore à l'entier indéterminé k les m valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Racines imaginaires de l'unité.

847. La formule de Moivre, sous la forme qui convient a l'extraction des racines (846), est

$$(1)\qquad \sqrt[m]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{m}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{m}\right).$$

Si l'on suppose dans cette relation $r=1$ et $\alpha=0$, c'est-à-dire $\cos\alpha=1$ et $\sin\alpha=0$, elle devient

$$(2)\qquad \sqrt[m]{1}=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

et elle fait connaître les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'*unité positive*,

quand on donne à k les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$, ou, ce qui revient au même (846), les valeurs 0, $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3, ..., jusqu'à ce qu'on ait obtenu m racines distinctes.

Mais la seule différence, lorsqu'on fait $k=p$ ou $k=-p$, c'est le changement de signe du second terme du second membre dans la formule (2). On peut donc encore écrire

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}, \tag{3}$$

et donner simplement à k, *en tenant compte du double signe du second membre*, les valeurs positives successives 0, 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce qu'on ait obtenu m racines distinctes.

On peut distinguer entre m pair et m impair.

1° *m est pair.*

On pose $m=2p$, et l'on a

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{k\pi}{p} \pm i\sin\frac{k\pi}{p}. \tag{4}$$

Il suffit alors de donner à k les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $p=\frac{m}{2}$.

On obtient ainsi, à cause du double signe, $2p+2$ ou $m+2$ résultats; mais les deux résultats trouvés en faisant $k=0$ ou en faisant $k=p$ n'en font qu'un seul à cause de la nullité du sinus, de sorte qu'on n'a en tout que m racines. Les résultats extrêmes (pour $k=0$ et $k=p$) sont d'ailleurs $+1$ et -1. Toutes les autres racines sont imaginaires et conjuguées deux à deux, par suite réciproques (844).

2° *m est impair.*

On pose $m=2p+1$, et l'on a

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2k\pi}{2p+1} \pm i\sin\frac{2k\pi}{2p+1}. \tag{5}$$

Il suffit alors de donner à k les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $p=\frac{m-1}{2}$.

On obtient ainsi, à cause du double signe, $2p+2$ ou $m+1$ résultats; mais les deux résultats trouvés en faisant $k=0$ n'en font qu'un seul à cause de la nullité du sinus, de sorte qu'on n'a en tout que m racines. Le premier résultat (pour $k=0$)

est d'ailleurs $+1$. Toutes les autres racines sont imaginaires et conjuguées deux à deux, c'est-à-dire réciproques.

848. Si l'on suppose, dans la relation (1) du numéro précédent, $r=1$ et $\alpha=\pi$, c'est-à-dire $\cos\alpha=-1$ et $\sin\alpha=0$, elle devient

$$(2\ bis)\qquad \sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m},$$

et elle fait connaître les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'*unité négative*, quand on donne à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$ ou, ce qui revient au même (846), les valeurs $0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots$, jusqu'à ce qu'on ait obtenu m racines distinctes.

Mais la seule différence, lorsqu'on fait $k=p$ ou $k=-(p+1)$, c'est le changement de signe du second terme du second membre dans la formule (2 *bis*). On peut donc encore écrire

$$(3\ bis)\qquad \sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}$$

et donner simplement à k, *en tenant compte du double signe du second membre*, les valeurs positives successives $0, 1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à ce qu'on ait obtenu m racines distinctes.

On peut encore distinguer entre m pair et m impair.

1° *m est pair.*

On pose $m=2p$, et l'on a

$$(4\ bis)\qquad \sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}.$$

Il suffit alors de donner à k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1=\frac{m}{2}-1$. On obtient ainsi, à cause du double signe, $2p$ ou m résultats qui sont tous imaginaires, et d'ailleurs conjugués deux à deux ou réciproques.

2° *m est impair.*

On pose $m=2p+1$, et l'on a

$$(5\ bis)\qquad \sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p+1}.$$

Il suffit alors de donner à k les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, p=\frac{m-1}{2}$.

On obtient ainsi, à cause du double signe, $2p+2$ ou $m+1$ résultats; mais les deux résultats trouvés en faisant $k=p$ n'en font qu'un seul à cause de la nullité du sinus, de sorte qu'on n'a en tout que m racines. Le dernier résultat (pour $k=p$) est d'ailleurs -1. Toutes les autres racines sont imaginaires et conjuguées deux à deux ou réciproques.

Racines des quantités réelles.

849. D'après ce qui précède (846), la racine $m^{\text{ième}}$ d'une quantité réelle a m valeurs, puisque les quantités réelles ne sont qu'un cas particulier des quantités imaginaires (838).

A étant une quantité réelle, nous avons vu (130) que, dans le cas de m impair, $\sqrt[m]{\text{A}}$ a toujours une valeur réelle, et une seule, de même signe que A. Toutes les autres valeurs de $\sqrt[m]{\text{A}}$ sont imaginaires. Dans le cas de m pair, $\sqrt[m]{\text{A}}$ admet deux valeurs réelles ou n'en admet aucune, suivant que A est une quantité positive ou négative. Toutes les autres valeurs de $\sqrt[m]{\text{A}}$ sont imaginaires.

Nous allons montrer que, les racines imaginaires d'ordre m de l'unité positive ou négative étant connues (847, 848), on peut en déduire immédiatement toutes les racines imaginaires de $\sqrt[m]{\text{A}}$.

A étant une quantité *positive*, posons

$$y=\sqrt[m]{\pm\,\text{A}};$$

y sera l'une quelconque des racines $m^{\text{ièmes}}$ de $+\text{A}$ ou de $-\text{A}$. En élevant à la puissance m les deux membres de la relation ci-dessus, il vient

$$y^m=\pm\,\text{A}. \tag{1}$$

Si a est la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de A, on peut poser

$$y=ax$$

et remplacer A par a^m. L'équation (1) devient alors

$$a^m x^m=\pm\,a^m,$$

c'est-à-dire

$$x^m=\pm\,1. \tag{2}$$

On voit que x n'est pas autre chose que l'une quelconque des m racines $m^{ièmes}$ de $+1$ ou de -1 (847, 848), suivant qu'il s'agit de $\sqrt[m]{+A}$ ou de $\sqrt[m]{-A}$.

On est ainsi conduit à ce théorème :

Toutes les racines $m^{ièmes}$ d'une quantité positive s'obtiennent en multipliant sa racine $m^{ième}$ arithmétique par les m racines $m^{ièmes}$ de $+1$; toutes les racines $m^{ièmes}$ d'une quantité négative s'obtiennent en multipliant la racine $m^{ième}$ arithmétique de la quantité positive correspondante par les m racines $m^{ièmes}$ de -1 (*Alg. élém.*, équations binômes, 267 et suiv.).

850. On peut dire d'une manière plus générale que, *dans tous les ordres, les racines d'une quantité quelconque s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par les racines correspondantes de l'unité.*

Soit a l'une quelconque des valeurs de $\sqrt[m]{A}$, A étant une quantité quelconque, réelle ou imaginaire. Soient 1, α, β, γ, δ, ..., les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$. Formons les m produits différents

$$a \times 1, \quad a \times \alpha, \quad a \times \beta, \quad a \times \gamma, \quad a \times \delta, \quad \ldots.$$

Ils représentent les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$; car, si on les élève à la puissance m, on obtient m résultats

$$a^m, \quad a^m \alpha^m, \quad a^m \beta^m, \quad a^m \gamma^m, \quad a^m \delta^m, \quad \ldots,$$

tous égaux à A. On a, en effet, par hypothèse,

$$a^m = A \qquad \text{et} \qquad \alpha^m = \beta^m = \gamma^m = \delta^m = \ldots = 1.$$

851. Cette règle s'appliquant à l'unité elle-même, on peut dire que, *lorsqu'on multiplie successivement toutes les racines $m^{ièmes}$ de l'unité par l'une quelconque d'entre elles, on ne fait que les reproduire dans un ordre différent.*

C'est ce que nous allons vérifier, par exemple, pour les racines cubiques de l'unité.

En désignant l'une d'elles par x, on a

$$x^3 = 1.$$

Il faut donc résoudre l'équation

$$x^3 - 1 = 0.$$

Le binôme $x^3 - 1$ étant exactement divisible par le binôme

$x-1$ (14), elle se partage immédiatement en deux autres,

$$x-1=0, \qquad x^2+x+1=0;$$

d'où les trois racines

$$1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Les deux racines imaginaires sont bien conjuguées et réciproques (847).

Si l'on multiplie les trois racines par la dernière, on trouve

$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4}=1,$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

On voit en même temps, et cette remarque est importante, que *chacune des racines cubiques imaginaires de l'unité est le carré de l'autre*, de sorte que, si l'une de ces racines est représentée par α, l'autre pourra l'être par α^2.

Calcul des radicaux, lorsqu'on tient compte de leurs déterminations multiples.

852. Nous n'avons considéré précédemment que ce qu'on appelle les *valeurs arithmétiques* des radicaux (131), et nous avons donné (132 et suiv.) toutes les règles relatives au *calcul* de ces valeurs arithmétiques. Mais un radical possédant (lorsqu'on le prend dans toute sa généralité) autant de valeurs distinctes qu'il y a d'unités dans son indice, il est essentiel de revenir ici sur le calcul des radicaux entendus de cette manière, et de montrer que les règles connues demeurent, en général, applicables, les indices et les exposants restant des entiers positifs quelconques.

853. I. *Pour multiplier deux (ou plusieurs) radicaux de même indice, on multiplie les quantités placées sous ces radicaux, et l'on affecte leur produit du radical commun* (133).

Il s'agit de démontrer l'identité

$$\sqrt[m]{A}\,.\,\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A.B}.$$

On peut dire simplement que, en élevant le *premier membre* de cette

relation, quel qu'il soit, à la puissance m, on obtient toujours AB (818). Ce premier membre représente, par conséquent, l'une quelconque des racines $m^{\text{ièmes}}$ de AB ou des valeurs du second membre. D'ailleurs, chacun des facteurs $\sqrt[m]{\text{A}}$ et $\sqrt[m]{\text{B}}$ a m valeurs différentes, comme $\sqrt[m]{\text{AB}}$. Il en résulte que, si l'on multiplie les m valeurs de $\sqrt[m]{\text{A}}$ par l'une quelconque des valeurs de $\sqrt[m]{\text{B}}$, on obtiendra les m valeurs distinctes de $\sqrt[m]{\text{AB}}$. Et, si l'on emploie de la même façon les autres valeurs de $\sqrt[m]{\text{B}}$, on reproduira nécessairement, dans un autre ordre, les m valeurs de $\sqrt[m]{\text{AB}}$.

On voit que l'identité posée est bien vérifiée; mais que, si l'on veut ne pas laisser à son premier membre m^2 valeurs, qui n'en font en réalité que m, il faut spécifier qu'on fera correspondre à chaque valeur de $\sqrt[m]{\text{A}}$ une valeur spéciale de $\sqrt[m]{\text{B}}$, par exemple, la première à la première, la deuxième à la deuxième, ..., la $m^{\text{ième}}$ à la $m^{\text{ième}}$.

On peut aussi, pour vérifier l'identité posée, revenir à la forme trigonométrique.

Soient

$$\text{A} = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),$$

$$\text{B} = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

On aura, d'après la formule de Moivre (846), et k_1 et k_2 étant des entiers quelconques,

$$\sqrt[m]{\text{A}} = \sqrt[m]{r_1}\left(\cos\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m}\right),$$

$$\sqrt[m]{\text{B}} = \sqrt[m]{r_2}\left(\cos\frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{m}\right).$$

Par suite (841, 133),

$$(1)\qquad \sqrt[m]{\text{A}}\,\sqrt[m]{\text{B}} = \sqrt[m]{r_1 r_2}\left[\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2(k_1 + k_2)\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2(k_1 + k_2)\pi}{m}\right].$$

D'autre part, on a (841)

$$\text{AB} = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

et (846)

$$(2)\qquad \sqrt[m]{\text{AB}} = \sqrt[m]{r_1 r_2}\left(\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2l\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2l\pi}{m}\right),$$

l étant un entier quelconque.

Si l'on rapproche les résultats (1) et (2), on a évidemment, en raison de l'indétermination complète des entiers k_1, k_2 et l, et le diviseur m restant le même (846),

$$\sqrt[m]{\text{A}}\,\sqrt[m]{\text{B}} = \sqrt[m]{\text{AB}}.$$

834. II. *Pour diviser deux radicaux de même indice, on divise les quantités placées sous ces radicaux, et l'on affecte leur quotient du radical commun* (135).

Il s'agit de démontrer l'identité

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}.$$

En élevant le premier membre de cette relation, quel qu'il soit, à la puissance m, on obtient toujours $\frac{A}{B}$ (823, 824). Ce premier membre représente, par conséquent, l'une quelconque des racines $m^{\text{lèmes}}$ de $\frac{A}{B}$ ou l'une quelconque des valeurs du second membre.

Il suffit de diviser les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$ par l'une quelconque des valeurs de $\sqrt[m]{B}$ pour obtenir, sans répétition, les m valeurs distinctes $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$ (853).

On peut aussi présenter la démonstration en revenant à la forme trigonométrique (853). Nous ne nous y arrêterons pas.

835. III. *Pour élever un radical à une puissance, il suffit d'élever à cette puissance la quantité placée sous le radical* (136).

Il s'agit de démontrer l'identité

$$(\sqrt[m]{A})^p = \sqrt[m]{A^p}.$$

Nous supposerons d'abord m et p *premiers entre eux.*

$\sqrt[m]{A}$ a m valeurs, et il faut prouver que, en élevant chacune d'elles à la puissance p, on obtiendra les m valeurs de $\sqrt[m]{A^p}$.

Soit

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

On aura, successivement (846, 136, 843),

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right),$$

$$(1)\qquad (\sqrt[m]{A})^p = \sqrt[m]{r^p}\left(\cos\frac{p\alpha + 2pk\pi}{m} + i\sin\frac{p\alpha + 2pk\pi}{m}\right),$$

$$A^p = r^p(\cos p\alpha + i\sin p\alpha),$$

$$(2)\qquad \sqrt[m]{A^p} = \sqrt[m]{r^p}\left(\cos\frac{p\alpha + 2k_1\pi}{m} + i\sin\frac{p\alpha + 2k_1\pi}{m}\right).$$

Le diviseur m étant le même de part et d'autre et les entiers k et k_1, complètement indéterminés, les relations (1) et (2) justifient l'identité à démontrer.

856. *Si m et p ne sont pas premiers entre eux,* m peut être multiple de p ou présenter avec p un plus grand commun diviseur inférieur à p.

Dans la première hypothèse, on peut poser $m = np$, et l'on a

$$(\sqrt[m]{\mathrm{A}})^p = (\sqrt[np]{\mathrm{A}})^p = \sqrt[n]{\mathrm{A}}.$$

En effet, toute valeur x de $\sqrt[np]{\mathrm{A}}$, élevée à la puissance np, doit reproduire A. On a donc $x^{np} = \mathrm{A}$ ou, ce qui revient au même (150), $(x^p)^n = \mathrm{A}$. Les valeurs de x^p ou de $(\sqrt[np]{\mathrm{A}})^p$ ne sont donc autre chose que les valeurs de $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$.

Dans la deuxième hypothèse, en désignant par n le plus grand commun diviseur de m et de p, on peut poser $m = kn$ et $p = ln$, et l'on a, d'après ce qui précède et d'après le n° 855,

$$(\sqrt[kn]{\mathrm{A}})^{ln} = [(\sqrt[kn]{\mathrm{A}})^n]^l = (\sqrt[k]{\mathrm{A}})^l = \sqrt[k]{\mathrm{A}^l}.$$

Ainsi, on a le droit de rendre premiers entre eux l'indice du radical et l'exposant de la puissance (138), et il ne reste plus ensuite qu'à appliquer la règle du n° 855.

857. IV. *Pour extraire une racine d'un radical, on extrait cette racine de la quantité placée sous le radical, ou l'on multiplie l'un par l'autre les deux indices considérés* (137).

Il faut démontrer la double identité

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathrm{A}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\mathrm{A}}} = \sqrt[mn]{\mathrm{A}}.$$

Or, si x est l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'une quelconque des racines $m^{\text{ièmes}}$ de A, on a $x^n = \sqrt[m]{\mathrm{A}}$.

Par suite,

$$(x^n)^m = (x^m)^n = x^{mn} = \mathrm{A}.$$

Il en résulte que x ou $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathrm{A}}}$ est l'une quelconque des racines $mn^{\text{ièmes}}$ de A. D'autre part (855, 856),

$$x^m = (\sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathrm{A}}})^m = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{\mathrm{A}})^m} = \sqrt[n]{\mathrm{A}}.$$

x est donc aussi l'une quelconque des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de A, et l'identité posée est complètement justifiée.

858. V. *Pour multiplier ou diviser des radicaux d'indices différents, il faut d'abord les ramener au même indice; puis, appliquer les règles que nous venons de généraliser* (139).

Mais il faut bien remarquer que cette transformation aug-

mente les indices des radicaux et, par conséquent, le nombre de leurs valeurs distinctes. Elle est donc, en général, *défectueuse*. Cependant, si l'on a soin de réduire toujours *au plus petit indice commun* (*Alg. élém.*, 77), les résultats obtenus sont exacts.

839. Soit, par exemple, à multiplier les deux radicaux d'indices différents

$$\sqrt[m]{A}, \quad \sqrt[n]{B}.$$

Nous supposerons d'abord les indices m et n *premiers entre eux*. Il s'agit de démontrer l'identité

$$\sqrt[m]{A}\sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n B^m}.$$

Admettons qu'on ait

$$A = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1), \qquad B = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

On en déduit successivement

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{r_1}\left(\cos\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m}\right),$$

$$\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{r_2}\left(\cos\frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{n}\right),$$

$$\sqrt[m]{A}\sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{r_1^n r_2^m}\left[\cos\left(\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m} + \frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha_1 + 2k_1\pi}{m} + \frac{\alpha_2 + 2k_2\pi}{n}\right)\right]$$

ou

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[m]{A}\sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{r_1^n r_2^m}\left(\cos\dfrac{n\alpha_1 + m\alpha_2 + 2nk_1\pi + 2mk_2\pi}{mn}\right. \\ \qquad\qquad \left. + i\sin\dfrac{n\alpha_1 + m\alpha_2 + 2nk_1\pi + 2mk_2\pi}{mn}\right). \end{array}\right.$$

D'autre part, on a

$$A^n = r_1^n(\cos n\alpha_1 + i\sin n\alpha_1), \qquad B^m = r_2^m(\cos m\alpha_2 + i\sin m\alpha_2),$$

$$A^n B^m = r_1^n r_2^m[\cos(n\alpha_1 + m\alpha_2) + i\sin(n\alpha_1 + m\alpha_2)],$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[mn]{A^n B^m} = \sqrt[mn]{r_1^n r_2^m}\left(\cos\dfrac{n\alpha_1 + m\alpha_2 + 2l\pi}{mn}\right. \\ \qquad\qquad \left. + i\sin\dfrac{n\alpha_1 + m\alpha_2 + 2l\pi}{mn}\right). \end{array}\right.$$

Les expressions (1) et (2), en raison du diviseur commun mn et de

l'indétermination des entiers k_1, k_2 et l, sont bien équivalentes, et l'identité est justifiée.

On a, par exemple, exactement,

$$\sqrt{\mathrm{A}}\,\sqrt[3]{\mathrm{B}} = \sqrt[6]{\mathrm{A}^3\mathrm{B}^2}.$$

860. *Si les indices m et n ne sont pas premiers entre eux,* ils admettent un plus grand commun diviseur d, et l'on peut poser $m = pd$, $n = qd$, p et q étant premiers entre eux. Il faut démontrer l'identité

$$\sqrt[pd]{\mathrm{A}}\,\sqrt[qd]{\mathrm{B}} = \sqrt[pqd]{\mathrm{A}^q\mathrm{B}^p}.$$

Or on peut écrire (857)

$$\sqrt[pd]{\mathrm{A}} = \sqrt[d]{\sqrt[p]{\mathrm{A}}}, \qquad \sqrt[qd]{\mathrm{B}} = \sqrt[d]{\sqrt[q]{\mathrm{B}}}.$$

Il en résulte, l'indice d étant commun et p et q étant premiers entre eux (853, 859, 857),

$$\sqrt[pd]{\mathrm{A}}\,\sqrt[qd]{\mathrm{B}} = \sqrt[d]{\sqrt[p]{\mathrm{A}}\,\sqrt[q]{\mathrm{B}}} = \sqrt[d]{\sqrt[pq]{\mathrm{A}^q\mathrm{B}^p}} = \sqrt[pqd]{\mathrm{A}^q\mathrm{B}^p}$$

L'identité posée est donc encore justifiée.

On a, par exemple, exactement,

$$\sqrt[4]{\mathrm{A}}\,\sqrt[6]{\mathrm{B}} = \sqrt[12]{\mathrm{A}^3\mathrm{B}^2},$$

et les vingt-quatre déterminations du premier membre se réduisent aux douze déterminations du second.

861. S'il s'agissait de diviser des radicaux d'indices différents, on emploierait le même mode de démonstration, en réduisant toujours au plus petit indice commun.

862. Dans la pratique, on peut avoir à considérer tantôt les valeurs arithmétiques des radicaux, tantôt leurs valeurs générales, c'est-à-dire l'ensemble de leurs déterminations, tantôt une seule de ces déterminations. Quelques auteurs ont proposé d'adopter pour chaque cas une notation spéciale.

Mais cela nous semble inutile, à la condition que le lecteur soit prévenu et prenne lui-même les précautions nécessaires pour éviter toute confusion.

Application des imaginaires à la généralisation et à la démonstration des formules trigonométriques.

863. I. Rapports trigonométriques de la somme d'un nombre quelconque d'arcs.

Nous avons vu (*Trigon.*, 54) comment on pouvait calculer de proche en proche les rapports trigonométriques de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, quand on connaissait les rapports trigonométriques de chacun d'eux. Nous nous proposons ici de trouver directement, à l'aide des imaginaires, les formules générales qui résolvent cette question.

Considérons n imaginaires réduites (844), d'arguments α_1, α_2, α_3, ..., α_n. D'après la règle connue (841), leur produit aura pour expression

$$(1)\quad \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n).$$

On peut l'obtenir sous une autre forme en employant, pour chaque facteur imaginaire, la transformation

$$\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1=\cos\alpha_1(1+i\operatorname{tang}\alpha_1).$$

Le produit a alors, pour seconde expression,

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n(1+i\operatorname{tang}\alpha_1) \\ \quad\times(1+i\operatorname{tang}\alpha_2)(1+i\operatorname{tang}\alpha_3)\ldots(1+i\operatorname{tang}\alpha_n). \end{cases}$$

Mais, si l'on désigne par P_k la somme des produits k à k des tangentes des arguments considérés, k variant de 1 à n, le produit des facteurs binômes de la forme $1+i\operatorname{tang}\alpha_1$ pourra s'écrire (826 et *Alg. élém.*, 29)

$$1-P_2+P_4-\ldots+i(P_1-P_3+P_5-\ldots).$$

Par conséquent, en substituant ce résultat dans l'expression (2) et en égalant ensuite cette expression à l'expression (1), on aura

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)$$
$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n[1-P_2+P_4-\ldots+i(P_1-P_3+P_5-\ldots)].$$

Il en résulte immédiatement (810)

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)\\ \quad=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n(1-P_2+P_4-\ldots),\end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)\\ \quad=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n(P_1-P_3+P_5-\ldots).\end{array}\right.$$

Si, dans les seconds membres des formules (3) et (4) qui résolvent la question pour le cosinus et le sinus d'une somme, on fait passer le produit des cosinus dans la parenthèse qui renferme les tangentes, ces dernières disparaissent, et le cosinus ou le sinus d'une somme d'arcs se trouve exprimé en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs.

En divisant les formules (4) et (3) membre à membre, il vient, pour la tangente d'une somme d'arcs, exprimée en fonction des tangentes de ces arcs,

$$(5)\quad \operatorname{tang}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)=\frac{P_1-P_3+P_5-\ldots}{1-P_2+P_4-\ldots}.$$

864. II. Rapports trigonométriques d'un multiple quelconque d'un arc.

Nous avons montré également (*Trigon.*, 61, 62) comment on pouvait calculer de proche en proche les rapports trigonométriques d'un multiple quelconque d'un arc, quand on connaissait les rapports trigonométriques de cet arc. Nous allons trouver directement, à l'aide des imaginaires, les formules générales qui résolvent cette question.

La formule de Moivre (843) nous donne

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m=\cos m\alpha+i\sin m\alpha.$$

Or, si l'on développe le premier membre comme on a développé $(a+bi)^m$ [827], on pourra ensuite (810) égaler la partie réelle de ce développement à $\cos m\alpha$ et le coefficient de i dans ce même développement à $\sin m\alpha$. On aura ainsi immédiatement, en se reportant au n° 827,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos m\alpha=\cos^m\alpha-\dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha\\ \qquad\qquad+\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots\end{array}\right.$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} \sin m\alpha = \dfrac{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha - \dots \end{cases}$$

Les formules (1) et (2) font connaître le cosinus et le sinus d'un multiple quelconque d'un arc, en fonction du sinus et du cosinus de cet arc. Il est utile de remarquer que $\cos m\alpha$ peut toujours s'exprimer rationnellement en fonction de $\cos\alpha$, tandis que $\sin m\alpha$ ne le peut jamais. D'autre part, pour que $\cos m\alpha$ puisse s'exprimer rationnellement en fonction de $\sin\alpha$, il faut que m soit pair; et, pour que $\sin m\alpha$ puisse s'exprimer rationnellement en fonction de $\sin\alpha$, il faut que m soit impair (*Trigon.*, **34**).

En divisant les formules (2) et (1) membre à membre, puis en divisant par $\cos^m\alpha$ les deux termes de la fraction trouvée, il vient

$$(3)\quad \operatorname{tang} m\alpha = \frac{\left\{ \dfrac{m}{1}\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\alpha + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tang}^5\alpha - \dots \right\}}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\alpha + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\alpha - \dots}.$$

On voit que $\operatorname{tang} m\alpha$ s'exprime toujours rationnellement en fonction de $\operatorname{tang}\alpha$.

865. III. Puissances des rapports trigonométriques d'un arc.

Comme dernière application, proposons-nous, m étant un entier positif, de calculer $\cos^m\alpha$ et $\sin^m\alpha$, connaissant les cosinus et les sinus de α et des arcs multiples de α.

Prenons les deux expressions imaginaires conjuguées qui correspondent à α, et posons

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = u,$$
$$\cos\alpha - i\sin\alpha = v.$$

Il en résulte, par addition et soustraction,

$$2\cos\alpha = u + v, \qquad 2i\sin\alpha = u - v.$$

Nous aurons donc, en élevant ces deux relations à la puissance m,

$$2^m \cos^m \alpha = (u + v)^m, \qquad 2^m i^m \sin^m \alpha = (u - v)^m.$$

Si l'on développe les seconds membres par la formule du binôme, il vient (255, 261)

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 2^m \cos^m \alpha \quad &= u^m + \frac{m}{1} u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 + \dots \\ &\quad + \frac{m}{1} u v^{m-1} + v^m. \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 2^m i^m \sin^m \alpha = u^m &- \frac{m}{1} u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 - \dots \\ &\quad \mp \frac{m}{1} u v^{m-1} \pm v^m. \end{aligned} \right.$$

Mais, dans ces développements, les termes à égale distance des extrêmes ont des coefficients égaux en valeur absolue et peuvent être groupés deux à deux.

Considérons la relation (1).

En supposant d'abord *m pair,* on pourra l'écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} 2^m \cos^m \alpha = (u^m + v^m) &+ \frac{m}{1} u v (u^{m-2} + v^{m-2}) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \dots, \end{aligned} \right.$$

et le dernier terme du second membre, qui sera *alors* le terme du milieu dans le second membre de la relation (1), se présentera sous la forme (262)

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\dots\left(\frac{m}{2}\right)} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on a d'abord $uv = 1$, puisqu'il s'agit d'imaginaires conjuguées, et ensuite, d'après la formule de Moivre (843),

$$u^k + v^k = 2 \cos k\alpha,$$

il vient, *dans le cas de m pair*, en divisant tout par 2,

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} 2^{m-1}\cos^m\alpha = {} & \cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha + \dots \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\dots m}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose *m impair*, la seule différence, c'est que le dernier terme du second membre de la relation (3) est *alors* la somme des deux termes du milieu dans le second membre de la relation (1). Ce dernier terme se présente donc sous la forme (262)

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\dots\frac{m-1}{2}}\,u^{\frac{m-1}{2}}v^{\frac{m-1}{2}}(u+v).$$

Comme $u+v=2\cos\alpha$, on peut alors diviser tous les termes par 2, et il vient, *dans le cas de m impair*,

$$(A')\quad \left\{\begin{aligned} 2^{m-1}\cos^m\alpha = {} & \cos m\alpha + \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha + \dots \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\dots\frac{m-1}{2}}\cos\alpha. \end{aligned}\right.$$

Considérons à présent *la relation* (2).

En lui appliquant la même analyse et en supposant d'abord *m pair*, on pourra l'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 2^m i^m \sin^m\alpha = {} & (u^m+v^m) - \frac{m}{1}uv(u^{m-2}+v^{m-2}) \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^2(u^{m-4}+v^{m-4}) - \dots, \end{aligned}\right.$$

et le dernier terme du second membre, qui sera *alors* le terme

du milieu dans le second membre de la relation (2), se présentera sous la forme

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\dots\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}.$$

Le signe + correspond évidemment à $\frac{m}{2}$ pair et le signe — à $\frac{m}{2}$ impair.

Ainsi, *dans le cas de m pair,* on a, en divisant tout par 2,

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} 2^{m-1} i^m \sin^m \alpha = {} & \cos m\alpha - \frac{m}{1}\cos(m-2)\alpha \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\alpha - \dots \\ & \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\dots m}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose *m impair,* les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de signes contraires, au lieu d'être égaux et de même signe, de sorte que la relation (2) peut s'écrire

$$(4\,bis)\quad \left\{ \begin{aligned} 2^m i^m \sin^m \alpha = {} & (u^m - v^m) - \frac{m}{1} uv(u^{m-2} - v^{m-2}) \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} - v^{m-4}) - \dots, \end{aligned} \right.$$

et le dernier terme du second membre, qui est *alors* la somme des deux termes du milieu dans le second membre de la relation (2), se présente sous la forme

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\dots\frac{m-1}{2}} u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} (u-v).$$

Le signe + correspond évidemment à $\frac{m-1}{2}$ pair et le signe — à $\frac{m-1}{2}$ impair.

D'ailleurs, d'après les valeurs de u et de v et la formule de Moivre, on a

$$u^k - v^k = 2\,i \sin k\alpha.$$

Par suite, $u - v = 2\,i \sin\alpha$, et l'on peut diviser tous les termes par $2\,i$. Il vient donc, *dans le cas de m impair*,

$$(B')\quad \left\{\begin{aligned} 2^{m-1} i^{m-1} \sin^m \alpha = {} & \sin m\alpha - \frac{m}{1} \sin(m-2)\alpha \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin(m-4)\alpha - \dots \\ & \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\dots\frac{m-1}{2}} \sin\alpha. \end{aligned}\right.$$

Dans le premier membre de la formule (B), *m étant pair*, on peut remplacer i^m par $(i^2)^{\frac{m}{2}}$ ou par $(-1)^{\frac{m}{2}}$. De même, dans le premier membre de la formule (B'), $m-1$ *étant pair*, on peut remplacer i^{m-1} par $(i^2)^{\frac{m-1}{2}}$ ou par $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$. Toute trace des expressions imaginaires employées disparaît donc.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES QUANTITÉS IMAGINAIRES ET DES OPÉRATIONS SUR CES QUANTITÉS.

Notions préliminaires.

866. Comme nous l'avons rappelé (800), les quantités négatives ont été d'abord regardées comme de purs symboles. Ce n'est que par une interprétation concrète qu'on a pu leur restituer la réalité qui leur appartient et leur faire dans la Science leur véritable place. Il en a été de même des quantités imaginaires, qui n'ont pu acquérir un sens réel que lorsqu'on est arrivé à les représenter géométriquement.

Il convient de dire ici que la théorie algébrique des imaginaires a été fondée surtout par les travaux de D'ALEMBERT, d'EULER et, en dernier lieu, de CAUCHY.

Quant à leur interprétation concrète, on doit sans doute en faire remonter l'honneur à R. ARGAND [1], à C.-V. MOUREY [2], et à CAUCHY [3] lui-même, qui, en adoptant les vues de ses devanciers, leur a donné la consécration de son génie.

La règle relative aux solutions négatives (800) ne peut être directement démontrée, mais elle se vérifie d'une manière

---

(1) R. ARGAND, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806). 2e édition, 1874; Gauthier-Villars.

(2) C.-V. MOUREY, *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* (1828). 2e édition, 1861; Mallet-Bachelier.

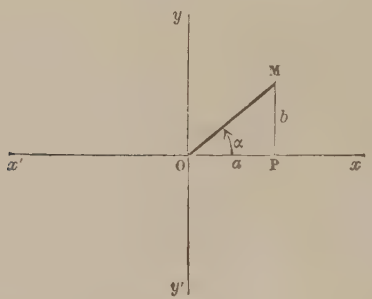
(3) CAUCHY, *Anciens Exercices d'Analyse et de Physique mathematique*, t. IV (voir les ŒUVRES COMPLÈTES DE CAUCHY, publiées sous la direction scientifique de l'ACADÉMIE DES SCIENCES et sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. — Gauthier-Villars.)

constante dans toutes les branches des Sciences mathématiques. Nous croyons qu'il en est de même de la règle que nous allons faire connaître et qui sert de fondement à la représentation géométrique des quantités imaginaires.

867. Reportons-nous aux premières notions établies en Algèbre élémentaire (*Alg. élém.*, 312 et suiv.) sur la représentation graphique des variations correspondantes d'une fonction et de la variable dont elle dépend. Ces notions nous ont déjà permis de définir les rapports trigonométriques d'une façon complètement générale (*Trigon.*, 4, 5, 6 et suiv.).

Traçons dans un plan (*fig.* 21) deux axes rectangulaires

Fig. 21.



xx', yy', formant un système d'axes coordonnés dont le point O est l'origine.

Si l'on donne une expression imaginaire de la forme $a + bi$, il est facile de construire le point M dont l'abscisse OP représente la partie réelle a de l'imaginaire et dont l'ordonnée PM représente la quantité réelle b associée à i.

Toutes les fois qu'on connaîtra l'imaginaire par ses éléments a et b, le point M correspondant sera ainsi déterminé dans le plan; et, réciproquement, toutes les fois qu'on marquera le point M dans le plan, une certaine expression imaginaire, et une seule, lui correspondra, cette imaginaire ayant pour partie réelle la valeur de l'abscisse OP et, pour coefficient de i, la valeur de l'ordonnée PM.

Pour identifier entièrement le point M (qualifié alors de *point imaginaire*) et l'expression imaginaire $a + bi$, il suffit de convenir que l'expression imaginaire est la *somme* de

l'abscisse et de l'ordonnée du point, cette dernière étant multipliée par i.

Mais, l'ordonnée étant perpendiculaire à l'abscisse, cette assimilation exige que *le signe d'opération* i *ou* $\sqrt{-1}$ *soit l'équivalent algébrique de la perpendicularité géométrique.* C'est ce que l'on admet aujourd'hui.

868. Si l'on joint l'origine O au point M (*fig.* 21), on a, dans le triangle rectangle OPM, en désignant par α l'angle xOM de OM avec Ox,

$$\text{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On voit (836) que OM représente le *module* de l'expression imaginaire dont il s'agit et que l'angle α est son *argument.*

Considérer OM au lieu de considérer le point M, c'est donc, pour l'imaginaire $a + bi$, passer de la forme *algébrique* à la forme *trigonométrique.*

On parvient de la sorte à un second mode de représentation géométrique, qui est celui que nous adopterons ici.

a est la projection de OM sur l'axe xx', b est la projection de OM sur l'axe yy', et cette dernière projection doit être affectée du signe ou du facteur i, l'axe yy' étant perpendiculaire à l'axe xx'. *L'expression imaginaire, représentée trigonométriquement par* OM, *est donc, algébriquement, la somme des projections de* OM *sur les deux axes.*

Mode de représentation géométrique des quantités imaginaires.

869. Soit l'expression imaginaire trigonométrique

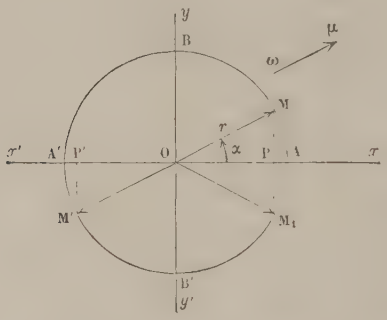
$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

D'après ce qui précède, nous tracerons dans un plan (*fig.* 22) les deux axes coordonnés rectangulaires xx', yy'. De l'origine O comme centre, avec le module r pour rayon, nous décrirons un cercle. L'expression imaginaire proposée sera figurée par le rayon OM de ce cercle qui fait l'angle α avec la partie positive Ox de l'axe xx', c'est-à-dire que sa

représentation géométrique dépend immédiatement de son module et de son argument (¹).

On compte l'angle α, positivement, à partir de Ox, en tournant dans un sens convenu. Ce sera, comme en Trigonométrie, celui de Ox vers Oy ou *de droite à gauche*. Cet angle α

Fig. 22.



pourra prendre toutes les valeurs entre $+\infty$ et $-\infty$; mais le module r, essentiellement positif, ne pourra varier que de 0 à $+\infty$.

Cette représentation admise, on voit que les quantités réelles et les imaginaires simples ne sont que des cas particuliers des imaginaires complexes (**803**, **838**).

Si l'on a $\alpha = 0$ ou $\alpha = 0 + 2k\pi$, k étant un entier quelconque, la quantité imaginaire se réduit à la quantité *positive* r, représentée par le segment OA (*fig.* 22), compté à partir de l'origine sur la partie positive de l'axe xx'.

Si l'on a $\alpha = \pi$ ou $\alpha = (2k+1)\pi$, la quantité imaginaire se réduit à la quantité *négative* $-r$, représentée par le segment OA', compté à partir de l'origine sur la partie négative de l'axe xx'.

Si l'on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, la quantité imaginaire se réduit à $+ri$, *imaginaire simple positive*, représentée par le segment OB, compté à partir de l'origine sur la partie positive de l'axe yy', lui-même perpendiculaire à l'axe xx' dont la partie Ox sert de point de départ aux arguments.

(¹) Mourey appelait *verseur* l'angle que nous appelons *argument*.

Enfin, si l'on a $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, la quantité imaginaire se réduit à $-ri$, *imaginaire simple négative*, représentée par le segment OB', compté à partir de l'origine sur la partie négative de l'axe yy'.

En résumé, on peut dire que *l'axe xx' étant l'axe des quantités réelles, l'axe yy' est celui des quantités imaginaires simples positives ou négatives, tandis que les quantités imaginaires complexes sont représentées par les rayons intermédiaires de tous les cercles qu'on peut tracer dans le plan des axes autour de l'origine* O. *Et il apparaît ainsi que la forme générale des quantités est*, au point de vue où nous nous plaçons, *la forme imaginaire*.

870. Le segment OM, transporté parallèlement à lui-même en $\omega\mu$ (*fig.* 22), ω étant la nouvelle origine, représente la même expression imaginaire, puisque ce transport n'altère ni le module ni l'argument.

Deux segments rectilignes de même longueur, de même direction et de même sens, c'est-à-dire deux segments parallèles, égaux et de même sens, représentent donc deux imaginaires égales; et réciproquement. (Les modules sont alors égaux; les arguments sont égaux ou diffèrent d'un nombre exact de circonférences.)

871. Si l'on prolonge OM en sens inverse suivant OM' (*fig.* 22), on augmente de π l'argument α, et l'expression imaginaire représentée par OM' est

$$r[\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)] = r(-\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

c'est-à-dire qu'elle est égale et de signe contraire à celle représentée par OM.

D'une manière générale, deux imaginaires égales et de signes contraires sont donc représentées par deux segments parallèles, égaux et de sens contraires.

872. Si l'on considère (*fig.* 22) le rayon OM_1, symétrique du rayon OM par rapport à l'axe xx', l'argument α change de signe, et l'expression imaginaire représentée par OM_1 est

$$r[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)] = r(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

c'est-à-dire qu'elle est la conjuguée de celle représentée par OM.

Deux imaginaires conjuguées sont donc représentées d'une manière générale, par deux segments égaux, également inclinés de part et d'autre de l'axe xx'.

873. La *grandeur* d'une quantité imaginaire s'estime par la longueur absolue de la droite OM qui la représente, c'est-à-dire par la grandeur même de son module, $+\sqrt{a^2+b^2}$ (820).

Lorsque le module s'annule, il en est de même de la quantité imaginaire, qui se réduit à l'origine O dont les coordonnées sont nulles. La nullité de la quantité imaginaire correspond donc à $a=0$, $b=0$ (867).

874. Cauchy a appelé *quantité géométrique* toute droite donnée en grandeur d'abord, et en direction ensuite, en partant de l'une de ses extrémités dite *extrémité initiale*, et en marchant vers l'autre extrémité dite *extrémité finale*, de sorte que la direction ainsi entendue comprend à la fois *la direction et le sens*.

D'après le mode de représentation que nous venons d'indiquer (869), on voit que *les quantités géométriques comprennent*, dans leur ensemble, *les quantités réelles et les quantités imaginaires*.

Une quantité géométrique étant déterminée par son module r et par son argument α, on peut la représenter commodément par la notation

$$r_\alpha,$$

à laquelle correspond la dénomination souvent employée de *vecteur*.

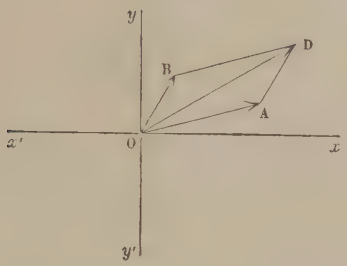
Les quantités géométriques jouissent de propriétés importantes qu'on peut démontrer facilement (*Géom.*, *Questions proposées*, n° 235), dont on retrouve l'emploi dans toutes les branches concrètes des Sciences mathématiques, et que nous allons appliquer aux opérations sur les quantités imaginaires figurées géométriquement.

Addition et soustraction.

875. Soient les deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$, représentées géométriquement (*fig.* 23) par OA et OB. Transportons le segment OB parallèlement à lui-même en AD, il représentera toujours la même quantité imaginaire (870).

Considérons maintenant le segment OD, *résultante* des segments OA et OB qui sont, réciproquement, ses *composantes* (*loc. cit.*). D'après un théorème connu (*Trigon.*, 48), la projection de OD sur chacun des axes xx', yy' est la somme

Fig. 23.



des projections de OA et de AD ou de OA et de OB (*Trigon.*, 45) sur les mêmes axes. La projection de OD étant ainsi égale à $a + a'$ sur l'axe xx' et à $b + b'$ sur l'axe yy', OD représente (868) la quantité imaginaire

$$(a + a') + (b + b')\,i,$$

c'est-à-dire (811) la *somme* des imaginaires proposées.

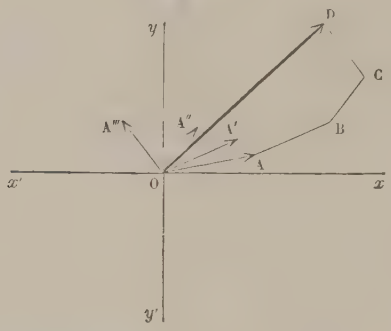
Pour ajouter géométriquement deux quantités imaginaires, on n'a donc qu'à former le triangle OAD ou le parallélogramme OADB de ces imaginaires : leur somme est alors représentée par le côté OD du triangle ou par la diagonale OD du parallélogramme. (C'est le théorème du triangle ou du parallélogramme des imaginaires, analogue au théorème du triangle ou du parallélogramme des vitesses ou des forces en Mécanique.)

Si l'on remarque que, dans le triangle OAD, le côté OD est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence, on arrive immédiatement à ce résultat, déjà connu : *le module de la somme de deux quantités imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules des parties* (840).

876. On peut étendre immédiatement les considérations précédentes à l'addition d'un nombre quelconque de quantités imaginaires.

Si l'on a à ajouter des quantités imaginaires représentées géométriquement par OA, OA', OA'', OA''' (*fig.* 24), on n'a qu'à former le contour polygonal OABCD, dont les côtés leur sont respectivement égaux, parallèles et de même sens. La

Fig. 24.

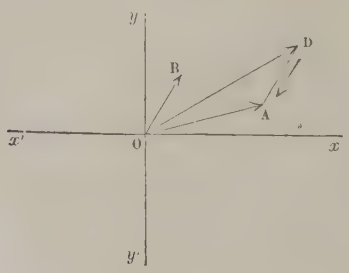


droite OD qui ferme ce contour, résultante des quantités géométriques proposées, représentera géométriquement la somme des imaginaires correspondantes. (C'est le théorème du polygone des imaginaires.)

La droite OD étant au plus égale à la somme des côtés du contour OABCD, on voit que *le module d'une somme ne peut jamais surpasser la somme des modules des parties* (840).

877. La soustraction étant l'opération inverse de l'addition, il est facile de construire géométriquement la différence de deux quantités imaginaires.

Fig. 25.



Soient ces quantités représentées (*fig.* 25) par OD et par OB : on veut retrancher la seconde de la première.

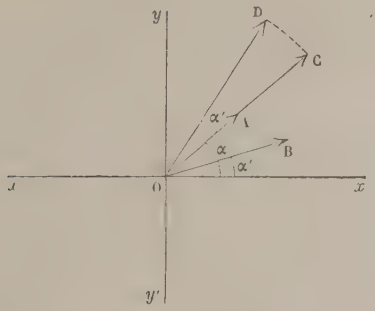
Si l'on ajoute à OD, d'après la règle précédente (875), la quantité imaginaire — OB, en prenant le segment DA égal et parallèle à OB, mais de sens contraire (871), la résultante OA représentera la différence cherchée; car, si l'on ajoute à OA la quantité soustraite OB, en prenant AD égal et parallèle à OB, et de même sens, on retrouve OD comme résultante ou comme somme.

Multiplication et division.

878. Nous avons vu (841, 842) que le produit ou le quotient de deux quantités imaginaires a pour module le produit ou le quotient de leurs modules et, pour argument, la somme ou la différence de leurs arguments.

Supposons d'abord que OA et OB (*fig.* 26) représentent géométriquement deux quantités imaginaires à multiplier l'une par l'autre. Voici quelle sera la représentation géométrique de leur produit.

Fig. 26.



Le multiplicateur devant toujours être considéré comme abstrait, on multipliera la longueur OA par le nombre abstrait qui mesure la longueur OB. On obtiendra ainsi une longueur OC, comptée sur OA à partir du point O. Il restera à faire tourner la longueur OC d'un angle COD égal à l'angle xOB, et OD représentera géométriquement le produit OA.OB.

Cette construction s'étend évidemment au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Si l'on emploie la notation indiquée (874) et si l'on pose

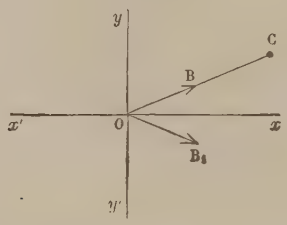
$$OA = r_\alpha, \quad OB = r'_{\alpha'},$$

on a, évidemment,

$$OD = (rr')_{\alpha+\alpha'}.$$

879. Si l'on a à multiplier les deux imaginaires conjuguées représentées (*fig.* 27) par OB et OB_1 (872), comme leurs modules sont égaux, on obtient d'abord sur OB une longueur OC correspondant au carré du nombre qui mesure OB. Puis,

Fig. 27.



il s'agit de faire tourner OC de l'angle négatif $x\mathrm{OB}_1$; ce qui ramène cette longueur sur $\mathrm{O}x$. Le produit de deux imaginaires conjuguées est donc le carré positif de leur module commun (820).

880. La division étant l'opération inverse de la multiplication, si l'on a à diviser l'imaginaire représentée par OD par l'imaginaire représentée par OB (*fig.* 26), on divisera d'abord la longueur OD par le nombre abstrait qui mesure la longueur OB, et l'on obtiendra comme quotient une certaine longueur (qui sera égale à OA), comptée sur OD à partir du point O. Il restera à faire tourner cette longueur, dans le sens négatif, d'un angle égal à l'angle $x\mathrm{OB}$, et l'on retombera sur OA comme représentation géométrique du quotient de OD par OB.

Puissances et racines.

881. Ce qu'on vient de dire pour la multiplication d'un nombre quelconque de facteurs (878) s'applique nécessairement à toute puissance entière et positive d'une quantité imaginaire. On arrive ainsi, dans cette hypothèse, à la représentation géométrique de la formule de Moivre (843)

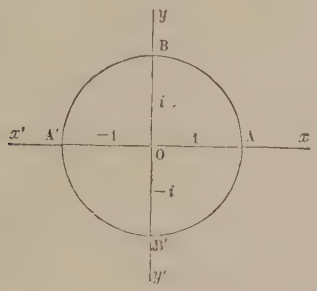
$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^m = r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha).$$

882. Si l'on veut, en particulier, former les puissances de i, on sait (869), en supposant le module r égal à l'unité, que i est représenté par une longueur OB (*fig.* 28), égale à l'unité,

et portée sur la partie positive de l'axe yy', puisque l'argument correspondant est $\frac{\pi}{2}$.

Pour multiplier i par i, il faut alors porter la même longueur égale à l'unité perpendiculairement à OB, afin d'ajouter les arguments; ce qui donne $i^2 = OA' = -1$.

Fig. 28.

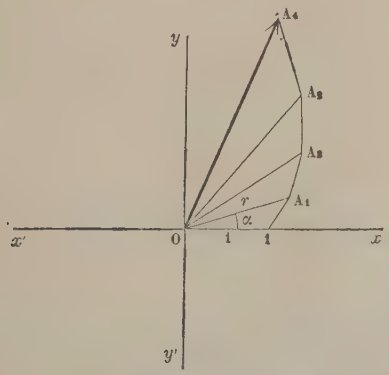


On obtient de même $i^3 = OB' = -i$ et $i^4 = OA = +1$. Et ces résultats se reproduisent indéfiniment, d'une manière périodique (826).

883. m étant entier et positif, pour obtenir géométriquement la puissance m de l'imaginaire représentée par $OA_1 = r_\alpha$, on peut opérer comme il suit.

Soit (*fig.* 29) O1 l'unité positive mesurée sur Ox. Con-

Fig. 29.



struisons sur OA_1 un triangle OA_1A_2, semblable au triangle

$O1A_1$, les côtés homologues dans les deux triangles étant OA_1 et $O1$. Construisons successivement, dans les mêmes conditions, les triangles OA_2A_3, OA_3A_4, ..., tous semblables au premier triangle $O1A_1$. Il est clair, pour OA_4 par exemple, que l'argument xOA_4 est égal à 4α. On a, de plus,

$$\frac{O1}{OA_1} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA_2}{OA_3} = \frac{OA_3}{OA_4} = \ldots,$$

et il en résulte

$$OA_2 = \overline{OA_1}^2 = (r_\alpha)^2,$$
$$OA_3 = OA_2 . OA_1 = (r_\alpha)^3,$$
$$OA_4 = OA_3 . OA_1 = (r_\alpha)^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

884. Nous avons vu (846) que l'extraction de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une quantité imaginaire correspond à la formule

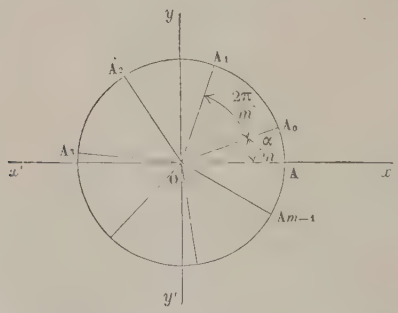
$$\sqrt[m]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right),$$

et que cette racine $m^{\text{ième}}$ présente m valeurs distinctes qu'on obtient en donnant à l'entier k les m valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Il est facile de figurer géométriquement ces m valeurs de la racine $m^{\text{ième}}$.

On n'a qu'à décrire un cercle, de l'origine O comme centre, avec $\sqrt[m]{r}$ comme rayon (*fig.* 30); puis, à prendre d'abord, à

Fig. 30.



partir de son point d'intersection A avec Ox, un premier arc AA_0 égale à $\frac{\alpha}{m}$.

Cela fait, on divise, à partir de A_0, la circonférence en m

parties égales A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{m-1}A_0$. Il est évident, d'après ce qui précède, que les rayons qui aboutissent aux m points de division A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_{m-1}, représentent respectivement les m racines de même module $\sqrt[m]{r}$ et d'arguments successifs (846)

$$\frac{\alpha}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{4\pi}{m},\quad \ldots,\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

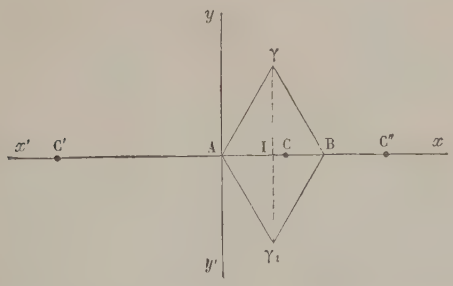
Interprétation des solutions imaginaires.

885. Nous terminerons ce sujet en remarquant que le mode de représentation géométrique des quantités imaginaires permet de les interpréter comme solutions des problèmes, en entendant l'énoncé primitif dans un sens plus général, comme on l'a fait d'ailleurs dans le cas des solutions négatives.

Pour en donner un exemple simple, reportons-nous au problème *de la moyenne et extrême raison* (*Alg. élém.*, 256).

Lorsqu'on place, sur la droite donnée $AB = a$ qu'on veut partager en moyenne et extrême raison, le point de division C

Fig. 31.



entre les points A et B (*fig.* 31), en posant $AC = x$, l'équation du problème est

$$x^2 = a(a-x) \qquad \text{ou} \qquad x^2 + ax - a^2 = 0,$$

et l'on trouve pour racines

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

L'une est *positive* et répond au point C; l'autre est *négative*, elle s'interprète comme à l'ordinaire et répond à un point C′ situé à gauche de BA ou du point A.

Si l'on essaye de placer le point de division en C″, à droite de AB ou du point B, l'équation du problème devient

$$x^2 = a(x - a) \qquad \text{ou} \qquad x^2 - ax + a^2 = 0,$$

et l'on trouve pour racines les deux *imaginaires conjuguées*

$$x = \frac{a}{2} \pm i\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Ce résultat indique l'impossibilité de répondre à la question *telle qu'elle a été posée*, impossibilité évidente *a priori*, puisque C″A surpasse à la fois AB et C″B.

Pour aller plus loin, construisons les deux racines imaginaires (867, 868), en prenant le point A pour origine et la droite AB pour axe xx'. Cette construction sera facile, puisque $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

Par le point I, milieu de AB, élevons donc à l'axe xx' une perpendiculaire, sur laquelle nous marquerons, de part et d'autre du point I, des longueurs $I\gamma = I\gamma_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, et les deux imaginaires conjuguées seront représentées par les longueurs

$$A\gamma = A\gamma_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a.$$

Il en résulte que les points symétriques γ et γ_1 sont les sommets des deux triangles équilatéraux symétriques, que l'on peut construire sur AB, dans le plan considéré.

Pour pouvoir accepter les solutions ou les points imaginaires, γ et γ_1, il suffit donc de modifier l'énoncé primitif, en disant que l'on veut trouver, dans un plan passant par AB, *soit sur cette droite, soit en dehors de cette droite*, un point dont la distance au point A soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point B et la droite AB.

On a bien, en effet, puisque $A\gamma = \gamma B = a$,

$$\overline{A\gamma}^2 = AB.\gamma B.$$

On peut mettre les deux racines imaginaires sous la forme trigonométrique (836)

$$x = a\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

et l'on voit que, si l'on fait tourner le plan de la figure autour de la droite AB, le problème de la moyenne et extrême raison n'a que les deux solutions réelles répondant aux points C et C', tandis qu'il admet un nombre illimité de solutions imaginaires. Ces solutions imaginaires sont représentées par les génératrices d'un cône de révolution de sommet A, dont l'axe est la droite AB et dont la base est le cercle décrit sur $\gamma\gamma_1$ comme diamètre, dans un plan perpendiculaire à AB

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

Définitions et notions préliminaires.

886. Les définitions données précédemment relativement aux fonctions (439 et suiv., 446 et suiv.) s'appliquent aux cas où la variable indépendante reçoit des valeurs *imaginaires*.

Si z est la variable indépendante, réelle ou imaginaire, toute fonction *entière* de z est un polynôme de la forme

$$F(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

m représentant un entier positif et A_0, A_1, A_2, ..., A_m, des nombres constants, réels ou imaginaires, mais indépendants de z.

Le quotient de deux pareilles expressions est une fonction *rationnelle* de z, à laquelle on donne souvent le nom de *fraction rationnelle*.

Toute racine d'une fonction rationnelle de z constitue une fonction *irrationnelle* de la même variable.

Ces différentes fonctions sont dites *algébriques*.

Toutes celles qui ne rentrent pas dans les définitions précédentes sont qualifiées de *transcendantes*.

887. Lorsqu'on remplace, dans une fonction algébrique $u = \varphi(z)$, la variable z par une expression imaginaire

$$x + yi,$$

nous avons démontré (811 et suiv.) qu'on obtient toujours pour résultat une expression de même forme. On peut donc écrire

$$u = \varphi(x + yi) = P + Qi,$$

P et Q étant deux fonctions *réelles* de x et de y.

On peut mettre l'imaginaire $x + yi$ sous la forme trigonométrique (836), en posant

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha,$$

de manière à avoir

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Dans cette hypothèse, P et Q sont des fonctions réelles des variables r et α. On peut d'ailleurs écrire aussi

$$u = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

le module ρ et l'argument ω dépendant de r et de α

D'après le double mode de représentation géométrique indiqué précédemment (867, 868), à chaque valeur de z répond un certain point du plan où l'on a tracé les axes rectangulaires xx' et yy'; et les coordonnées de ce point déterminent les valeurs correspondantes de P et Q, c'est-à-dire, en général, la valeur de la fonction φ pour la valeur attribuée à z.

Si x et y ou r et α varient d'une manière continue (456), le point déterminé par chaque valeur de z décrit une certaine courbe dans le plan $x\mathrm{O}y$, et l'on dit que z varie d'une manière continue.

Si, dans ce cas, les valeurs de la fonction u varient également d'une manière continue (et sans ambiguïté), ce qui exige que cette même condition soit remplie par les quantités P et Q ou ρ et ω, la fonction u est continue dans l'intervalle considéré. Le point (z) décrivant une courbe dans le plan $x\mathrm{O}y$, le point (u) décrit alors une autre courbe dans le même plan ou dans tout autre plan auquel on veuille rapporter ses coordonnées P et Q.

888. Il est nécessaire d'examiner spécialement le cas où, la fonction proposée étant z^m, m est un exposant fractionnaire à termes entiers de la forme $\frac{p}{q}$.

On a, dans cette hypothèse, en désignant par k un entier quelconque,

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r[\cos(\alpha + 2k\pi) + i\sin(\alpha + 2k\pi)];$$

puis, par la formule de Moivre (843 et suiv.) et q pouvant tou-

jours être supposé positif,

$$z^m = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p} = \sqrt[q]{r^p}\left[\cos\frac{p(\alpha+2k\pi)}{q} + i\sin\frac{p(\alpha+2k\pi)}{q}\right].$$

Pour chaque système de valeurs attribuées à r et à α, c'est-à-dire pour chaque valeur de z, la fonction z^m ou $z^{\frac{p}{q}}$ sera susceptible de q valeurs distinctes qu'on obtiendra en donnant q valeurs successives à l'entier k (846), par exemple, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Il en résulte que, à une valeur déterminée de la variable, ne répond pas une valeur déterminée de la fonction. La fonction complexe z^m n'est donc pas complètement définie, lorsque m est fractionnaire.

889. Quand on suppose $y = 0$ dans la fonction complexe

$$\varphi(x+yi),$$

on obtient la fonction réelle $\varphi(x)$. Il faut donc que la fonction complexe ne soit que la généralisation de cette fonction réelle et qu'elle jouisse de ses propriétés caractéristiques. Les définitions adoptées devront donc nécessairement se prêter à cette généralisation, de manière que les propriétés générales des fonctions réelles appartiennent également aux fonctions complexes correspondantes. C'est là une remarque qu'il ne faut jamais perdre de vue.

Pour pouvoir passer commodément des fonctions réelles *élémentaires* aux fonctions complexes de même espèce, nous étudierons d'abord les séries dont les termes sont imaginaires.

Des séries à termes imaginaires.

890. Nous ferons observer en premier lieu que la fonction représentée ou définie par une série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable, réelle ou imaginaire, est véritablement une fonction transcendante, puisque la définition d'une fonction entière exige que le polynôme correspondant ait un nombre limité de termes (350).

Cela posé, voici comment on définit la convergence d'une série à termes imaginaires.

Admettons que les termes d'une série soient de la forme générale $u+vi$, u et v étant des quantités réelles. Si les deux

séries à termes réels

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots,$$

$$(2) \qquad v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots,$$

sont convergentes et ont respectivement pour sommes S et T, on dit que la série à termes imaginaires

$$(3) \quad u_0 + v_0 i, \quad u_1 + v_1 i, \quad u_2 + v_2 i, \quad \ldots, \quad u_n + v_n i, \quad \ldots,$$

est convergente et qu'elle a une somme égale à l'expression imaginaire $S + Ti$.

Si les séries (1) et (2) ne sont pas toutes deux convergentes, la série (3) est considérée comme divergente (ou indéterminée).

On voit que l'étude d'une série imaginaire est ainsi ramenée à celle de deux séries réelles.

Le théorème suivant permet souvent, en revenant à la forme trigonométrique, de se borner à l'examen d'une seule série à termes réels.

Il est entendu d'ailleurs (889) que les théorèmes relatifs aux séries imaginaires s'appliquent aux séries réelles.

891. I. *Lorsque les modules des termes d'une série forment une série convergente, la série proposée est elle-même convergente.*

On peut toujours mettre le terme général u_n de la série donnée sous la forme

$$r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n),$$

de sorte que cette série devient

$$\begin{aligned} r_0(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) &+ r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \\ &+ r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, si la série des modules

$$(1) \qquad r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$$

est convergente, il est clair que les deux séries

$$(2) \quad r_0\cos\alpha_0 + r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + \ldots + r_n\cos\alpha_n + \ldots,$$

$$(3) \quad r_0\sin\alpha_0 + r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2 + \ldots + r_n\sin\alpha_n + \ldots,$$

le sont *a fortiori* (367, V, VI). Par suite, la série proposée l'est aussi (890).

892. II. *Lorsque la série des modules est divergente, on reste dans le doute sur la convergence de la série correspondante.*

En effet, la série (1) [891] étant divergente, ses termes peuvent ou non tendre indéfiniment vers zéro (363).

Dans le premier cas, il n'est pas impossible que les séries (2) et (3) [891] soient convergentes, puisque leurs termes peuvent n'être pas de même signe et que ces termes tendent d'ailleurs indéfiniment vers zéro (362). On reste donc dans le doute à l'égard de la série proposée.

Dans le second cas, les séries (2) et (3) ne peuvent être toutes deux convergentes (362); car, si r_n ne tend pas vers zéro, il est impossible (*Trigon.*) que les termes $r_n \cos\alpha_n$ et $r_n \sin\alpha_n$ y tendent à la fois. La série proposée est donc alors divergente (ou indéterminée) [890].

893. III. Multiplication des séries. — Soient

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ u_n,\ \ldots,$$

$$(2) \qquad v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1},\ v_n,\ \ldots,$$

deux séries convergentes, réelles ou imaginaires, ayant respectivement pour sommes U et V. Si les deux séries sont réelles, on suppose qu'elles demeurent convergentes lorsqu'on ne considère que les valeurs absolues de leurs termes. Si les deux séries sont quelconques, on admet que les modules de leurs termes forment des séries convergentes.

Cela posé, *la série*

$$(3) \qquad t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n,\ \ldots,$$

dont le terme général t_n *a pour expression*

$$(4) \quad t_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

est alors *convergente et a pour somme* T *le produit* UV *des sommes des deux séries considérées.*

1° Supposons d'abord réelles les séries (1) et (2) et admettons que leurs termes soient tous positifs.

Représentons par U_n, V_n, T_n, comme à l'ordinaire, les sommes

respectives des n premiers termes dans chacune des séries (1), (2), (3). Nous aurons

$$\begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1}, \\ V_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-1}, \\ T_n &= t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1}, \end{aligned}$$

ou, d'après la condition (4),

$$\begin{aligned} T_n = u_0 v_0 &+ (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots \\ &+ (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + u_2 v_{n-3} + \ldots + u_{n-1} v_0). \end{aligned}$$

Le produit $U_n V_n$ renferme évidemment tous les termes de T_n, plus d'autres termes positifs. On a donc

$$U_n V_n > T_n.$$

D'autre part, si l'on désigne par k le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$ (lequel sera $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair), il est clair que tous les termes du produit $U_k V_k$ sont contenus à leur tour, avec d'autres termes positifs, dans T_n (1), de sorte qu'on a aussi

$$U_k V_k < T_n.$$

Mais k tend vers l'infini en même temps que n. Par suite, si l'on fait tendre n vers l'infini, U_n et U_k tendront vers leur limite commune U, de même que V_n et V_k vers leur limite commune V. La somme T_n demeure donc comprise entre deux produits qui convergent l'un et l'autre vers la même limite UV, lorsqu'on fait croître n indéfiniment. Il en résulte nécessairement

$$T = \lim T_n = UV.$$

2° Les séries (1) et (2) étant toujours réelles et convergentes, admettons qu'elles aient des termes positifs et des termes négatifs, mais qu'elles restent convergentes quand on prend tous leurs termes positivement.

---

(1) Pour $n = 5$, par exemple, il faut faire $k = 2$, et l'on a, à la fois,

$$U_2 V_2 = (u_0 + u_1)(v_0 + v_1) = u_0 v_0 + u_1 v_0 + u_0 v_1 + u_1 v_1$$

et

$$T_5 = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots.$$

On a, d'après ce qui précède (1°),

$$(5)\quad \begin{cases} U_n V_n - T_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) \\ \qquad + (u_{n-1}v_{n-3} + u_{n-2}v_{n-2} + u_{n-3}v_{n-1}) + \dots \\ \qquad + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \dots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}); \end{cases}$$

car on peut remarquer que, dans la valeur de T_n, les différents produits sont tous ceux où les indices de u et de v ont une somme variant de 0 à $n-1$, tandis que, dans la valeur de $U_n V_n$, les différents produits sont tous ceux où les indices de u et de v ont une somme variant de 0 à $2n-2$.

Nous venons d'ailleurs de démontrer (1°) que, lorsque les séries (1) et (2) ont tous leurs termes positifs, la différence $U_n V_n - T_n$ tend vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. La limite du second membre de l'égalité (5) étant ainsi zéro lorsqu'on prend positivement tous les termes des séries (1) et (2), cette limite restera telle (389), lorsqu'on rendra aux termes négatifs des deux séries le signe *moins* qu'ils possèdent en réalité. De plus, les séries (1) et (2) étant toujours convergentes, U_n et V_n présenteront toujours, pour $n=\infty$, des limites déterminées U et V, de sorte que de

$$\lim (U_n V_n - T_n) = 0$$

on déduira encore

$$T = UV.$$

Il ne faut pas oublier que la démonstration que nous venons de donner repose expressément sur la condition que les séries (1) et (2) demeurent convergentes, lorsqu'on prend tous leurs termes positivement.

3° Supposons, enfin, les séries (1) et (2) imaginaires et convergentes, et admettons que les séries formées par les modules de leurs termes soient aussi convergentes.

Représentons par

$$(1\ bis)\qquad r_0,\ r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_{n-1},\ r_n,\ \dots,$$

$$(2\ bis)\qquad s_0,\ s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{n-1},\ s_n,\ \dots,$$

les séries convergentes et de sommes R et S, formées par les modules des termes des séries (1) et (2), et par

$$(3\ bis)\qquad \theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \dots,\ \theta_{n-1},\ \theta_n,\ \dots,$$

la série dont le terme général a pour expression

$$(4\,bis)\qquad \Theta_n = r_0 s_n + r_1 s_{n-1} + r_2 s_{n-2} + \ldots + r_{n-1} s_1 + r_n s_0.$$

D'après ce qui précède (1°), la série (3 *bis*) est aussi convergente, et elle a pour somme Θ le produit RS des sommes des séries (1 *bis*) et (2 *bis*).

Désignons respectivement par U_n, V_n, T_n, les sommes des n premiers termes des séries (1), (2), (3), et par R_n, S_n, Θ_n, les sommes des n premiers termes des séries (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *bis*).

Nous aurons, à la fois, en appliquant l'égalité (5) [2°] aux deux groupes de séries considérés,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} U_n V_n - T_n = {} & u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \ldots \\ & + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \ldots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}), \end{aligned}\right.$$

$$(5\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} R_n S_n - \Theta_n = {} & r_{n-1} s_{n-1} + (r_{n-1} s_{n-2} + r_{n-2} s_{n-1}) + \ldots \\ & + (r_{n-1} s_1 + r_{n-2} s_2 + \ldots + r_2 s_{n-2} + r_1 s_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

Comme le module d'un produit est égal au produit des modules des facteurs (821, 841), le second membre de l'égalité (5 *bis*) est la somme des modules des termes qui composent le second membre de l'égalité (5). Or, le module d'une somme étant inférieur ou au plus égal à la somme des modules des parties (840), et le second membre de l'égalité (5 *bis*) tendant vers zéro par hypothèse quand n croît indéfiniment, le module du second membre de l'égalité (5) tend aussi nécessairement vers zéro; ce qui entraîne, à la limite, la nullité du premier membre de cette égalité (820, 873). On a donc encore

$$T = UV.$$

894. IV. Des séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable. — Étant donnée une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable imaginaire, on peut s'assurer de sa convergence comme il suit :

Il est évident d'abord que, *si l'on multiplie les termes d'une série imaginaire convergente, à termes positifs, par des nombres positifs inférieurs à un nombre déterminé* A, *on obtient une nouvelle série convergente.*

Car, soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

la série proposée, dont la somme des n premiers termes est S_n et dont la limite est S. Si l'on désigne par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, des nombres positifs moindres que A, la nouvelle série sera

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots ;$$

si l'on représente par S'_n la somme de ses n premiers termes, on a

$$S'_n < AS_n \quad \text{ou} \quad S'_n < AS,$$

quel que soit n. La seconde série a donc une limite et est convergente.

Cela posé, *si, pour une valeur de la variable, dont le module est r, les modules des termes d'une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de cette variable, demeurent inférieurs à un nombre déterminé* A, *la série est convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est moindre que r.*

En effet, soit la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

où z est la variable imaginaire et où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, sont des constantes réelles ou imaginaires. Appelons $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$, les modules de ces constantes. On suppose que, le module de la valeur donnée à z étant r, les modules des termes de la série (1), qui forment (821) la série

$$(2) \qquad r_0 + r_1 r + r_2 r^2 + r_3 r^3 + \ldots + r_n r^n + \ldots,$$

sont moindres que A. Donnons maintenant à la variable z une valeur dont le module r' soit moindre que r. La série

$$(3) \qquad 1 + \frac{r'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{r'}{r}\right)^n + \ldots,$$

progression géométrique indéfiniment décroissante, sera convergente. Si l'on multiplie alors respectivement les termes de la série (3) par les termes de la série (2), moindres que A par hypothèse, on obtiendra, d'après la remarque préliminaire, une nouvelle série convergente

$$(4) \qquad r_0 + r_1 r' + r_2 r'^2 + r_3 r'^3 + \ldots + r_n r'^n + \ldots,$$

qui sera précisément la série des modules des termes de la série (1), pour la valeur de z dont le module est r'. La série (1)

sera donc elle-même convergente pour cette valeur de z (891) et le théorème est établi.

On n'aura donc qu'à attribuer à la variable z des valeurs dont le module aille en croissant à partir de zéro, et à vérifier si les modules des termes de la série conservent alors des valeurs finies, c'est-à-dire moindres qu'un certain nombre déterminé. Si cette dernière condition reste toujours remplie, la série est convergente pour toutes les valeurs de z. Si cette condition n'est remplie que jusqu'à une certaine valeur de z, cette valeur est une limite au delà de laquelle la convergence de la série n'existe plus.

Nous allons préciser cette notion si importante, en démontrant dans tous ses détails le théorème extrêmement remarquable dû à ABEL.

895. V. THÉORÈME D'ABEL. — *Une série étant ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable imaginaire z, si cette série est convergente (ou divergente) pour une valeur de z dont le module soit égal à r, elle demeure convergente (ou divergente) pour toute valeur de z dont le module est inférieur (ou supérieur) à r.*

Soit la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

où z est une variable imaginaire et où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, sont des constantes réelles ou imaginaires.

1° Cette série étant convergente, par hypothèse, lorsque le module de z est égal à r, ses termes, à mesure que n augmente indéfiniment, devront tendre vers zéro (362, 890). Il en sera donc de même (820, 873) de leurs modules

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots.$$

Désignons par M *le plus grand de ces modules,* quantité finie.

Attribuons maintenant à la variable z une valeur z_1 dont le module r_1 satisfasse à la condition

$$r_1 < r.$$

Nous obtiendrons une nouvelle série

$$(2) \qquad a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + a_3 z_1^3 + \ldots + a_n z_1^n + \ldots,$$

qui pourra s'écrire

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 z\left(\dfrac{z_1}{z}\right) + a_2 z^2\left(\dfrac{z_1}{z}\right)^2 \\ \quad + a_3 z^3\left(\dfrac{z_1}{z}\right)^3 + \ldots + a_n z^n\left(\dfrac{z_1}{z}\right)^n + \ldots. \end{cases}$$

Si nous représentons par μ le module du rapport $\frac{z_1}{z}$, égal à $\frac{r_1}{r}$ (842) et moindre que l'unité, les modules des termes de la série (2) ou (2 *bis*) formeront (841) une série

$$(3)\qquad \rho_0 + \rho_1\mu + \rho_2\mu^2 + \rho_3\mu^3 + \ldots + \rho_n\mu^n + \ldots,$$

dont les termes seront respectivement inférieurs à ceux de la progression indéfinie décroissante

$$(4)\qquad \mathrm{M} + \mathrm{M}\mu + \mathrm{M}\mu^2 + \mathrm{M}\mu^3 + \ldots + \mathrm{M}\mu^n + \ldots.$$

La série (3) est donc convergente (367, V), et il en est de même, par conséquent, de la série (2) [891].

2° La série (1) étant divergente, par hypothèse, lorsque le module de z est égal à r, elle est divergente pour toute valeur z_1 de la variable z, dont le module r_1 satisfait à la condition

$$r_1 > r.$$

En effet, si la nouvelle série était alors convergente, elle le resterait pour toutes les valeurs de la variable ayant un module inférieur à r_1 (1°), et en particulier pour la valeur de z dont le module est r, ce qui est contre l'hypothèse admise. Le théorème est donc démontré.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots,$$

on voit qu'elle est convergente pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 1, et divergente pour toutes les valeurs de z dont le module est supérieur à 1 (353, 891, 892).

Pour les valeurs de z dont le module est égal à l'unité, c'est-à-dire qui correspondent à des imaginaires réduites de la forme

$$\cos\alpha + i\sin\alpha,$$

il est clair que la série proposée est divergente (ou indéter-

minée), puisque les termes de la série des modules de ses termes ne peuvent pas tendre vers zéro quand n croît indéfiniment (892).

896. Cercle de convergence. — Chaque valeur imaginaire de z répond à un certain point dans le plan des axes rectangulaires choisis (867, 868).

Soit R une valeur du module de z telle que, pour toute valeur moindre de ce module, la série (1) [895] soit convergente, et que, pour toute valeur plus grande, elle soit divergente.

Si l'on décrit un cercle, de l'origine des axes comme centre avec R pour rayon, tous les points situés à l'intérieur de ce cercle répondent à des valeurs de la variable imaginaire rendant la série proposée convergente, tandis que tous les points situés à l'extérieur répondent à des valeurs de la variable imaginaire rendant la série proposée divergente (895). On peut donc dire que la circonférence R partage le plan xOy en deux régions *de convergence et de non-convergence de la série*. C'est pour cette raison que le cercle R a reçu le nom de *cercle de convergence* de la série.

Pour les valeurs de z qui répondent au module R ou pour les points de la circonférence R elle-même, *il y a doute*. Si, z ayant pour module R, les modules des termes de la série ne tendent pas vers zéro, elle est divergente pour tous les points situés sur la circonférence R ou pour toutes les valeurs imaginaires correspondantes de z (892). Si, z ayant pour module R, les modules des termes de la série tendent vers zéro, on ne peut rien affirmer (892), et la série proposée peut être convergente ou divergente pour tous les points de la circonférence R, ou pour certaines parties de cette circonférence.

Il ne faut pas oublier que, pour les points situés à l'intérieur du cercle de convergence, la série formée par les modules des termes de la série proposée est convergente comme cette série elle-même (895, 1°).

897. On voit que, *si* R *est nul, la série considérée ne peut être convergente que pour cette valeur spéciale de* R, et que, *si* R *est infini, la série considérée ne peut jamais être divergente.*

Prenons, par exemple, la série indiquée au n° 895,

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots.$$

Elle est convergente dans le cercle de rayon 1, divergente hors de ce cercle et sur sa circonférence.

Soit la série

$$1+1.z+1.2.z^2+1.2.3.z^3+\ldots+1.2.3\ldots n.z^n+\ldots.$$

Elle est évidemment divergente, lorsqu'on donne à z une valeur quelconque différente de zéro, la suite des modules des termes tendant vers l'infini (820). La série n'est donc convergente que pour la valeur $z=0$, et son cercle de convergence a un rayon nul.

Au contraire, la série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

est toujours convergente, quel que soit z, la série des modules des termes demeurant évidemment toujours convergente, pourvu que le module de z ne soit pas infini (366, 399, 891). On peut donc regarder le rayon du cercle de convergence comme égal lui-même à l'infini, et la série comme convergente dans toute l'étendue du plan des axes.

898. Continuité de la fonction. — *La fonction $f(z)$ représentée par la série*

$$(1) \qquad a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

reste continue dans le cercle de convergence de cette série, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur au rayon R *de ce cercle.*

En considérant une valeur quelconque de z située dans le cercle de convergence R, nous désignerons par $\varphi(z)$ la somme des n premiers termes de la série (1) et par $\psi(z)$ le reste correspondant de la série. On aura, en même temps,

$$\varphi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{n-1}z^{n-1},$$
$$\psi(z)=a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots,$$
$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z).$$

Il faut prouver (887) que, z ou son module prenant un accroissement infiniment petit, l'accroissement de $f(z)$ ou le module de cet accroissement (820) est lui-même infiniment petit.

De l'origine des axes comme centre, avec un rayon r moindre que R, décrivons un cercle : α étant une quantité aussi petite qu'on voudra, on peut toujours prendre n assez grand pour que le module du reste $\psi(z)$ soit moindre que α pour toute valeur de z non extérieure au cercle r. Il suffit pour cela que n satisfasse à la condition

$$r^n \bmod a_n + r^{n+1} \bmod a_{n+1} + \ldots < \alpha,$$

toujours réalisable, puisque la série (1) demeure convergente par hypothèse dans le cercle de rayon r et sur ce cercle. Le module du reste $\psi(z)$ étant, d'après un théorème connu (840), moindre que la somme des modules de ses parties, sera *a fortiori* moindre que α.

Si l'on donne alors à z deux valeurs suffisamment voisines, z_1 et z_2, situées à l'intérieur du cercle r, on aura à la fois

$$f(z_1) = \varphi(z_1) + \psi(z_1), \qquad f(z_2) = \varphi(z_2) + \psi(z_2);$$

d'où l'on déduit

$$f(z_2) - f(z_1) = [\varphi(z_2) - \varphi(z_1)] + [\psi(z_2) - \psi(z_1)].$$

$\varphi(z)$ étant un polynôme entier en z, de degré $n-1$, est une fonction continue de la variable z (886, 887). On peut donc choisir un nombre ρ assez petit pour que, quelle que soit la position du point (z_2) à l'intérieur du cercle décrit du point (z_1) comme centre avec ρ pour rayon, le module de la différence $\varphi(z_2) - \varphi(z_1)$ soit aussi moindre que α. Comme les modules des restes $\psi(z_2)$ et $\psi(z_1)$ sont eux-mêmes, pour n assez grand, comme on vient de l'établir, moindres que α, le module de leur différence est moindre que 2α (840).

Finalement, le module du premier membre $f(z_2) - f(z_1)$ de l'égalité précédente sera moindre que 3α ou aussi petit qu'on voudra, pour toutes les positions du point (z_2) à l'intérieur du cercle ρ, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de z_2 suffisamment rapprochées de z_1. C'est en cela que consiste précisément, comme nous l'avons rappelé, la continuité de la fonction $f(z)$ dans le cercle de convergence R.

899. La fonction $f(z)$ ne peut d'ailleurs, dans ces mêmes limites, correspondre qu'à un seul développement en série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de z (422).

En effet, si un second développement

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots + b_n z^n + \ldots,$$

était possible, il devrait être égal au premier pour toutes les valeurs de z comprises dans le cercle de convergence et, par conséquent, pour $z = 0$, d'où l'on conclurait $a_0 = b_0$.

En supprimant ces deux termes égaux et en divisant par z, il resterait

$$a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1} + \ldots = b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + \ldots + b_n z^{n-1} + \ldots,$$

égalité qui devrait être encore vérifiée par toutes les valeurs convenables de z et, par conséquent, par $z = 0$, d'où l'on déduirait $a_1 = b_1$, et ainsi de suite.

De la fonction exponentielle dans le cas d'une variable imaginaire.

900. Nous venons de voir (897, 898) que la série

$$(1) \qquad 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

est convergente et continue dans toute l'étendue du plan des axes, quelle que soit la valeur attribuée à z. Elle tend donc vers une limite qui est une fonction $f(z)$ de la variable z, et qu'on peut désigner par e^z. En effet (889), lorsque z reçoit une valeur *réelle* x, la série (1) représente le développement de la *fonction exponentielle* e^x, telle que nous l'avons considérée dans la première partie (418, 693).

Nous poserons donc

$$(1) \qquad f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

et e^z sera la *fonction exponentielle générale*.

901. La propriété caractéristique de la fonction exponentielle e^x consiste dans la relation (486)

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

On doit pouvoir l'étendre (889) à la fonction complexe e^z.

En donnant à la variable les valeurs z_1 et z_2, on a

$$f(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{1.2} + \frac{z_1^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z_1^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

$$f(z_2) = 1 + \frac{z_2}{1} + \frac{z_2^2}{1.2} + \frac{z_2^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z_2^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Ces deux séries demeurant convergentes quand on remplace chaque terme par son module, on peut leur appliquer le théorème relatif à la multiplication des séries (893, 3°). La nouvelle série obtenue, dont le premier terme est 1 et dont le terme général ou de rang $n+1$ a pour expression

$$1\,\frac{z_2^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{z_1}{1}\,\frac{z_2^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{z_1^2}{1.2}\,\frac{z_2^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{z_1^n}{1.2.3\ldots n}\,1,$$

sera elle-même convergente, et elle aura pour somme le produit $f(z_1)f(z_2)$.

Mais le terme général de cette nouvelle série revient évidemment (255) à

$$\frac{(z_1+z_2)^n}{1.2.3\ldots n},$$

de sorte qu'elle représente $f(z_1+z_2)$, et qu'on a bien

$$(2) \qquad f(z_1)f(z_2) = f(z_1+z_2) \qquad \text{ou} \qquad e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Il en résulte que toutes les règles de calcul relatives aux exposants (150) s'appliqueront également aux quantités complexes de la forme e^z et aux quantités réelles de la forme e^x.

902. Réciproquement, en partant de la relation (2) qu'on vient d'établir, on peut prouver que, dans le cas où la variable imaginaire devient une quantité réelle, la fonction $f(z)$ se réduit bien à la fonction exponentielle réelle.

En donnant à z les valeurs successives quelconques z_1, z_2, z_3, ..., z_m, cette relation (2) permet évidemment d'écrire

$$f(z_1)f(z_2)f(z_3)\ldots f(z_m) = f(z_1+z_2+z_3+\ldots+z_m);$$

puis, en supposant $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_m = \mathrm{Z}$,

$$[f(\mathrm{Z})]^m = f(m\mathrm{Z}), \tag{3}$$

m étant un entier positif quelconque.

Si Z devient une fraction positive ou négative représentée par $\pm \frac{l}{m}$, on aura donc, d'après (3),

$$\left[f\left(\pm \frac{l}{m}\right)\right]^m = f(\pm l) = f[\pm 1)]^l. \tag{4}$$

D'ailleurs, si, dans la formule (2) [901], on suppose $z_1 = 1$ et $z_2 = -1$, on trouve, d'après la relation (1) [900],

$$f(1)\,f(-1) = f(0) = 1,$$

c'est-à-dire

$$f(-1) = \frac{1}{f(1)} = f(1)^{-1},$$

d'où

$$[f(-1)]^l = [f(1)]^{-l}.$$

La relation (4) devient ainsi, en prenant ensemble les signes supérieurs et les signes inférieurs,

$$\left[f\left(\pm \frac{l}{m}\right)\right]^m = [f(1)]^{\pm l}. \tag{5}$$

Or (900, 401),

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots = e.$$

On a donc enfin

$$\left[f\left(\pm \frac{l}{m}\right)\right]^m = e^{\pm l}$$

et, en extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique des deux membres,

$$f\left(\pm \frac{l}{m}\right) = e^{\pm \frac{l}{m}}$$

ou

$$f(\mathrm{Z}) = e^{\mathrm{Z}}, \tag{6}$$

ce qui justifie complètement l'interprétation adoptée au n° 900.

Des fonctions circulaires directes dans le cas d'une variable imaginaire.

903. Soient les séries

$$(1) \qquad \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(2) \qquad 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

qui sont convergentes dans toute l'étendue du plan des axes, quelle que soit la valeur, réelle ou imaginaire, attribuée à z (389, 397, 3°; 891). Elles tendent alors vers des limites, qui sont des fonctions de la variable z et qu'on peut désigner respectivement par $\sin z$ et par $\cos z$. En effet, lorsque z reçoit une valeur réelle x, les séries (1) et (2) représentent les développements de $\sin x$ et de $\cos x$, tels que nous les avons considérés dans la première partie (702). Nous poserons donc (889)

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

et nous aurons ainsi les *fonctions sinus et cosinus générales*. Tous les termes de la fonction sinus sont de degré impair, tous les termes de la fonction cosinus sont de degré pair. D'une manière générale, une fonction d'une variable z est *impaire* ou *paire*, suivant qu'elle change ou non de signe, en conservant la même valeur absolue, lorsqu'on remplace z par $-z$; $\sin z$ est donc une fonction impaire, tandis que $\cos z$ est une fonction paire.

Nous définirons d'ailleurs les autres fonctions circulaires directes *générales* par les formules (*Trigon.*, 34)

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{séc} z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{coséc} z = \frac{1}{\sin z}.$$

On voit que $\operatorname{séc} z$ est une fonction paire, tandis que $\operatorname{tang} z$, $\operatorname{cot} z$, $\operatorname{coséc} z$ sont des fonctions impaires.

Liaison entre les fonctions circulaires directes et les fonctions exponentielles générales. — Conséquences.

904. Prenons l'égalité (900)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

et, dans cette relation, remplaçons successivement z par zi et par $-zi$. Il viendra évidemment (826)

$$e^{zi} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots\right) + i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right)$$

$$e^{-zi} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots\right) - i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right)$$

c'est-à-dire (903)

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z.$$

Ces relations ont été données, pour la première fois, par Euler. On en déduit successivement (903)

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i(e^{zi} + e^{-zi})} = -\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}\, i.$$

Les fonctions exponentielles générales peuvent donc s'exprimer par des fonctions circulaires directes générales, et, réciproquement, ces dernières peuvent être remplacées par des fonctions exponentielles.

On vérifie (903) que la valeur de $\cos z$ ne change pas quand on change z en $-z$, tandis que la valeur de $\sin z$ change de signe ainsi que celle de $\operatorname{tang} z$. On a donc

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad \operatorname{tang}(-z) = -\operatorname{tang} z,$$

comme en Trigonométrie (19, 13, 24).

905. D'après la formule (904)

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z,$$

toute imaginaire trigonométrique (836)

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

peut être mise sous la forme très simple

$$re^{\alpha i},$$

r étant son module et α son argument.

k étant un entier quelconque et le module étant l'unité, on a, en particulier,

$$\begin{aligned}
e^{2k\pi i} &= \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi &&= +1,\\
e^{\pi i} &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1,\\
e^{\frac{\pi i}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= +i.\\
e^{-\frac{\pi i}{2}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) &&= -i,
\end{aligned}$$

Ces résultats permettent de généraliser immédiatement d'importantes formules.

Dans la valeur de $\sin z$ (904), remplaçons z par $\frac{\pi}{2} - z$. Nous aurons successivement (901)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i}}{2i} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}e^{-zi} - e^{-\frac{\pi i}{2}}e^{zi}}{2i}$$

$$= \frac{ie^{-zi} + ie^{zi}}{2i} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z.$$

On trouvera de la même manière (*Trigon.*, 8)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cot z.$$

Dans la valeur de $\sin z$ (904), remplaçons encore z par $\pi - z$. Il viendra

$$\sin(\pi - z) = \frac{e^{(\pi-z)i} - e^{-(\pi-z)i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{\pi i}e^{-zi} - e^{-\pi i}e^{zi}}{2i} = \frac{-e^{-zi} + e^{zi}}{2i} = \sin z.$$

On trouvera de la même manière (*Trigon.*, 11, 17, 22)

$$\cos(\pi - z) = -\cos z, \qquad \operatorname{tang}(\pi - z) = -\operatorname{tang} z.$$

906. *Les fonctions générales, considérées jusqu'ici, sont* PÉRIODIQUES.

On a, en effet, d'abord, d'après la propriété caractéristique de la fonction exponentielle (901) et d'après la remarque qui précède (905),

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Ainsi la fonction exponentielle générale est périodique, et sa période est $2\pi i$.

D'après la même propriété caractéristique et les relations établies au n° 904, on a ensuite

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} + e^{-(z+2\pi)i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} - e^{-(z+2\pi)i}}{2i} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z,$$

$$\operatorname{tang}(z+\pi) = \frac{e^{(z+\pi)i} - e^{-(z+\pi)i}}{i\left[e^{(z+\pi)i} + e^{-(z+\pi)i}\right]} = \frac{-e^{zi} + e^{-zi}}{i\left[-e^{zi} - e^{-zi}\right]} = \operatorname{tang} z.$$

Les fonctions circulaires directes générales sont donc aussi périodiques : la période est 2π pour le cosinus et le sinus, et elle est π pour la tangente.

907. Reprenons la formule (901)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Si l'on y remplace successivement z_1 et z_2, d'abord par $z_1 i$ et $z_2 i$, et ensuite par $-z_1 i$ et $-z_2 i$, il viendra, d'après les relations du n° 904,

$$\begin{aligned} e^{(z_1+z_2)i} &= \cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2) = e^{z_1 i} e^{z_2 i} \\ &= (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2), \\ e^{-(z_1+z_2)i} &= \cos(z_1+z_2) - i\sin(z_1+z_2) = e^{-z_1 i} e^{-z_2 i} \\ &= (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2). \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant ces deux égalités membre à membre, en laissant de côté les exponentielles, on trouve, après réduction,

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

Ce sont là les formules fondamentales de la *Trigonométrie générale*. Elles ont lieu quelles que soient les quantités z_1 et z_2, et toutes les relations qui peuvent en découler en Trigonométrie, lorsqu'on considère une variable réelle, se trouvent par cela même généralisées et sont également applicables au cas d'une variable imaginaire.

Supposons, par exemple, dans la première de ces formules, $z_2 = -z_1$. Le premier membre se réduira à cos 0 ou à l'unité, et le second membre (904) à $\cos^2 z_1 + \sin^2 z_1$. On a donc, comme en Trigonométrie,

$$\sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 = 1.$$

On retrouverait aussi facilement toutes les autres formules usuelles.

908. La formule de Moivre (843 et suiv.) a été établie en supposant l'argument réel. Ce qui précède permet de l'étendre à tous les cas.

On a, en effet (901, 905), en désignant par p et m deux entiers positifs,

$$(e^{\pm z})^p = \left(e^{\pm \frac{p}{m} z}\right)^m = \left(e^{\pm \frac{p}{m} z}\right)^m \left(e^{\pm \frac{2k\pi i}{m}}\right)^m = \left[e^{\pm\left(\frac{p}{m} z + \frac{2k\pi i}{m}\right)}\right]^m.$$

Si l'on remplace z par zi dans les deux membres extrêmes, on a (905)

$$(e^{\pm zi})^p = (\cos z \pm i \sin z)^p = \left[e^{\pm\left(\frac{p}{m} zi + \frac{2k\pi i}{m}\right)}\right]^m$$

$$= \left[\cos\left(\frac{p}{m} z + \frac{2k\pi}{m}\right) \pm i \sin\left(\frac{p}{m} z + \frac{2k\pi}{m}\right)\right]^m$$

ou, en extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ de la deuxième et de la quatrième expression,

$$(\cos z \pm i \sin z)^{\frac{p}{m}} = \cos\left(\frac{p}{m} z + \frac{2k\pi}{m}\right) \pm i \sin\left(\frac{p}{m} z + \frac{2k\pi}{m}\right).$$

C'est la formule de Moivre, dans le cas d'un exposant fractionnaire quelconque $\frac{p}{m}$ et d'une variable ou d'un argument quelconque z. Le second membre admet toujours m valeurs distinctes qu'on obtient en donnant à l'entier indéterminé k les m valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$.

De la fonction logarithmique dans le cas d'une variable imaginaire.

909. Si l'on pose

$$e^z = u,$$

u et z étant des quantités quelconques, z est le *logarithme népérien* de l'imaginaire u ou la fonction inverse de la fonction exponentielle (441). C'est ce qu'on peut indiquer, d'après Cauchy, par la notation

$$z = l((u)),$$

la double parenthèse servant à distinguer les logarithmes des quantités complexes.

L'imaginaire u, mise sous la forme trigonométrique

$$r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

équivaut (905) à

$$re^{\theta i},$$

tandis que, si l'on a $z = x + yi$, l'expression e^z équivaut (901) à

$$e^x e^{yi}.$$

On peut donc écrire l'égalité

$$e^x e^{yi} = re^{\theta i}.$$

Il en résulte (810, 837, 904)

$$e^x = r \qquad \text{et} \qquad \cos y + i\sin y = \cos\theta + i\sin\theta,$$

c'est-à-dire (505)

$$x = lr \qquad \text{et} \qquad y = \theta + 2k\pi.$$

On a finalement

$$(A) \qquad z = l((u)) = lr + (\theta + 2k\pi)i.$$

On voit que, à chaque valeur de u, répondent une infinité de valeurs de z formant une progression arithmétique dont la raison est $2\pi i$, et chacune de ces valeurs est un logarithme népérien de u.

Une quantité imaginaire a, par conséquent, *une infinité de logarithmes népériens imaginaires,* et la fonction logarithmique n'est pas complètement déterminée.

910. Cauchy a appelé valeur *principale* de $l((u))$ celle qu'on obtient en faisant $k=0$ dans la formule (A). Cette valeur principale,

$$lu = lr + \theta i,$$

est parfaitement déterminée, puisque θ représente la plus petite valeur absolue de l'argument (836).

911. Lorsque u est une quantité réelle et *positive*, on a $\theta = 0$ et $u = r$. Il vient alors

$$(A') \qquad z = l((r)) = lr + 2k\pi i.$$

Si u est une quantité réelle et *négative*, on a $\theta = \pi$ et $u = -r$ (838). On a, dans ce cas,

$$(A'') \qquad z = l((-r)) = lr + (2k+1)\pi i.$$

Une quantité positive n'a donc *qu'un seul logarithme réel* (qui est, pour $k=0$, son logarithme ordinaire) *et une infinité de logarithmes imaginaires.*

Une quantité négative (comme une quantité imaginaire) *n'a aucun logarithme réel* (491), *et elle a une infinité de logarithmes imaginaires.*

Si l'on suppose $r=1$, il vient (496, 905), d'après les formules (A') et (A''),

$$l((1)) = 2k\pi i,$$
$$l((-1)) = (2k+1)\pi i.$$

912. On a (909)

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On a également

$$u = re^{\theta i} = r\theta(\cos + i\sin\theta) = a + bi,$$

en posant (836)

$$r\cos\theta = a \qquad \text{et} \qquad r\sin\theta = b.$$

Si l'on identifie la valeur de e^z et celle de u, on trouve

$$e^x \cos y = a,$$
$$e^x \sin y = b,$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{tang} y = \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad y = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a},$$

en même temps que

$$e^x = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{ou} \qquad x = l\sqrt{a^2 + b^2},$$

x étant le logarithme réel (911) du nombre positif ou du module $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Les arcs qui ont pour tangente $\frac{b}{a}$ et dont le sinus et le cosinus ont respectivement les signes de b et de a sont en nombre infini, et leur période est $2k\pi$. En prenant, parmi tous ces arcs, le plus petit arc positif pour représenter $\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}$, on peut donc écrire d'une manière générale

$$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

Par suite, le logarithme z de l'imaginaire $u = a + bi$ admet encore la forme (909)

$$(\mathrm{A}_1) \quad z = l((a + bi)) = l\sqrt{a^2 + b^2} + \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} + 2k\pi\right) i.$$

Pour un nombre réel, on a $b = 0$ et

$$z = la + (\operatorname{arc\,tang} 0 + 2k\pi) i.$$

Si a est positif, $\operatorname{arc\,tang} 0 = 0$; si a est négatif, $\operatorname{arc\,tang} 0 = \pi$. On retombe ainsi sur les formules (A′) et (A″) du n° 911.

913. Nous avons considéré précédemment la fonction puissance z^m, dans le cas où z est quelconque et, l'exposant m, une fraction réelle à termes entiers (888). Ce qui précède permet de définir cette même fonction lorsque l'exposant m devient lui-même une quantité complexe.

Si l'on a, par exemple, $z = a + bi$, on peut poser $z = e^{x+yi}$, x et y ayant les valeurs (912)

$$x = l\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad y = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

Si l'on met $x + yi$ sous la forme trigonométrique

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

φ dépendant de y aura une infinité de valeurs.

L'exposant m étant alors l'imaginaire

$$p + qi = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

il viendra (901, 841)

$$z^m = [e^{r\cos\varphi + i\sin\varphi)}]^{\rho\cos\omega + i\sin\omega)}$$
$$= e^{r\rho[\cos(\varphi+\omega) + i\sin(\varphi+\omega)]} = e^{r\rho\cos(\varphi+\omega) + ir\rho\sin(\varphi+\omega)}.$$

C'est ce qu'on peut encore écrire (901, 905)

$$z^m = e^{r\rho\cos(\varphi+\omega)}e^{ir\rho\sin(\varphi+\omega)}$$
$$= e^{r\rho\cos(\varphi+\omega)}[\cos r\rho\sin(\varphi+\omega) + i\sin r\rho\sin(\varphi+\omega)].$$

La fonction puissance *générale* est donc une quantité complexe susceptible d'une infinité de valeurs, puisque son module et son argument dépendent tous deux de φ.

On voit que la fonction z^m n'est complètement déterminée que lorsque m est entier.

914. Si l'on a

$$e^{z_1} = u_1, \qquad e^{z_2} = u_2,$$

on a aussi (901)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} = u_1u_2.$$

Il en résulte immédiatement (909)

$$l((u_1u_2)) = l((u_1)) + l((u_2)).$$

C'est la propriété fondamentale des logarithmes (493), et *toutes les autres en découlent.*

Il est entendu que, dans les deux membres de l'égalité précédente, les arguments doivent être choisis convenablement.

915. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les exponentielles et les logarithmes relatifs à la base e.

Si l'on adoptait, au lieu de e, une base positive quelconque a, on aurait d'abord par définition (909)

$$a = e^{la}$$

et, ensuite (901),

$$a^z = e^{zla} = u.$$

Le logarithme de l'imaginaire u dans la nouvelle base a est donc égal à son logarithme dans l'ancienne base e, divisé par le nombre constant la, c'est-à-dire par le logarithme de la nouvelle base dans l'ancien système (500).

Si l'on prend $a = 10$, on passe des logarithmes *népériens* aux logarithmes *vulgaires* (506).

916. En terminant ce paragraphe, il n'est pas inutile de remarquer que les Tables usuelles des logarithmes des nombres et des rapports trigonométriques, réunies, constituent pour ainsi dire une Table des valeurs de la fonction exponentielle simple et du logarithme népérien. Elles permettent donc de calculer les valeurs numériques de ces éléments et de toutes les fonctions qui en dépendent.

S'il s'agit, par exemple, de trouver le logarithme népérien z de l'imaginaire $u = a + bi$, on aura recours à la formule (Λ_1) (912). La Table des logarithmes des nombres conduira (506) à

$$l\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\log\sqrt{a^2+b^2}}{\log e};$$

puis, à l'aide de la même Table, on obtiendra le logarithme du rapport $\frac{b}{a}$, et les Tables trigonométriques feront connaître l'arc dont ce rapport représente la tangente.

Si l'on veut, au contraire, calculer la fonction exponentielle

$$e^z = e^{x+yi},$$

on écrira (905)

$$e^z = e^x e^{yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y;$$

x étant le logarithme népérien de e^x, le logarithme vulgaire de cette quantité sera $x\log e$ (506). Quant au logarithme de $\cos y$, on le trouvera à l'aide des Tables trigonométriques en prenant les précautions nécessaires, c'est-à-dire qu'on convertira y en secondes en le rapportant à $\frac{\pi}{648000}$ comme unité, et qu'on aura soin ensuite de ramener l'arc correspondant à être positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$ (*Trigon.*, 33, 120). En ajoutant les deux logarithmes obtenus, on aura celui de $e^x \cos y$, et il ne restera plus qu'à remonter au nombre et à donner au

résultat le signe convenable d'après celui de $\cos y$. On opérera de même pour déterminer le second terme de e^z.

Des fonctions circulaires inverses dans le cas d'une variable imaginaire.

917. On sait (*Trigon.*, 44) que les fonctions circulaires inverses

$$\operatorname{arc}\begin{matrix}\sin\\ \operatorname{cosec}\end{matrix} z, \quad \operatorname{arc}\begin{matrix}\cos\\ \operatorname{séc}\end{matrix} z, \quad \operatorname{arc}\begin{matrix}\operatorname{tang}\\ \operatorname{cot}\end{matrix} z,$$

sont susceptibles d'une infinité de valeurs pour toute valeur de z. Il en est de même lorsque z, au lieu d'être une quantité réelle, est une quantité complexe.

Nous conserverons les mêmes noms à ces nouvelles fonctions, et nous considérerons spécialement les trois fonctions générales $\operatorname{arc\,cos} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$, $\operatorname{arc\,tang} z$.

918. I. Fonction $\operatorname{arc\,cos} z$. — Désignons par u la fonction dont il s'agit. Nous entendons par là que la série qui représente $\cos u$ (903) a z pour limite, de sorte qu'on peut poser

$$\cos u = z$$

ou, par les formules d'Euler (904),

$$\cos u = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = z.$$

On déduit de cette équation, en tenant compte de l'exposant négatif,

$$e^{ui} + \frac{1}{e^{ui}} = 2z,$$

c'est-à-dire

$$e^{2ui} - 2z\,e^{ui} + 1 = 0,$$

d'où

$$e^{ui} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Il en résulte

$$ui = l\left(\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad u = \frac{1}{i}\, l\left(\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)\right).$$

Le logarithme d'une quantité imaginaire ayant une infinité de valeurs (909), il en est de même de la fonction u. Les so-

lutions se partagent en deux groupes :

$$u_1 = \frac{1}{i} l\left((z + \sqrt{z^2 - 1})\right), \qquad u_2 = \frac{1}{i} l\left((z - \sqrt{z^2 - 1})\right).$$

Mais les deux quantités

$$z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad z - \sqrt{z^2 - 1}$$

ayant pour produit l'unité, leurs logarithmes correspondants sont égaux et de signes contraires, et l'on peut écrire plus simplement

$$u = \pm \frac{1}{i} l\left((z + \sqrt{z^2 - 1})\right),$$

expression que l'on pourra transformer d'après les indications du n° 912.

II. Fonction arc sin z. — En se servant également des formules d'Euler (904), on a

$$\sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = z.$$

On en déduit

$$e^{2ui} - 2iz e^{ui} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$u = \frac{1}{i} l\left((iz \pm \sqrt{1 - z^2})\right).$$

Mais il est plus simple de remarquer que (905) l'arc dont le sinus est z est complémentaire de l'arc dont le cosinus est z, de sorte que, si l'on a $\sin u = z$, on a aussi

$$u = \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} \mp \frac{1}{i} l\left((z + \sqrt{z^2 - 1})\right).$$

III. Fonction arc tang z. — La fonction considérée étant désignée par u, on a (904)

$$\operatorname{tang} u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{i(e^{ui} + e^{-ui})} = z.$$

On en déduit, en tenant compte des exposants négatifs,

$$\frac{e^{2ui} - 1}{e^{2ui} + 1} = zi.$$

Il en résulte

$$e^{2ui} = \frac{1 + zi}{1 - zi};$$

c'est-à-dire (914)

$$u = \frac{1}{2i} l\left(\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right)\right) = \frac{1}{2i}[l((1 + zi)) - l((1 - zi))],$$

expression qu'on pourra transformer d'après le n° 912. On voit que la fonction u est encore susceptible d'une infinité de valeurs (909).

919. En prenant de même l'une des trois équations

$$u = \operatorname{arc\,séc} z, \qquad u = \operatorname{arc\,cosséc} z, \qquad u = \operatorname{arc\,cot} z,$$

qui signifient

$$\operatorname{séc} u = z, \qquad \operatorname{cosséc} u = z, \qquad \operatorname{cot} u = z,$$

et en se rappelant qu'on a par définition (903)

$$\operatorname{séc} u = \frac{1}{\cos u}, \qquad \operatorname{cosséc} u = \frac{1}{\sin u}, \qquad \operatorname{cot} u = \frac{1}{\operatorname{tang} u},$$

il suffira de remplacer z par $\frac{1}{z}$ dans les résultats du numéro précédent, pour obtenir successivement les valeurs des trois fonctions $\operatorname{arc\,séc} z$, $\operatorname{arc\,cosséc} z$, $\operatorname{arc\,cot} z$. On aura ainsi

$$u = \operatorname{arc\,séc} z = \frac{1}{i} l\left(\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)\right) = \pm \frac{1}{i} l\left(\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)\right),$$

$$u = \operatorname{arc\,cosséc} z = \frac{1}{i} l\left(\left(\frac{i \pm \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)\right),$$

$$u = \operatorname{arc\,cot} z = \frac{1}{2i} l\left(\left(\frac{z + i}{z - i}\right)\right).$$

Résumé.

920. D'après ce qui précède, les fonctions z^m (lorsque m est entier), e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tang} z$, sont des fonctions parfaitement déterminées, c'est-à-dire ne prenant qu'une seule valeur bien définie, lorsqu'on remplace z par une quantité connue, réelle

ou imaginaire. Les fonctions de cette espèce sont des fonctions *uniformes*.

Au contraire, les fonctions z^m (lorsque m n'est pas entier), lz, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctang z$, $\arccosécz$, $\arcsécz$, $\arccot z$, prennent plusieurs et même une infinité de valeurs distinctes, pour chaque valeur réelle ou imaginaire de z. Ce sont des fonctions *multiformes*. Il faut alors, dans la plupart des cas, indiquer la valeur de la fonction qu'on veut considérer spécialement parmi toutes celles qui répondent à une certaine valeur de la variable z.

A partir de cette valeur de z et de la valeur correspondante choisie pour la fonction, le point z (ou $x+yi$) décrit dans le plan des axes une courbe *arbitraire*, lorsqu'on fait varier x et y d'une manière continue et arbitraire. En même temps, les valeurs correspondantes de la fonction sont, en général, déterminées sans ambiguïté, par sa définition même et par la condition de différer successivement infiniment peu, lorsque les coordonnées x et y varient elles-mêmes infiniment peu. En d'autres termes (887), la fonction étant désignée par u, à chaque courbe (z) répondent une infinité de courbes (u); mais le choix fait d'un point de l'une d'elles pour être associé à un point de la courbe (z) maintient les valeurs de la fonction sur la même courbe (u) d'après la condition de continuité.

Ce n'est que lorsqu'on arrive sur la courbe décrite par le point z à des points singuliers ou *critiques*, pour lesquels la condition imposée à la fonction u ne peut plus être remplie, que l'ambiguïté reparaît. Si l'on a, par exemple, la fonction

$$u = l(1+z) = l(1+x+yi),$$

on parvient à un point critique en supposant $z=-1$ ou $x=-1$ et $y=0$, puisque toutes les valeurs de la fonction u sont alors infinies (911, 914, 496).

On voit par là que l'étude des fonctions d'une variable imaginaire est liée intimement à celle des points critiques des courbes arbitraires décrites par le *point-variable*. Nous nous bornerons à cette observation, que nous ne pourrions développer ici sans sortir de notre cadre.

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

Continuité.

921. La définition de la continuité, telle que nous l'avons exprimée au n° 469 pour les fonctions réelles, est applicable aux fonctions d'une variable imaginaire. C'est ce qui a été déjà indiqué aux n^{os} 887, 898, 920. Il faut seulement remplacer la notion de l'*intervalle* dans lequel se meut la variable réelle par celle du *contour fermé* dans lequel se déplace la variable imaginaire ou le point qui la représente (867).

Ainsi, la *fonction* $u = \varphi(z)$ *de la variable imaginaire* z *est continue pour toutes les valeurs de* z *renfermées dans un certain contour tracé sur le plan des axes, lorsque, pour chacune de ces valeurs, le module de la différence*

$$\Delta u = \varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)$$

tend vers zéro ou devient infiniment petit en même temps que le module de Δz (820).

Lorsque cette condition n'est pas remplie dans le voisinage ou autour du point qui correspond à une certaine valeur de z, la fonction u est *discontinue* en ce point ou pour cette valeur (472).

922. Il résulte de la définition précédente que les fonctions entières sont continues dans le plan des axes ou pour toutes les valeurs de la variable (462).

Quant aux fonctions rationnelles, elles restent continues, tant qu'elles ne passent pas par l'infini (464).

La fonction exponentielle e^z est continue pour toutes les valeurs de z (482, 900), et il en est de même des fonctions

$\sin z$ et $\cos z$ (903), qui sont d'ailleurs des sommes algébriques de fonctions exponentielles (904).

Les fonctions $\operatorname{tang} z$, $\operatorname{cot} z$, $\operatorname{séc} z$, $\operatorname{cosec} z$ (903, 904) ne deviennent discontinues qu'en passant par l'infini.

923. Nous avons trouvé, pour la fonction logarithmique z (909), la variable u étant représentée par $r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$(A) \qquad z = l((u)) = lr + (\theta + 2k\pi)i.$$

Admettons que l'on fasse partir la variable u de la valeur 1, en supposant d'abord $r = 1$ et $\theta = 0$, et qu'on adopte, en prenant $k = 0$, la détermination

$$z = l(u) = lr + \theta i.$$

On voit que, le point représentatif (u) se mouvant alors dans le plan des axes sans passer par l'origine, c'est-à-dire par le point zéro, la fonction z partira de la valeur 0, en variant d'une manière continue et en n'ayant qu'une seule détermination pour chaque valeur de u (507).

Mais si, pour chaque valeur de u, on décrit un cercle autour de l'origine, l'argument θ augmente de 2π et la fonction z s'accroît de $2\pi i$. Par suite, pour chaque valeur de u, et en effectuant une infinité de révolutions autour de l'origine (ce qui répond aux différentes valeurs de k), on obtient une infinité de valeurs de la fonction z comprises dans la formule générale (A) et constituant une progression par différence de raison $2\pi i$. La fonction z ne pourra donc être regardée comme continue que si l'on fait correspondre d'avance une certaine valeur de z à une certaine valeur de u (920).

Pour $u = 0$, la fonction z devient infinie, c'est-à-dire *absolument* discontinue, et l'origine est un point critique *logarithmique* (920).

924. On peut présenter des remarques analogues pour les fonctions circulaires inverses, puisqu'elles dépendent de la fonction logarithmique. Si l'on considère, par exemple, la fonction $u = \operatorname{arc\,tang} z$ (918), on a

$$u = \frac{1}{2i} l\left(\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right)\right),$$

et l'on constate immédiatement deux points critiques logarithmiques pour lesquels la fonction est absolument discon-

tinue, et qui répondent (914, 496) à $1+zi=0$ et à $1-zi=0$, c'est-à-dire à $z=\pm i$.

Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable imaginaire.

925. Comme nous l'avons déjà dit (889), les propriétés générales des fonctions réelles doivent s'appliquer aussi aux fonctions imaginaires qui les renferment nécessairement. On étend de la manière suivante, aux fonctions d'une variable imaginaire, les définitions de la dérivée et de la différentielle adoptées pour les fonctions d'une variable réelle.

Une expression $\varphi(x+yi)$ ou $\varphi(z)$ peut bien être déterminée lorsque z est donnée; mais elle n'est, à proprement parler, une *fonction de* z que si elle a, par rapport à z, une dérivée également déterminée (534 et suiv.). Il faut, pour cela, qu'elle remplisse certaines conditions que nous allons développer.

926. La variable $z=x+yi$ décrivant dans le plan des axes une courbe *arbitraire,* le rapport $\frac{dy}{dx}$ (549), qui représente la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à cette courbe avec l'axe des x (535), est lui-même *arbitraire.* Pour que la dérivée

$$\frac{d\varphi(x+yi)}{d(x+yi)}$$

soit déterminée, il est donc nécessaire qu'elle soit *indépendante* du rapport $\frac{dy}{dx}$.

Or, pour avoir un sens, l'expression $\varphi(x+yi)$ doit être telle que, pour toutes les valeurs réelles données arbitrairement à x et à y, on puisse indiquer sa partie réelle et sa partie imaginaire, et écrire

$$u=\varphi(z)=\varphi(x+yi)=\mathrm{P}+\mathrm{Q}i,$$

en désignant par P et Q deux fonctions connues et réelles de x et de y.

Or, dx et dy étant les accroissements infiniment petits attribués à x et à y, on a évidemment (568), i devant toujours être traité comme un nombre constant (808),

$$du=d(\mathrm{P}+\mathrm{Q}i)=d\mathrm{P}+i\,d\mathrm{Q},$$

c'est-à-dire, P et Q étant des fonctions réelles de x et de y (655),

$$d(\mathrm{P}+\mathrm{Q}i)=\frac{d\mathrm{P}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{P}}{dy}dy+i\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{Q}}{dy}dy\right)$$

et

$$\frac{d(\mathrm{P}+\mathrm{Q}i)}{d(x+yi)}=\frac{\left(\dfrac{d\mathrm{P}}{dx}+i\dfrac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)dx+\left(\dfrac{d\mathrm{P}}{dy}+i\dfrac{d\mathrm{Q}}{dy}\right)dy}{dx+i\,dy}.$$

Or, si on laissait y constant en faisant varier seulement x, on aurait $dz=dx$ et

$$\frac{du}{dz}=\frac{d\mathrm{P}}{dx}+i\frac{d\mathrm{Q}}{dx};$$

ce qui montre que, $\dfrac{du}{dz}$ étant déterminée, il en sera de même des dérivées partielles $\dfrac{d\mathrm{P}}{dx}$ et $\dfrac{d\mathrm{Q}}{dx}$.

D'autre part, si on laissait x constant en faisant varier seulement y, on aurait $dz=i\,dy$ et

$$\frac{du}{dz}=\frac{\dfrac{d\mathrm{P}}{dy}+i\dfrac{d\mathrm{Q}}{dy}}{i}=\frac{d\mathrm{Q}}{dy}-i\frac{d\mathrm{P}}{dy};$$

ce qui montre que, $\dfrac{du}{dz}$ étant déterminée, il en sera de même des dérivées partielles $\dfrac{d\mathrm{P}}{dy}$ et $\dfrac{d\mathrm{Q}}{dy}$.

Puisque la dérivée de l'expression proposée doit demeurer indépendante de $\dfrac{dy}{dx}$, il faut que les valeurs ainsi trouvées pour $\dfrac{du}{dz}=\varphi'(z)$ soient égales. On a donc

$$\varphi'(z)=\frac{d\mathrm{P}}{dx}+i\frac{d\mathrm{Q}}{dx}=\frac{d\mathrm{Q}}{dy}-i\frac{d\mathrm{P}}{dy},$$

relation qui se partage immédiatement dans les deux suivantes :

$$(1)\qquad \frac{d\mathrm{P}}{dx}=\frac{d\mathrm{Q}}{dy},\qquad \frac{d\mathrm{P}}{dy}=-\frac{d\mathrm{Q}}{dx}.$$

On voit en même temps que

$$\varphi'(z)=\frac{d\varphi(z)}{dx}\qquad\text{et}\qquad i\varphi'(z)=\frac{d\varphi(z)}{dy}.$$

927. Les conditions (1) sont nécessaires pour que la dérivée de $u = \varphi(z)$ soit déterminée; elles sont aussi suffisantes.

En effet, supposons-les satisfaites, et faisons parcourir à la variable $z = x + yi$ une certaine courbe tracée dans le plan des axes et telle, que x et y soient des fonctions, réelles et admettant des dérivées, d'une variable auxiliaire t. On aura alors (567)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

D'ailleurs, en appliquant également aux fonctions réelles P et Q, qui admettent des dérivées partielles déterminées par rapport à x et à y, le théorème des fonctions composées, il viendra, pour tous les points de la courbe décrite par la variable z,

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Il en résulte

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{dy}{dt}\right) + i\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$$

ou, d'après les équations de condition (1) du numéro précédent,

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\frac{dz}{dt}$$

ou, enfin (926),

$$\frac{du}{dz} = \frac{d\mathrm{P}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dx} = \frac{du}{dx}.$$

La fonction $u = \varphi(z)$ admet donc une dérivée indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$ ou de la direction de la tangente à la courbe tracée par le point (z).

928. Admettons que les fonctions réelles P et Q aient des dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à x et à y, et reprenons les équations (1)

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{d\mathrm{Q}}{dy}, \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dy} = -\frac{d\mathrm{Q}}{dx}.$$

En les différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y, on trouve, pour la première,

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{d^2Q}{dx\,dy},\qquad \frac{d^2P}{dx\,dy}=\frac{d^2Q}{dy^2},$$

et, pour la seconde,

$$\frac{d^2P}{dx\,dy}=-\frac{d^2Q}{dx^2},\qquad \frac{d^2P}{dy^2}=-\frac{d^2Q}{dx\,dy}.$$

Il en résulte immédiatement, en ajoutant et en retranchant en croix les résultats obtenus,

$$(2)\qquad \frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}=0,\qquad \frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}=0.$$

On ne peut donc pas prendre arbitrairement les deux fonctions réelles P et Q, lorsqu'on veut que l'expression imaginaire $u=\varphi(z)$ puisse être considérée comme une fonction de z; il faut que ces fonctions satisfassent aux équations (1) et, par suite, isolément, aux équations (2).

929. Prenons, par exemple au hasard, l'expression très simple

$$u=x^2+y^2+2xyi.$$

Cette expression n'est pas une fonction de $x+yi$. En effet, on a ici

$$P=x^2+y^2\qquad\text{et}\qquad Q=2xy,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dP}{dx}=2x,\qquad \frac{dQ}{dy}=2x,\qquad \frac{dP}{dy}=2y,\qquad -\frac{dQ}{dx}=-2y.$$

Une seule des équations (1) est donc satisfaite, sauf pour le point $x+yi=0$.

On a, en outre,

$$\frac{d^2P}{dx^2}=2,\qquad \frac{d^2P}{dy^2}=2,\qquad \frac{d^2Q}{dx^2}=0,\qquad \frac{d^2Q}{dy^2}=0,$$

et une seule des équations (2) est vérifiée.

930. La variable $z = x + yi$ pouvant être mise sous la forme trigonométrique

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

il est utile de chercher à exprimer, d'après cette notation, les conditions nécessaires pour que

$$u = \varphi(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i,$$

où P et Q représentent alors des fonctions réelles de r et de α, puisse être regardée comme une fonction de

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

On a évidemment

$$d(\mathrm{P} + \mathrm{Q}i) = \frac{d\mathrm{P}}{dr}dr + \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}d\alpha + i\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dr}dr + \frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha}d\alpha\right)$$

et

$$\frac{d(\mathrm{P} + \mathrm{Q}i)}{dr(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dr} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dr}\right)dr + \left(\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + i\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha}\right)d\alpha}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)dr + r(-\sin\alpha + i\cos\alpha)d\alpha}.$$

En laissant α constant et en faisant varier seulement r, on aurait donc

$$dz = (\cos\alpha + i\sin\alpha)dr \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{dz} = \frac{\frac{d\mathrm{P}}{dr} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dr}}{\cos\alpha + i\sin\alpha}.$$

D'autre part, en laissant r constant et en faisant varier seulement α, on aurait

$$dz = r(-\sin\alpha + i\cos\alpha)d\alpha$$

et

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + i\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha}}{r(-\sin\alpha + i\cos\alpha)}.$$

Puisque $\frac{du}{dz}$ doit demeurer indépendant du rapport $\frac{dr}{d\alpha}$, il faut que les deux valeurs trouvées ainsi pour $\frac{du}{dz} = \varphi'(z)$ soient égales. On a donc

$$\varphi'(z) = \frac{\frac{d\mathrm{P}}{dr} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dr}}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + i\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha}}{r(-\sin\alpha + i\cos\alpha)}.$$

En multipliant par ri les deux termes de la première fraction, les dénominateurs de ces deux fractions égales deviennent égaux, et l'on peut écrire simplement

$$ri\frac{d\mathrm{P}}{dr} - r\frac{d\mathrm{Q}}{dr} = \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} + i\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha},$$

équation qui se partage immédiatement dans les deux suivantes :

(1 *bis*) $$r\frac{d\mathrm{P}}{dr} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha}, \qquad \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} = -r\frac{d\mathrm{Q}}{dr}.$$

Ce sont les équations de condition cherchées.

931. Ce qui précède permet d'étendre facilement aux fonctions imaginaires ce théorème fondamental, démontré pour les fonctions réelles (543) :

Lorsque deux fonctions imaginaires ont des dérivées égales, leur différence est une quantité constante.

Soient les deux fonctions imaginaires

$$u = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i, \qquad u_1 = \mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1 i.$$

Leurs dérivées étant égales, on a (926)

$$\frac{du}{dz} = \frac{du_1}{dz} = \frac{du}{dx} = \frac{du_1}{dx}$$

et

$$i\frac{du}{dz} = i\frac{du_1}{dz} = \frac{du}{dy} = \frac{du_1}{dy},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dx} = \frac{d\mathrm{P}_1}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}_1}{dx},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dy} = \frac{d\mathrm{P}_1}{dy} + i\frac{d\mathrm{Q}_1}{dy}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{d\mathrm{P}_1}{dx}, \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dy} = \frac{d\mathrm{P}_1}{dy}, \qquad \frac{d\mathrm{Q}}{dx} = \frac{d\mathrm{Q}_1}{dx}, \qquad \frac{d\mathrm{Q}}{dy} = \frac{d\mathrm{Q}_1}{dy}.$$

Les dérivées des différences $\mathrm{P} - \mathrm{P}_1$ et $\mathrm{Q} - \mathrm{Q}_1$ par rapport à x et par rapport à y sont donc nulles. Par conséquent, ces différences, à la fois indépendantes de x et de y, sont des quan-

tités constantes. La différence $u - u_1$ est donc elle-même une quantité constante.

932. La dérivée $\frac{du}{dz} = \varphi'(z)$ d'une fonction $u = \varphi(z)$ étant déterminée, on a, pour sa différentielle (549),

$$du = \varphi'(z)\,dz \qquad \text{ou} \qquad du = \frac{du}{dz}\,dz.$$

Application aux fonctions simples.

933. Il est clair que les règles obtenues dans le cas des fonctions réelles pour la dérivée ou la différentielle d'une somme (568), d'un produit (570, 572), d'un quotient (574), d'une fonction de fonctions (564), s'appliquent sans changement aux quantités imaginaires, lorsque celles-ci admettent des dérivées ou des différentielles. Il en est de même du théorème des fonctions composées (567).

Soit, en effet, la fonction $\varphi(u, v)$, où u et v représentent des fonctions de $z = x + yi$. On admet que u et v ont des dérivées bien déterminées, et que les dérivées partielles (566)

$$\varphi'_u(u, v) = \frac{d\varphi(u, v)}{du} \qquad \text{et} \qquad \varphi'_v(u, v) = \frac{d\varphi(u, v)}{dv}$$

sont également déterminées. Faisons varier x et y en les regardant comme des fonctions réelles d'une variable auxiliaire t (927). On a alors, d'après un théorème connu (552),

$$\frac{d\varphi(u, v)}{dz} = \frac{\varphi'_t(u, v)}{z'_t}.$$

Mais, la variable t étant réelle et i étant regardé comme une constante, on peut écrire (567)

$$\varphi'_t(u, v) = \frac{d\varphi(u, v)}{du}\,\frac{du}{dt} + \frac{d\varphi(u, v)}{dv}\,\frac{dv}{dt}.$$

Or, d'après le principe rappelé (552),

$$\frac{\frac{du}{dt}}{z'_t} = \frac{du}{dz} \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{dv}{dt}}{z'_t} = \frac{dv}{dz}.$$

On a donc bien aussi, pour les fonctions composées imaginaires,

$$\frac{d\varphi(u,v)}{dz} = \frac{d\varphi(u,v)}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\varphi(u,v)}{dv}\frac{dv}{dz}.$$

Nous allons maintenant entrer dans quelques détails relativement aux fonctions simples les plus importantes.

934. *Fonction z^m, dans le cas de m entier.* — Nous avons trouvé (827)

$$z^m = (x+yi)^m$$
$$= \left[x^m - \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}y^4 - \dots\right]$$
$$+ i\left[\frac{m}{1}x^{m-1}y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}y^3 + \dots\right] = P + Qi.$$

On a ici

$$\frac{dP}{dx} = mx^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}x^{m-3}y^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}x^{m-5}y^4 - \dots = \frac{dQ}{dy}$$

et

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{m(m-1)}{1}x^{m-2}y$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^{m-4}y^3 - \dots = -\frac{dQ}{dx}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes (926, 927) pour que z^m soit une fonction de z sont donc remplies, et sa dérivée est mz^{m-1} comme dans le cas où z est réel (578). En effet, la dérivée de z^m est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{(z+\Delta z)^m - z^m}{\Delta z},$$

lorsque Δz ou son module tend vers zéro. Or, le développement de $(z+\Delta z)^m$ s'effectue de la même manière, qu'il s'agisse de quantités réelles ou imaginaires (827). On a, par

conséquent,

$$\frac{(z+\Delta z)^m - z^m}{\Delta z} = m z^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} z^{m-2}\Delta z + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^{m-3}\overline{\Delta z}^2 + \dots$$

et, à la limite, pour $\Delta z = 0$ (822), m étant entier et positif,

$$\mathrm{D}z^m = m z^{m-1}.$$

935. D'après cette règle et les remarques précédentes (933), on obtiendra immédiatement la dérivée d'une fonction entière quelconque de z (582, 1°), de la forme connue (886)

$$\varphi(z) = \mathrm{A}_0 z^m + \mathrm{A}_1 z^{m-1} + \mathrm{A}_2 z^{m-2} + \dots + \mathrm{A}_{m-1} z + \mathrm{A}_m.$$

Cette dérivée sera

$$\varphi'(z) = m\mathrm{A}_0 z^{m-1} + (m-1)\mathrm{A}_1 z^{m-2} + (m-2)\mathrm{A}_2 z^{m-3} + \dots + \mathrm{A}_{m-1}.$$

On peut étendre le même résultat aux séries convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. Cette extension repose sur l'important théorème que nous allons démontrer.

936. Lorsqu'on prend les dérivées des différents termes d'une série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable (895), on obtient une nouvelle série qu'on regarde comme la *dérivée* de la première. Cela posé :

Toute série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et la série dérivée ont le même cercle de convergence (896).

Soient la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

et la série dérivée

$$(2) \qquad a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

Désignons par R le rayon du cercle de convergence de la série (1). Pour toute valeur de z dont le module surpasse R,

cette série est divergente (894), et les modules de ses termes croissent indéfiniment.

Si l'on attribue à z une valeur dont le module R_1 soit supérieur à R et si l'on représente par A_n le module de a_n, le terme général $a_n z^n$ de la série (1) a pour module (821)

$$A_n R_1^n,$$

quantité qui croît indéfiniment avec n. Le terme correspondant de la série dérivée (2) a pour module

$$n A_n R_1^{n-1} = \frac{n}{R_1} A_n R_1^n,$$

et ce module croît indéfiniment comme le précédent, puisque le facteur $\frac{n}{R_1}$ croît aussi indéfiniment avec n.

Il en résulte que *la série* (2) *est divergente* (892) *à l'extérieur du cercle de convergence* R.

Attribuons, au contraire, à z une valeur dont le module R_2 soit inférieur à R. La série (1) restera convergente, et le module de son terme général sera

$$A_n R_2^n;$$

d'après la convergence de la série (890, 362), ce module devra tendre vers zéro.

D'autre part, le module du terme correspondant de la série dérivée (2) sera

$$n A_n R_2^{n-1} = \frac{n}{R_2} A_n R_2^n.$$

Le facteur $\frac{n}{R_2}$ tend vers l'infini avec n; mais le facteur $A_n R_2^n$ tend vers zéro d'après ce qu'on vient de dire. Pour ne pas rester dans le doute, on peut mettre le produit considéré sous la forme

$$n \left(\frac{R_2}{R}\right)^{n-1} A_n R^{n-1}.$$

La série à termes positifs dont le terme général est

$$n \left(\frac{R_2}{R}\right)^{n-1}$$

est évidemment convergente; car le rapport de ce terme au

précédent étant

$$\frac{n}{n-1}\,\frac{R_2}{R}$$

a pour limite, quand n croît indéfiniment, la quantité $\frac{R_2}{R}$ moindre que l'unité (373).

Le terme ou le facteur $n\left(\frac{R_2}{R}\right)^{n-1}$ a donc à son tour zéro pour limite (362), tandis que le facteur complémentaire $A_n R^{n-1}$ ne peut pas croître indéfiniment; sans quoi, il en serait de même du facteur $A_n R_2^{n-1}$ qui peut en approcher autant qu'on veut et, par suite, *contre ce qui précède,* du facteur $A_n R_2^n$.

La série des modules de ses termes étant ainsi convergente (366), *la série* (2) *est* donc elle-même toujours *convergente* (891) *à l'intérieur du cercle de convergence* R, et le théorème énoncé est démontré.

937. *Fonction* e^z. — Lorsque z est imaginaire, nous avons, par définition (900),

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

et cette série est convergente dans toute l'étendue du plan des axes. En lui appliquant le théorème précédent (936), on a, pour la dérivée de la fonction e^z,

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots,$$

c'est-à-dire cette fonction elle-même (591). Ainsi, l'on a toujours

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \qquad \text{ou} \qquad de^z = e^z\,dz,$$

que z reçoive des valeurs réelles ou imaginaires.

938. *Fonctions* $\sin z$ *et* $\cos z$. — Considérons de même les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ pour lesquelles nous avons, par définition (903),

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

séries convergentes dans toute l'étendue du plan des axes. Les dérivées de ces fonctions sont alors

$$1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

$$-\frac{z}{1}+\frac{z^3}{1.2.3}-\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.$$

Il en résulte immédiatement

$$\frac{d\sin z}{dz}=\cos z \qquad \text{ou} \qquad d\sin z=\cos z\,dz$$

et

$$\frac{d\cos z}{dz}=-\sin z \qquad \text{ou} \qquad d\cos z=-\sin z\,dz,$$

comme dans le cas où la variable z est réelle.

939. *Fonctions* $\operatorname{tang} z$ *et* $\cot z$. — On a, par définition,

$$\operatorname{tang} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Puisque la règle de différentiation d'un quotient reste la même, que z soit une quantité réelle ou imaginaire (933), on en déduit (601, 604)

$$\frac{d\operatorname{tang} z}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z} \qquad \text{ou} \qquad d\operatorname{tang} z=\frac{dz}{\cos^2 z}$$

et

$$\frac{d\cot z}{dz}=-\frac{1}{\sin^2 z} \qquad \text{ou} \qquad d\cot z=-\frac{dz}{\sin^2 z}.$$

940. *Fonction* lz. — Si l'on a

$$z=e^u,$$

on a aussi, par définition (909),

$$u=lz.$$

D'ailleurs, z étant une fonction de u (937), u est à son tour une fonction de z; car, le rapport $\frac{dz}{du}=e^u$ étant déterminé, le rapport inverse $\frac{du}{dz}$ l'est à son tour (925). On a alors, pour

la dérivée de lz,

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z} \qquad \text{ou} \qquad dlz = \frac{dz}{z},$$

comme dans le cas où la variable z est réelle (586).

941. *Fonctions* arc cos z, arc sin z, arc tang z. — Si l'on pose

$$u = \operatorname{arc\,cos} z,$$

il vient

$$z = \cos u$$

et, par suite (938),

$$dz = d\cos u = -\sin u\, du.$$

Il en résulte (907)

$$\frac{du}{dz} = \frac{d\operatorname{arc\,cos} z}{dz} = -\frac{1}{\sin u} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

comme dans le cas où z représente une variable réelle (611).

On trouverait de même (609, 613)

$$d\operatorname{arc\,sin} z = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad d\operatorname{arc\,tang} z = \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \ldots.$$

En opérant directement sur les formules précédemment obtenues, on parviendrait aux mêmes résultats. On déduit, par exemple (918), de

$$u = \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i}[l(1+zi) - l(1-zi)],$$

la dérivée

$$\frac{d\operatorname{arc\,tang} z}{dz} = \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{1+zi} + \frac{i}{1-zi}\right] = \frac{1}{1+z^2}.$$

Propriété géométrique de la dérivée d'une fonction imaginaire.

942. Étant donnée une fonction imaginaire $u = \varphi(z)$, on sait (887) que les valeurs de z et de u se correspondent de manière que, le point (z) décrivant une certaine courbe dans le plan des axes choisis, le point (u), à son tour, en décrit une autre dans le même plan. On peut se demander s'il existe

une corrélation entre ces deux courbes, si elles sont liées par quelque propriété géométrique. C'est ce que nous allons montrer d'après Cauchy (¹).

Soit la fonction $u = \varphi(z)$. Donnons à la variable z deux valeurs z_1 et z_2, pour lesquelles la fonction prenne les valeurs u_1 et u_2. Nous pourrons écrire (545, 925)

$$(1) \qquad \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1} = \frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{z_2 - z_1} = \varphi'(z_1) + \delta,$$

en désignant par δ une quantité imaginaire qui tend vers zéro lorsque le point (z_2) se rapproche indéfiniment du point (z_1). En mettant sous forme trigonométrique les quantités imaginaires $\varphi'(z_1)$ et $z_2 - z_1$, on a

$$\varphi'(z_1) = a(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$z_2 - z_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et l'on peut poser

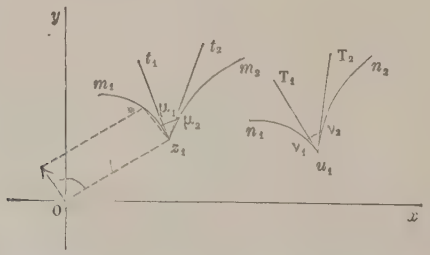
$$\varphi'(z_1) + \delta = (a + \delta')[\cos(\alpha + \delta'') + i\sin(\alpha + \delta'')],$$

en désignant par δ' et δ'' deux quantités, l'une positive, l'autre réelle, qui tendent vers zéro en même temps que δ. On a donc (841), d'après l'équation (1),

$$(2) \quad u_2 - u_1 = \rho(a + \delta')[\cos(\alpha + \theta + \delta'') + i\sin(\alpha + \theta + \delta'')].$$

Le point (z_1) est déterminé, mais non le point (z_2) qui peut venir coïncider avec (z_1), soit en suivant la courbe $m_1 z_1$, soit en suivant la courbe $m_2 z_1$ (*fig.* 32). Les tangentes

Fig. 32.



à ces courbes au point (z_1) sont $z_1 t_1$ et $z_1 t_2$. Quand le point

(¹) *Voir* aussi Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition. Paris, Gauthier-Villars; 1875.

(z_2) se rapproche du point (z_1) en suivant la courbe $m_1 z_1$, l'argument θ de la différence $z_2 - z_1$ tend vers une limite θ_1 qui, d'après la construction géométrique de la différence considérée (877), n'est autre chose que l'angle de la tangente $z_1 t_1$ à la courbe $z_1 m_1$ au point (z_1), avec l'axe Ox. De même, quand le point (z_2) se rapproche du point (z_1) en suivant l'autre courbe $m_2 z_1$, l'argument θ tend vers une limite θ_2, angle de la tangente $z_1 t_2$ à la courbe $z_1 m_2$ au point (z_1) avec l'axe Ox.

Dans le premier cas, l'argument de la différence $u_2 - u_1$ tend, d'après l'équation (2), vers la limite $\alpha + \theta_1$, et le point (u_2) décrit une certaine courbe $n_1 u_1$, dont la tangente $u_1 T_1$ au point (u_1) fait l'angle $\alpha + \theta_1$ avec l'axe Ox. Dans le second cas, l'argument de la différence $u_2 - u_1$ tend vers la limite $\alpha + \theta_2$, et le point (u_2) décrit une autre courbe $n_2 u_1$ dont la tangente $u_1 T_2$ au point (u_1) fait l'angle $\alpha + \theta_2$ avec le même axe.

Il en résulte que l'angle $T_1 u_1 T_2$, égal à $\theta_1 - \theta_2$, reproduit l'angle $t_1 z_1 t_2$, c'est-à-dire que *les courbes décrites par le point* (u) *se coupent sous les mêmes angles que celles qui sont décrites par le point* (z).

Il est entendu que, pour le point (z_1), la dérivée de la fonction u n'est pas nulle; car, dans cette hypothèse, α serait indéterminé et la démonstration en défaut.

943. On voit que toute fonction imaginaire peut donner lieu à un mode de comparaison ou de transformation des figures planes, dans lequel les angles sont conservés.

Les *figures inverses* jouissent de la même propriété, et la figure inverse d'une figure donnée prend aussi, comme on le sait, le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* (1). Il est facile de retrouver ce mode particulier de transformation à l'aide des fonctions imaginaires, en appliquant les considérations précédentes à un exemple simple.

Soit $u = \frac{1}{z}$ (nous aurons $uz = 1$, et la puissance p sera égale à l'unité).

---

(1) *Voir* Traité de Géométrie par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, nos 382 et suivants. 5e édition. Gauthier-Villars, 1883.

Si l'on a alors

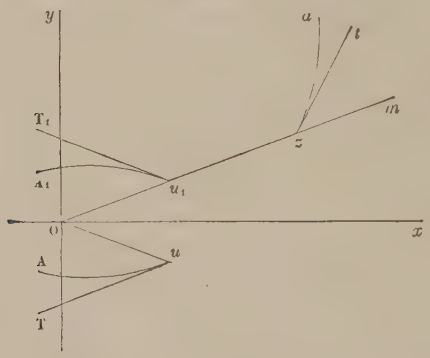
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

il vient (844)

$$u = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

A un point (z) [*fig.* 33] correspond alors un point (u), tel que Ox soit la bissectrice de l'angle zOu (872) et que le pro-

Fig. 33.



duit $Oz.Ou = 1$. Si le point (z) décrit la droite Ozm en s'éloignant de l'origine, le point (u) décrit la droite Ou en s'en rapprochant. Si le point (z) décrit la courbe za, le point (u) décrit la courbe $u\mathrm{A}$ et, d'après ce qui précède (942), l'angle tzm de la tangente en z à la courbe za avec la droite zm (qui est à elle-même sa propre tangente) doit être égal à l'angle $\mathrm{T}uO$ de la tangente en u à la courbe $u\mathrm{A}$ avec la droite $u\mathrm{O}$. Si l'on fait alors tourner la seconde courbe autour de l'axe Ox, elle vient prendre la position $u_1\mathrm{A}_1$, et elle représente la transformée de la courbe za par rayons vecteurs réciproques, par rapport à l'origine O.

944. Si le point (z) décrit deux séries de lignes orthogonales, le point (u) décrit à son tour deux séries correspondantes de lignes orthogonales (942). Ainsi *toute fonction imaginaire,* c'est-à-dire admettant une dérivée (925), *transforme un système de lignes orthogonales* décrites par le point (z) *en un autre système de lignes orthogonales* décrites par le point (u).

945. Revenons à la *fig.* 32. On a à la limite, et quels que soient les chemins suivis pour aller du point (z_2) au point (z_1) et du point (u_2) au point (u_1),

$$\frac{du_1}{dz_1} = \varphi'(z_1) = a(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Le rapport des accroissements infiniment petits correspondants de la fonction et de la variable ne dépend donc que de la position particulière du point de départ (z_1) et reste constant pour tous les chemins ou pour toutes les directions arbitraires rayonnant autour de ce point. Les deux triangles infiniment petits $z_1\mu_1\mu_2$ et $u_1\nu_1\nu_2$, qui ont déjà même angle au sommet (942), sont, par suite, semblables.

Le point (z_1) passant à une autre position quelconque (z_k), la même propriété subsistera; mais le rapport de similitude, égal à $\varphi'(z_k)$, ne sera plus le même. On est ainsi conduit à dire que les figures décrites simultanément par les points (z) et (u) sont des figures semblables dont le rapport de similitude *varie* d'un lieu à un autre.

Dérivées et différentielles des différents ordres.

946. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la dérivée de la fonction imaginaire

$$u = \varphi(z) = \varphi(x + yi) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$$

soit déterminée sont les suivantes (926) :

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{d\mathrm{Q}}{dy}, \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dy} = -\frac{d\mathrm{Q}}{dx},$$

ou

$$(2) \qquad \varphi'(z) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{i}\frac{du}{dy}.$$

Il est facile de voir que la dérivée $\varphi'(z)$ est, à son tour, une fonction de z, c'est-à-dire qu'elle a, en général, une dérivée $\varphi''(z)$ bien déterminée. En effet, on a

$$\varphi'(z) = \frac{du}{dx} = \frac{d\mathrm{P}}{dx} + i\frac{d\mathrm{Q}}{dx}$$

ou

$$\varphi'(z) = \mathrm{S} + \mathrm{T}i,$$

en posant

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = \mathrm{S}, \qquad \frac{d\mathrm{Q}}{dx} = \mathrm{T}.$$

Mais, d'après les relations (1), on a en même temps

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx\,dy}, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{dy} = \frac{d^2\mathrm{P}}{dx\,dy},$$
$$\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -\frac{d^2\mathrm{P}}{dx\,dy}, \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dy} = \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx\,dy}.$$

Par suite,

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = \frac{d\mathrm{T}}{dy}, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{dy} = -\frac{d\mathrm{T}}{dx};$$

et ce sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varphi'(z)$ ait une dérivée, que nous désignerons comme à l'ordinaire par

$$\varphi''(z) = \frac{d^2u}{dz^2}.$$

On aura également (926)

$$\varphi''(z) = \frac{d\,\varphi'(z)}{dx} = \frac{1}{i}\frac{d\,\varphi'(z)}{dy}$$

ou, d'après l'équation (2),

$$\varphi''(z) = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{i}\frac{d^2u}{dy^2}.$$

On passera de même de $\varphi''(z)$ à $\varphi'''(z)$, et ainsi de suite.

On voit que la dérivée d'un certain ordre de la fonction $\varphi(z)$ est égale à la dérivée partielle de même ordre de la fonction par rapport à x, ou au quotient par i de la dérivée partielle de même ordre de la fonction par rapport à y. La dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction aura donc pour expressions équivalentes

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{d^nu}{dz^n} = \frac{d^nu}{dx^n} = \frac{1}{i}\frac{d^nu}{dy^n}.$$

On aura, en même temps, pour la différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$d^nu = \varphi^{(n)}(z)\,dz^n.$$

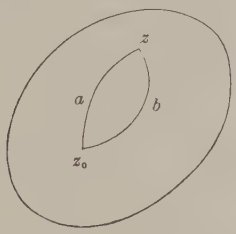
Remarques.

947. En terminant ce Chapitre, nous indiquerons quelques dénominations souvent usitées et qu'il n'est pas inutile de connaître. La plupart de ces dénominations ont été proposées par CAUCHY.

Il appelait *affixe* d'un point pris dans le plan des axes choisis l'expression imaginaire correspondante (867), et il donnait le nom de fonctions *monogènes* aux fonctions d'une variable imaginaire, qui jouissent de la propriété d'avoir, pour chaque valeur de la variable, une dérivée parfaitement déterminée. Comme ce sont les seules que nous ayons considérées comme de véritables fonctions (925), nous n'avons pas cru devoir répéter cette qualification.

Étant donnée la fonction $u = \varphi(z)$, admettons que le *point variable* z soit astreint à rester dans une portion déterminée du plan des axes (*fig.* 34). Si tous les *chemins* qu'on peut

Fig. 34.



suivre pour aller de la position initiale z_0 à une position quelconque z située dans l'aire indiquée conduisent finalement à la même valeur de la fonction u, on dit que cette fonction est *monodrome* (1) (CAUCHY) ou *monotrope* (2) (BRIOT et BOUQUET) dans la partie limitée du plan des axes. C'est ce que nous avons entendu exprimer précédemment par la dénomination de fonctions *uniformes* (920).

Lorsque la fonction $u = \varphi(z)$ est monotrope, la fonction réciproque $v = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ est aussi monotrope.

(1) Une seule course ou un seul point de passage (de δρόμος, course).

(2) Un seul tour (de τρόπος, tour).

Il est clair que, la fonction étant monotrope, si le point-variable z décrit une courbe fermée située dans l'aire indiquée, la fonction u revient à sa valeur primitive, c'est-à-dire que le *point-fonction* u (887) décrit aussi une courbe fermée.

Réciproquement, si la fonction u revient à sa valeur primitive, lorsque la variable z décrit une courbe fermée, la fonction est monotrope. Supposons, en effet, que, partant en z_0 de la valeur u_0, on arrive en z à la valeur u en suivant (*fig.* 34) le chemin $z_0 a z$. En revenant en z_0 par le chemin quelconque $z b z_0$, on retrouvera, par hypothèse, la valeur initiale u_0. En rétrogradant maintenant suivant $z_0 b z$, on repassera par les mêmes points et par les mêmes valeurs de la fonction, de sorte que, au point z, cette valeur redeviendra u.

Une fonction entière est monotrope dans toute l'étendue du plan des axes.

Lorsqu'une fonction est susceptible, au contraire, de prendre en chaque point d'une portion déterminée du plan des axes plusieurs valeurs distinctes, elle est dite *polytrope*. C'est ce que nous avons entendu exprimer précédemment par la dénomination de fonctions *multiformes* (920).

Lorsqu'une fonction est continue, monotrope et monogène, quand le point-variable se meut dans une portion déterminée du plan des axes, elle est *synectique* (Cauchy) ou *holomorphe* (1) (Briot et Bouquet) dans cette portion, indiquant par cette dernière dénomination qu'elle est analogue aux fonctions entières, qui possèdent ces propriétés dans toute l'étendue du plan des axes.

Les valeurs de la variable pour lesquelles une fonction holomorphe devient nulle sont les *racines* ou les *zéros* de la fonction.

Si une fonction $u = \varphi(z)$ est holomorphe dans une certaine portion du plan des axes, excepté en un point (z_1) où elle devient infinie, il peut se faire que la fonction réciproque $\frac{1}{u}$ demeure holomorphe dans le voisinage du même point. C'est ce qui arrivera toutes les fois que $\varphi(z)$ conservera une valeur infiniment grande autour et près du point (z_1), parce que $\frac{1}{\varphi(z)}$ conservera alors une valeur infiniment petite autour et

(1) De ὅλος, entier, et μορφή, forme.

près du même point, en étant nulle en ce point. On dit, dans ce cas, que le point (z_1) est un *pôle* ou un *infini* de la fonction u.

Les *pôles* d'une fraction rationnelle (886) répondent aux *racines* de son dénominateur, et cette fraction rationnelle demeure holomorphe dans toute partie du plan des axes, qui ne contient aucun de ses pôles.

Les fonctions analogues aux fractions rationnelles, c'est-à-dire holomorphes dans une région du plan des axes sauf en certains pôles, sont dites *méromorphes* (1).

(1) De μέρος, partie, fraction, et μορφή, forme.

CHAPITRE VII.

DES INTÉGRALES DÉFINIES DES FONCTIONS IMAGINAIRES. EXTENSION DES FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN AUX FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

Intégrales des fonctions imaginaires entre limites réelles ou imaginaires.

948. Il est naturel d'étendre la définition générale des intégrales définies, telles qu'elles ont été considérées dans le cas des quantités réelles (761), à celui des fonctions et des limites imaginaires.

On aura ainsi, pour $\varphi(z) = \varphi(x + yi)$,

$$\int_{x_0+y_0 i}^{x_1+y_1 i} \varphi'(z)\,dz = \varphi(x_1 + y_1 i) - \varphi(x_0 + y_0 i).$$

Mais une grave difficulté apparaît immédiatement parce que, d'après ce qui précède, le second membre de l'expression peut présenter plusieurs valeurs distinctes, entre lesquelles le choix reste incertain.

Si l'on a, par exemple, $\varphi'(z) = \frac{1}{z}$, il vient (766, 940)

$$\int_{x_0+y_0 i}^{x_1+y_1 i} \frac{dz}{z} = l(x_1 + y_1 i) - l(x_0 + y_0 i),$$

et chacun des logarithmes du second membre a une infinité de valeurs formant une progression arithmétique dont la raison est $2\pi i$ (909), de sorte que la valeur obtenue pour l'intégrale elle-même comporte un multiple arbitraire de $2\pi i$.

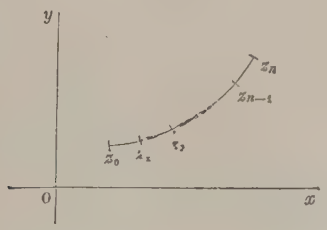
Pour lever toute difficulté, il faut donc revenir sur la définition adoptée en l'expliquant et en la précisant. Nous le ferons à l'aide des considérations suivantes dues à Cauchy, et qui

sont l'un de ses titres de gloire. Il n'est que juste d'ajouter que BRIOT et BOUQUET, en partant des idées de Cauchy, ont fait faire de grands progrès à l'étude des fonctions (¹).

949. La difficulté rencontrée est, au fond, toujours la même. Lorsque la variable z (supposée réelle) passe de la valeur réelle x_0 à la valeur réelle $x_1 > x_0$, les valeurs réelles qu'elle doit prendre dans l'intervalle $x_1 - x_0$ sont complètement déterminées, le chemin $x_1 - x_0$ compté sur l'axe des x l'étant lui-même. Au contraire, lorsque la variable z (supposée imaginaire) passe de la valeur imaginaire $x_0 + y_0 i$ à la valeur imaginaire $x_1 + y_1 i$, ou du point (z_0) au point (z_1) dans le plan des axes choisis, elle peut le faire en suivant une courbe quelconque, dont la forme arbitraire introduit dans la question une indétermination qui n'existe pas dans le cas des quantités réelles. Il est alors essentiel de prouver que, lorsque la courbe décrite par la variable imaginaire se modifie (sous certaines conditions) en conservant toujours les mêmes points extrêmes, l'intégrale correspondante n'est pas altérée et conserve une valeur fixe. C'est ce que nous montrerons après quelques développements nécessaires.

950. *Soit* $\varphi(z)$ *une fonction qui demeure continue quand le point-variable* z *décrit la courbe* $z_0 z_n$ (*fig.* 35). *Désignons*

Fig. 35.



par $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ *des points intermédiaires pris sur cette courbe. La somme*

$$(1) \quad \varphi(z_0)(z_1 - z_0) + \varphi(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + \varphi(z_{n-1})(z_n - z_{n-1})$$

(¹) *Voir* la première Partie de leur remarquable Ouvrage déjà cité : *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition. Gauthier-Villars; 1875.

tend vers une limite déterminée, quand le nombre des points intermédiaires croît indéfiniment, c'est-à-dire quand les arcs successifs z_0z_1, z_1z_2, ..., $z_{n-1}z_n$ *tendent vers zéro.*

Nous emploierons deux modes de démonstration pour établir ce résultat fondamental.

Première démonstration. — On a, comme à l'ordinaire,

$$z = x + yi, \qquad \varphi(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i,$$

P et Q étant des fonctions continues de x et de y.

La somme (1), prise pour les points indiqués, revient à

$$\sum \varphi(z)\Delta z,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\sum(\mathrm{P}+\mathrm{Q}i)(\Delta x + i\Delta y)\\ &= \sum[(\mathrm{P}\Delta x - \mathrm{Q}\Delta y) + i(\mathrm{P}\Delta y + \mathrm{Q}\Delta x)]\\ &= \sum\left[\left(\mathrm{P} - \mathrm{Q}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x + i\left(\mathrm{P}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathrm{Q}\right)\Delta x\right].\end{aligned}$$

Si la ligne z_0z_n est donnée, y et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sont déterminés en chaque point par l'abscisse correspondante et à l'aide de l'équation de cette ligne. D'ailleurs, lorsqu'on passe à la limite en augmentant indéfiniment le nombre des points intermédiaires, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient $\frac{dy}{dx}$ et Δz devient dz. Les sommes se confondant alors avec les intégrales, on a

$$(2)\qquad \int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_n}\left(\mathrm{P} - \mathrm{Q}\frac{dy}{dx}\right)dx + i\int_{x_0}^{x_n}\left(\mathrm{P}\frac{dy}{dx} + \mathrm{Q}\right)dx,$$

quantité parfaitement déterminée, puisque P, Q, $\frac{dy}{dx}$ étant des fonctions de x, on est ramené aux intégrales réelles. x_0 et x_n sont les abscisses des points (z_0) et (z_n).

Deuxième démonstration. — Le point $z = x + yi$ décrivant la courbe $z_0 z_n$, on peut regarder x et y comme des fonctions continues et admettant des dérivées, d'une variable réelle t croissant de t_0 à t_n lorsque z varie suivant la ligne donnée de z_0 à z_n, et poser, en regardant toujours i comme une constante,

$$z = \psi_1(t) + i\psi_2(t) = \psi(t).$$

En raison de l'existence supposée des dérivées, on aura (545), par rapport aux points (z_1) et (z_0),

$$\psi_1(t_1) - \psi_1(t_0) = (t_1 - t_0)[\psi'_1(t_0) + \delta'_0],$$
$$\psi_2(t_1) - \psi_2(t_0) = (t_1 - t_0)[\psi'_2(t_0) + \delta''_0],$$

δ'_0 et δ''_0 tendant vers zéro en même temps que t_1 vers t_0. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= [\psi_1(t_1) - \psi_1(t_0)] + i[\psi_2(t_1) - \psi_2(t_0)] \\ &= (t_1 - t_0)[\psi'_1(t_0) + i\psi'_2(t_0) + \delta'_0 + i\delta''_0] \\ &= (t_1 - t_0)[\psi'(t_0) + \delta_0], \end{aligned}$$

en désignant par δ_0 la quantité imaginaire $\delta'_0 + i\delta''_0$, qui tend vers zéro en même temps que δ'_0 et $i\delta''_0$ ou que $t_1 - t_0$.

On aura de même et dans des conditions analogues, c'est-à-dire $\delta_1, \delta_2, \ldots$, tendant vers zéro en même temps que $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2, \ldots$, la série d'égalités

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (t_2 - t_1)[\psi'(t_1) + \delta_1], \\ z_3 - z_2 &= (t_3 - t_2)[\psi'(t_2) + \delta_2], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n - z_{n-1} &= (t_n - t_{n-1})[\psi'(t_{n-1}) + \delta_{n-1}]. \end{aligned}$$

En substituant les binômes $z_1 - z_0, z_2 - z_1, \ldots, z_n - z_{n-1}$, ainsi exprimés dans la somme (1) et en la séparant immédiatement en deux parties, cette somme deviendra

$$\left\{ \begin{aligned} &[(t_1 - t_0)\varphi(z_0)\psi'(t_0) + (t_2 - t_1)\varphi(z_1)\psi'(t_1) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\varphi(z_{n-1})\psi'(t_{n-1})] \\ &+ [(t_1 - t_0)\delta_0\varphi(z_0) + (t_2 - t_1)\delta_1\varphi(z_1) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\delta_{n-1}\varphi(z_{n-1})]. \end{aligned} \right.$$

Sa seconde partie a évidemment zéro pour limite; car, M étant le maximum du module de la fonction $\varphi(z)$ lorsque z parcourt la ligne $z_0 z_n$, et μ, le plus grand module parmi ceux des

quantités $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, le module de cette seconde partie est lui-même inférieur (821, 840) à

$$M\mu(t_n - t_0),$$

c'est-à-dire tend vers zéro en même temps que μ, ou en même temps que le nombre des points intermédiaires sur la ligne $z_0 z_n$ croît indéfiniment.

Considérons maintenant la première partie de la somme (1). D'une manière générale, on peut mettre le produit $\varphi(z)\psi'(t)$ sous la forme

$$\varphi(z)\psi'(t) = f(t) + iF(t),$$

$f(t)$ et $F(t)$ représentant deux fonctions réelles de t; cette première partie revient donc à

$$[(t_1 - t_0)f(t_0) + (t_2 - t_1)f(t_1) + \ldots + (t_n - t_{n-1})f(t_{n-1})]$$
$$+ i[(t_1 - t_0)F(t_0) + (t_2 - t_1)F(t_1) + \ldots + (t_n - t_{n-1})F(t_{n-1})].$$

Les deux parenthèses ci-dessus ayant pour limites respectives (758) les deux intégrales définies réelles

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_n} F(t)\,dt,$$

la somme (1) tend finalement vers la limite

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt + i\int_{t_0}^{t_n} F(t)\,dt,$$

et c'est cette limite qui définit l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz$$

prise tout le long de la courbe $z_0 z_n$, depuis $z = z_0$ jusqu'à $z = z_n$.

On voit qu'on peut écrire à la fois

$$(2\,bis) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_n} [f(t) + iF(t)]\,dt \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{t_0}^{t_n} \varphi[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt. \end{cases}$$

La deuxième démonstration, comme la première, prouve l'existence d'une limite et ramène son calcul numérique à

celui d'intégrales de fonctions d'une variable réelle. Les deux résultats coïncident quand on prend $t = x$.

951. La fonction $\varphi(z)$ étant toujours imaginaire, admettons que la variable imaginaire $z = x + yi$ se réduise à la partie réelle x.

Si nous nous reportons à la première démonstration du numéro précédent, on voit que P et Q deviennent alors des fonctions continues de x, telles que $P = f(x)$ et $Q = F(x)$, de sorte qu'on a

$$\varphi(z) = \varphi(x) = f(x) + i\,F(x).$$

La courbe suivie par z se confondant d'ailleurs avec l'axe des x, on a $\frac{dy}{dx} = 0$, et l'égalité (2) [950] prend, dans ce cas particulier d'une fonction imaginaire d'une variable réelle, la forme

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx.$$

952. Reprenons la somme (1) sous sa forme primitive (950)

$$\varphi(z_0)(z_1 - z_0) + \varphi(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + \varphi(z_{n-1})(z_n - z_{n-1}),$$

et cherchons une limite supérieure de son module.

M étant toujours le maximum du module de la fonction $\varphi(z)$ lorsque z parcourt la ligne $z_0 z_n$, désignons par l la longueur de cette courbe et, par $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, les longueurs des cordes des arcs successifs $z_0 z_1, z_1 z_2, \ldots, z_{n-1} z_n$. Ces cordes représentant précisément (877) les modules des différences $z_1 - z_0, z_2 - z_1, \ldots, z_n - z_{n-1}$, le module de la somme (1) sera moindre (821, 840) que

$$M(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}) \quad \text{ou que} \quad Ml.$$

Il en résulte, d'après la définition de l'intégrale,

$$\operatorname{mod}\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz < \int_{z_0}^{z_n} \operatorname{mod}\varphi(z)\,dz < Ml.$$

953. En considérant toujours l'intégrale définie (950)

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz,$$

changeons de variable en posant

$$z = \psi(z').$$

La variable z parcourt la courbe $z_0 z_n$, quand la nouvelle variable z' parcourt la courbe $z'_0 z'_n$; et nous admettons que la fonction $\psi(z')$ reste alors continue et a une dérivée $\psi'(z')$, de sorte que $dz = \psi'(z')\,dz'$.

On a dans ces conditions

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\,dz = \int_{z'_0}^{z'_n} \varphi(z)\,\psi'(z')\,dz',$$

les intégrales étant prises respectivement suivant les deux lignes $z_0 z_n$, $z'_0 z'_n$.

En effet, on peut écrire (545) les égalités successives

$$\begin{aligned}
z_1 - z_0 &= (z'_1 - z'_0)\,[\psi'(z'_0) + \delta_0],\\
z_2 - z_1 &= (z'_2 - z'_1)\,[\psi'(z'_1) + \delta_1],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
z_n - z_{n-1} &= (z'_n - z'_{n-1})\,[\psi'(z'_{n-1}) + \delta_{n-1}].
\end{aligned}$$

Il en résulte, comme précédemment (930),

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\varphi(z_0)(z_1 - z_0) + \varphi(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + \varphi(z_{n-1})(z_n - z_{n-1})\\
&= [(z'_1 - z'_0)\varphi(z_0)\psi'(z'_0) + (z'_2 - z'_1)\varphi(z_1)\psi'(z'_1) + \ldots + (z'_n - z'_{n-1})\varphi(z_{n-1})\psi'(z'_{n-1})]\\
&\quad + [(z'_1 - z'_0)\,\delta_0\varphi(z_0) + (z'_2 - z'_1)\,\delta_1\varphi(z_1) + \ldots + (z'_n - z'_{n-1})\,\delta_{n-1}\varphi(z_{n-1})].
\end{aligned} \right.$$

Il est clair que, si l'on désigne encore par M le maximum du module de $\varphi(z)$ le long de la courbe $z_0 z_n$, par μ le plus grand module parmi ceux des quantités $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, par l' la longueur de la ligne $z'_0 z'_n$, et par $c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n-1}$, les longueurs des cordes des arcs successifs $z'_0 z'_1, z'_1 z'_2, \ldots, z'_{n-1} z'_n$, le module de la seconde partie de la somme ci-dessus sera moindre (821, 840, 877) que

$$\mathrm{M}\mu\,(c'_0 + c'_1 + \ldots + c'_{n-1}) < \mathrm{M}\mu\,l'.$$

Cette seconde partie tend donc vers zéro en même temps que μ, ou en même temps que le nombre des points intermédiaires sur $z'_0 z'_n$, et par conséquent sur $z_0 z_n$, croît indéfiniment.

L'égalité (2) entraîne alors à la limite l'égalité (1).

Cette proposition va nous permettre d'étendre aux fonctions imaginaires la règle fondamentale du n° 762, en justifiant ainsi les premières indications du n° 948.

954. *La fonction $u = \Phi(z)$ étant continue et admettant la dérivée $\varphi(z)$ lorsque la variable z décrit la courbe $z_0 z_n$, on a, en prenant l'intégrale suivant cette ligne,*

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz = \Phi(z_n) - \Phi(z_0).$$

En effet, quand la variable z décrit la courbe $z_0 z_n$, la variable u décrit une courbe correspondante $u_0 u_n$ (887), et l'on a, d'après ce que l'on vient de voir (953) et en changeant de variable,

$$\int_{u_0}^{u_n} du = \int_{z_0}^{z_n} \Phi'(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz.$$

D'autre part, si l'on désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, des points intermédiaires successifs sur la ligne $u_0 u_n$, la première intégrale est la limite de la somme

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}),$$

quand le nombre des points intermédiaires croît indéfiniment; et, comme cette somme se réduit toujours à

$$u_n - u_0,$$

on a bien

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz = u_n - u_0 = \Phi(z_n) - \Phi(z_0).$$

905. Les théorèmes généraux démontrés précédemment sur les intégrales définies (I^re^ Partie, Livre V, Ch. XVI) sont évidemment applicables aux intégrales imaginaires.

En particulier, quand on intervertit l'ordre des limites, on change simplement le signe de l'intégrale définie (763, 2°), la variable parcourant la même courbe en sens inverse.

Si l'on décompose la courbe $z_0 z_n$ en plusieurs parties, telles que $z_0 z_k$, $z_k z_n$, on a (763, 4°)

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_k} \varphi(z)\, dz + \int_{z_k}^{z_n} \varphi(z)\, dz.$$

En remplaçant chaque élément d'une intégrale définie par

son module ou par une quantité plus grande, on obtient une limite supérieure du module de la valeur de l'intégrale (840, 952).

Les règles de l'intégration par parties (781 et suiv.) subsistent complètement, etc.

956. Le théorème relatif au développement d'une intégrale en série convergente (795) s'étend comme il suit aux intégrales imaginaires.

Si la fonction $\varphi(z)$ *peut se développer suivant une série*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots, \tag{1}$$

dont tous les termes demeurent des fonctions continues de z *quand cette variable décrit la ligne* $z_0 z_p$, *qui soit convergente en tous les points de cette ligne, et telle qu'en chacun d'eux et pour* n *assez grand le module de la somme*

$$u_n + u_{n+1} + \ldots$$

soit moindre qu'un nombre donné α *aussi petit qu'on voudra, on a, en prenant toutes les intégrales le long de la même ligne* $z_0 z_p$,

$$\int_{z_0}^{z_p} \varphi(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_p} u_0\, dz + \int_{z_0}^{z_p} u_1\, dz + \int_{z_0}^{z_p} u_2\, dz + \ldots. \tag{2}$$

En effet, S_n étant la somme des n premiers termes de la série (2), $\psi(z)$ le reste de la série (1) ou la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

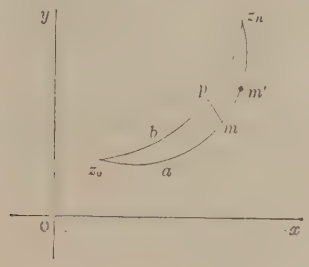
l la longueur de la ligne $z_0 z_p$ ou du *fil* de l'intégration, on pourra écrire (955)

$$\int_{z_0}^{z_p} \varphi(z)\, dz = S_n + \int_{z_0}^{z_p} \psi(z)\, dz.$$

Le module de $\psi(z)$ est, par hypothèse, moindre que α. Par suite (952), celui de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_p} \psi(z)\, dz$ est moindre que αl et tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment, de sorte que S_n tend alors vers une limite égale à l'intégrale $\int_{z_0}^{z_p} \varphi(z)\, dz$; ce qui justifie l'énoncé.

957. Après les détails qui précèdent, il reste à prouver (949) que, *si l'on va du point* z_0 *au point* z_n (*fig.* 36) *par deux chemins* $z_0 a z_n$, $z_0 b z_n$, *infiniment rapprochés l'un de*

Fig. 36.



l'autre et situés dans la partie du plan des axes où la fonction $\varphi(z)$ *demeure holomorphe* (947), *la valeur de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz,$$

prise suivant l'une ou l'autre courbe, est en général la même.

A chaque point m de la courbe $z_0 a z_n$ correspond un point p de la courbe $z_0 b z_n$, les deux points extrêmes z_0 et z_n se correspondant à eux-mêmes sur les deux courbes.

Si l'on passe, sur la première courbe, du point m au point infiniment voisin m', la fonction $\varphi(z)$ subit un accroissement $d\varphi(z)$. Si l'on passe du point m au point correspondant p sur la seconde courbe, la fonction $\varphi(z)$ subit un accroissement différent que nous représenterons par $\delta\varphi(z)$, et z lui-même, au lieu de subir l'accroissement dz, subit alors l'accroissement δz.

Comme la fonction est holomorphe, elle prend toujours au point p la même valeur, soit que le point-variable ait décrit le contour $z_0 a m p$, soit qu'il ait suivi directement la seconde ligne $z_0 b p$. Il en résulte que la valeur de la fonction au point p dans la seconde intégrale (ou dans l'intégrale suivant la ligne $z_0 b z_n$) diffère de la valeur de la fonction au point m dans la première intégrale (ou dans l'intégrale suivant la ligne $z_0 a z_n$) de la quantité $\delta\varphi(z)$, comme z diffère de m à p de la quantité δz.

De plus, la fonction étant monogène, c'est-à-dire ayant par

hypothèse la même dérivée au point m, que le point décrivant suive l'élément mm' ou l'élément mp (925 et suiv.), on a à la fois

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{\delta\varphi(z)}{\delta z}$$

ou

$$d\varphi(z)\,\delta z = \delta\varphi(z)\,dz. \tag{1}$$

Cela posé, la variation de l'intégrale définie, lorsqu'on suit la courbe $z_0 b z_n$, au lieu de la courbe $z_0 a z_n$, est représentée, d'après les notations adoptées, par l'expression

$$\int_{z_0}^{z_n} [\varphi(z) + \delta\varphi(z)]\, d(z+\delta z) - \int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, dz$$

ou, en simplifiant (955), par

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, d\,\delta z + \delta\varphi(z)\, dz + \delta\varphi(z)\, d\,\delta z;$$

ce qui revient, en ne conservant que les termes du deuxième ordre (520) et en tenant compte de l'égalité (1), à

$$\int_{z_0}^{z_n} \varphi(z)\, d\,\delta z + \delta z\, d\varphi(z).$$

Ce résultat peut évidemment s'écrire (570)

$$\int_{z_0}^{z_n} d[\varphi(z)\,\delta z].$$

Or, l'intégrale générale ou indéfinie $\int d[\varphi(z)\,\delta z]$ se réduisant (763, 1°) à $\varphi(z)\,\delta z$, on a, pour l'intégrale définie correspondante,

$$\varphi(z_n)\,\delta z_n - \varphi(z_0)\,\delta z_0.$$

Comme les points extrêmes z_0 et z_n sont fixes, on a

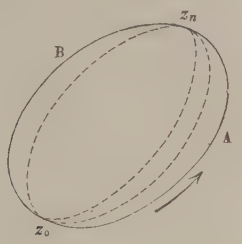
$$\delta z_0 = 0, \qquad \delta z_n = 0,$$

et, par suite, la variation de l'intégrale définie considérée, lorsqu'on la prend suivant la courbe $z_0 b z_n$ au lieu de la prendre suivant la courbe $z_0 a z_n$, est elle-même égale à zéro. Ainsi, et sauf un infiniment petit du second ordre, les intégrales prises suivant les deux courbes sont égales. Elles le sont donc rigoureusement.

958. On déduit de cette proposition fondamentale les conséquences les plus importantes.

Au lieu de deux lignes infiniment rapprochées, considérons (*fig.* 37) deux lignes quelconques $z_0 A z_n$, $z_0 B z_n$, allant du point z_0 au point z_n, dans la portion du plan où la fonction $\varphi(z)$ demeure holomorphe.

Fig. 37.



Il est clair que les intégrations effectuées suivant ces deux lignes resteront encore identiques, puisque l'on peut passer de l'une à l'autre par une série de transformations successives et infiniment rapprochées qui, comme on vient de le voir, laisseront constante la valeur de l'intégrale.

Il en résulte immédiatement que, *dans la portion de plan où la fonction* $\varphi(z)$ *reste holomorphe, la valeur de l'intégrale* $\int \varphi(z)\,dz$ *prise* TOUT LE LONG D'UN CONTOUR FERMÉ, *tel que* $z_0 A z_n B z_0$, *est* NULLE.

En effet, l'intégrale prise le long de $z_0 A z_n$ étant égale (957) à l'intégrale prise le long de $z_0 B z_n$, et cette dernière changeant de signe (955) lorsque la ligne $z_0 B z_n$ est parcourue en sens inverse, c'est-à-dire lorsqu'elle devient $z_n B z_0$, l'intégrale prise suivant le contour total et fermé parcouru dans le sens de la flèche (*fig.* 37) est nécessairement nulle.

Il est utile de remarquer que le sens indiqué ici par la flèche est ce qu'on appelle le sens *direct* ou *positif*. Le contour qui limite l'aire considérée se trouve alors décrit vers la *gauche* de l'observateur.

959. Lorsque l'aire considérée est limitée par une seule ligne fermée, on dit qu'elle est *à contour simple;* lorsqu'elle est limitée par plusieurs lignes fermées distinctes, on dit qu'elle est *à contour complexe.*

Ainsi, l'aire limitée par une circonférence est à contour simple, l'aire d'une couronne circulaire est à contour complexe.

On peut toujours, à l'aide de coupures ou de simples transversales, transformer un contour complexe en contour simple.

Par exemple, dans le cas de la *fig.* 38, on réunira les deux circonférences par la transversale AA′, et l'aire de la couronne sera limitée par le contour simple ACAA′C′A′A. Les flèches indiquent le sens du mouvement.

Fig. 38.

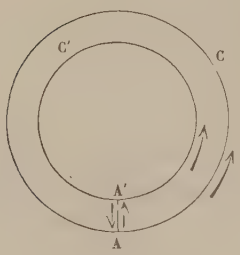
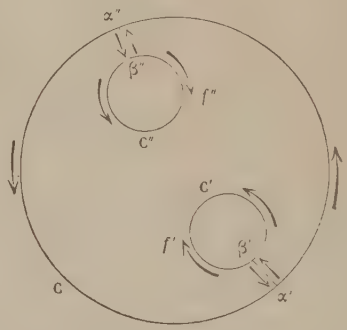


Fig. 39.



De même, dans le cas de la *fig.* 39, où l'aire considérée est celle d'un cercle C dont on a enlevé les portions limitées par deux petites circonférences intérieures C′ et C″, on emploiera les deux transversales $\alpha'\beta'$ et $\alpha''\beta''$, et l'aire proposée sera alors limitée par le contour simple

$$\alpha'\beta'C'\beta'\alpha'\alpha''\beta''C''\beta''\alpha''C\alpha'.$$

Les flèches indiquent le sens du mouvement.

960. *Lorsqu'un contour fermé* C *comprend d'autres contours intérieurs également fermés, tels que* C′, C″, ..., *la fonction* $\varphi(z)$ *restant toujours holomorphe dans l'aire ainsi limitée, l'intégrale prise tout le long du contour extérieur dans un certain sens est égale à la somme des intégrales prises dans le même sens tout le long des contours intérieurs.*

(Il faut bien faire attention que, par hypothèse, la fonction $\varphi(z)$ cesse d'être holomorphe à l'intérieur des contours C′, C″, ...).

Reprenons la *fig.* 39, et admettons que les deux circonférences C′ et C″ soient d'abord décrites dans le sens des flèches f' et f'', c'est-à-dire dans le sens négatif ou en sens contraire de celui adopté pour la circonférence C.

L'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ prise suivant le contour simple fermé obtenu à l'aide des transversales $\alpha'\beta'$ et $\alpha''\beta''$, c'est-à-dire suivant le contour $\alpha'\beta' f' C' \beta'\alpha'\alpha''\beta'' f'' C''\beta''\alpha'' C\alpha'$, sera nulle (938).

Or, cette intégrale se compose (955) : des intégrales suivant $\alpha'\alpha''$ et $\alpha'' C\alpha'$ qui, réunies, constituent l'intégrale suivant C prise dans le sens direct; des intégrales suivant $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha'$, $\alpha''\beta''$, $\beta''\alpha''$, qui se détruisent deux à deux; enfin, des intégrales prises suivant C′ et C″ dans le sens négatif. On aura donc, en désignant d'une manière générale par $\int_C$ l'intégrale prise suivant le contour C,

$$\int_C - \int_{C'} - \int_{C''} = 0,$$

d'où

$$\int_C = \int_{C'} + \int_{C''},$$

tous les contours étant décrits dans le même sens.

S'il n'y a qu'un contour intérieur C′, on a, quel qu'il soit,

$$\int_C = \int_{C'}.$$

961. Nous terminerons ces notions en démontrant les deux propositions suivantes :

1° *L'intégrale* $\int \varphi(z)\,dz$ *prise autour d'un cercle infiniment petit c dont le centre est en un point a* (*fig.* 40) *tend vers zéro en même temps que le rayon r de ce cercle, lorsque l'on a, pour* $z = a$,

$$\lim (z - a)\,\varphi(z) = 0.$$

En effet, M étant le maximum du module du produit $(z - a)\,\varphi(z)$ le long du cercle c, il en résulte pour ce contour, la différence $(z - a)$ ayant pour module r (877),

$$\operatorname{mod}(z - a)\operatorname{mod}\varphi(z) \leqq M \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{mod}\varphi(z) \leqq \frac{M}{r}.$$

On en déduit (955), en représentant par $\int_c$ l'intégrale prise tout le long de c,

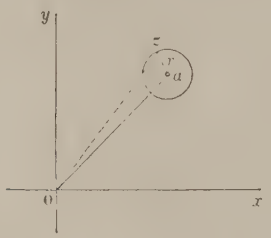
$$\operatorname{mod}\int_c \varphi(z)\,dz \leqq \int_c \frac{M}{r}\operatorname{mod} dz.$$

Mais le module de dz n'est autre (877) que l'élément ds du cercle c. La dernière intégrale se réduit donc à

$$\frac{M}{r}\int_c ds = \frac{M}{r}\,2\pi r = M.2\pi,$$

quantité qui tend vers zéro, par hypothèse, en même temps

Fig. 40.



que r ou que $z-a$. Il en est donc de même du module de l'intégrale $\int_c \varphi(z)\,dz$.

2° *L'intégrale* $\int \varphi(z)\,dz$ *prise autour d'un cercle* C *de rayon* R, *dont le centre est à l'origine, tend vers zéro à mesure que* R *croît indéfiniment, lorsqu'on a, pour* $z=\infty$,

$$\lim z\,\varphi(z) = 0.$$

En effet, M étant le maximum du module du produit $z\,\varphi(z)$ le long du cercle C, il en résulte pour ce contour, z ayant pour module R,

$$\operatorname{mod} z \operatorname{mod}\varphi(z) \leqq M$$

ou

$$\operatorname{mod}\varphi(z) \leqq \frac{M}{R}.$$

On en déduit (955)

$$\operatorname{mod}\int_C \varphi(z)\,dz \leqq \int_C \frac{M}{R}\operatorname{mod} dz \leqq M.2\pi,$$

quantité qui tend vers zéro, par hypothèse, en même temps que z ou R croît indéfiniment.

Il est évident que les deux propositions précédentes subsistent lorsque l'intégration n'a lieu que suivant une portion des cercles considérés.

Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions d'une variable imaginaire.

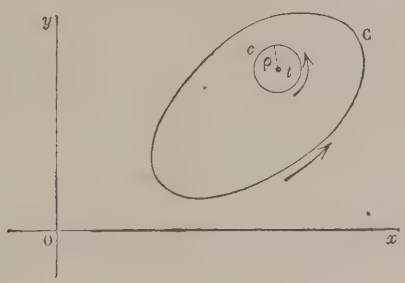
962. Nous commencerons par démontrer le théorème suivant, découvert par Cauchy, et qui est fondamental.

Lorsqu'une fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans une portion du plan limitée par un contour simple C, *si l'on désigne par t un point quelconque pris à l'intérieur de ce contour, on a*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz. \tag{1}$$

En effet, décrivons du point t comme centre, avec un rayon infiniment petit ρ, le cercle c à l'intérieur du contour C (*fig.* 41).

Fig. 41.



La fonction $\dfrac{\varphi(z)}{z-t}$ est, à son tour, évidemment holomorphe dans l'aire comprise entre C et c. Il en résulte que les intégrales de cette fonction, prises dans le sens positif, suivant C ou suivant c, demeurent égales (960). Nous n'avons donc qu'à évaluer l'intégrale

$$\int_c \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz.$$

Pour cela, en remarquant (877) que le module de la diffé-

rence $z-t$ est ρ et en désignant par θ son argument, nous poserons (905)

$$z-t=\rho e^{\theta i}.$$

Il en résultera, t ne variant pas,

$$dz=i\rho e^{\theta i}d\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{z-t}=i\,d\theta.$$

Nous aurons, par suite,

$$\int_c \frac{\varphi(z)}{z-t}dz=i\int_c \varphi(t+\rho e^{\theta i})\,d\theta.$$

Mais la fonction $\varphi(z)$ étant continue et ρ infiniment petit, l'expression $\varphi(t+\rho e^{\theta i})$ se réduit à la limite à la quantité constante $\varphi(t)$, et l'on a

$$\int_C \frac{\varphi(z)}{z-t}dz=i\varphi(t)\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi i\,\varphi(t);$$

ce qui est précisément la formule (1).

963. *La fonction $\varphi(z)$ étant holomorphe dans une certaine partie du plan, elle admet une infinité de dérivées successives, toutes holomorphes dans cette même partie du plan.*

Prenons, comme précédemment, un point t dans la partie considérée, supposée limitée par un contour simple C. La formule qu'on vient d'établir (962) étant applicable, nous aurons

$$(1)\qquad \varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t)^{-1}dz.$$

Pour un autre point $t+\Delta t$, voisin du premier et situé aussi à l'intérieur de C, il viendra

$$\varphi(t+\Delta t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t-\Delta t)^{-1}dz.$$

Il en résulte (955)

$$\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,[(z-t-\Delta t)^{-1}-(z-t)^{-1}]dz$$

ou

$$\Delta\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\Delta(z-t)^{-1}dz.$$

On a donc

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\frac{\Delta(z-t)^{-1}}{\Delta t}\,dz.$$

Mais la dérivée de la fonction $(z-t)^{-1}$ de la variable t ayant évidemment (564, 575) pour valeur $(z-t)^{-2}$, on peut écrire (545)

$$\frac{\Delta(z-t)^{-1}}{\Delta t} = (z-t)^{-2} + \alpha,$$

α tendant vers zéro en même temps que Δt. Par suite,

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t)^{-2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\alpha\,dz.$$

Quand Δt tend vers zéro, α tend vers zéro. A la limite, la seconde intégrale du second membre a donc un module nul (1) et disparaît, de sorte qu'il reste

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t)^{-2}\,dz, \tag{2}$$

valeur finie et déterminée.

D'après la formule (2), on a, pour un point $t+\Delta t$, voisin du point t et toujours situé à l'intérieur de C,

$$\varphi'(t+\Delta t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)[z-t-\Delta t)^{-2}\,dz,$$

d'où, en soustrayant membre à membre la formule (2) de ce dernier résultat,

$$\Delta\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\Delta(z-t)^{-2}\,dz. \tag{3}$$

Comme la fonction $(z-t)^{-2}$ est continue, on peut prendre Δt assez petit pour que le module de $\Delta(z-t)^{-2}$ soit moindre qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra, pendant que z parcourt C. La valeur de l'intégrale définie du second

(1) En désignant par M le maximum du module de $\varphi(z)$ le long de C et par L la longueur de ce contour, on a, en effet, pour une valeur donnée de Δt,

$$\operatorname{mod}\int_C \varphi(z)\,\alpha\,dz \leqq \mathrm{ML}\,\operatorname{mod}\alpha;$$

et, si Δt tend vers zéro, il en est de même de α et de son module.

membre sera alors elle-même infiniment petite (*voir* la note (1) ci-dessus), de sorte que la fonction $\varphi'(t)$ est une fonction continue.

Enfin, on a, d'après l'équation (3),

$$\frac{\Delta\varphi'(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\frac{\Delta(z-t)^{-2}}{\Delta t}\,dz.$$

La fonction $(z-t)^{-2}$ ayant évidemment pour dérivée $2(z-t)^{-3}$, on pourra poser encore

$$\frac{\Delta(z-t)^{-2}}{\Delta t} = 2(z-t)^{-3} + \alpha,$$

α tendant vers zéro en même temps que Δt. Comme on en déduit

$$\frac{\Delta\varphi'(t)}{\Delta t} = \frac{1.2}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t)^{-3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\alpha\,dz,$$

il viendra à la limite

$$\varphi''(t) = \frac{1.2}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,(z-t)^{-3}\,dz, \tag{4}$$

valeur finie et déterminée, de sorte que la fonction $\varphi'(t)$ est, en outre, monogène. Elle est donc bien holomorphe (947) dans la portion de plan considérée.

$\varphi'(t)$ étant holomorphe dans la même portion de plan où $\varphi(t)$ l'est déjà, $\varphi''(t)$ à son tour sera holomorphe à l'intérieur du même contour, et ainsi de suite indéfiniment. La proposition énoncée est donc établie.

La dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre a évidemment pour expression, en revenant aux exposants positifs,

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz. \tag{5}$$

On voit, propriété bien remarquable, qu'il suffit de connaître les valeurs de la fonction $\varphi(z)$ tout le long du contour C, pour déterminer les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives à l'intérieur de ce contour (1).

---

(1) On démontre dans le *Calcul intégral* que, pour différentier sous le signe $\int$ par rapport à un paramètre ou par rapport à une certaine lettre

964. Si le contour C est un cercle décrit du point t comme centre, avec r pour rayon, on pose, comme précédemment (962),

$$z - t = re^{\theta i}, \qquad \text{d'où} \qquad dz = ire^{\theta i} d\theta.$$

A la place des formules (1) et (5) [963], il vient alors

$$(1\,bis) \qquad \begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t + re^{\theta i})\, i\, d\theta \\ \qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t + re^{\theta i})\, d\theta, \end{cases}$$

$$(5\,bis) \qquad \begin{cases} \varphi^{(n)}(t) = \dfrac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\varphi(t + re^{\theta i})\, ire^{\theta i} d\theta}{(re^{\theta i})^{n+1}} \\ \qquad = \dfrac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\varphi(t + re^{\theta i})}{e^{n\theta i}}\, d\theta, \end{cases}$$

l'argument θ devenant la variable.

965. Les formules précédentes vont nous conduire au but que nous poursuivons.

Nous avons reconnu, en étudiant les séries imaginaires, que, lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable imaginaire, admet un cercle de convergence (896), elle représente dans ce cercle une fonction holomorphe (898, 936). Pour qu'une fonction $\varphi(z)$ soit développable suivant une pareille série, il est donc *nécessaire* qu'elle soit holomorphe dans le cercle de

---

prise pour variable, il suffit de remplacer la fonction qu'on doit intégrer par sa dérivée prise seulement par rapport au paramètre. En appliquant cette règle, on obtient immédiatement les résultats précédents.

En partant, par exemple, de

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z - t}\, dz,$$

on devra, en prenant la dérivée par rapport à t considéré comme paramètre, remplacer $\dfrac{\varphi(z)}{z-t}\,dz$ par $\dfrac{\varphi(z)}{(z-t)^2}\,dz$, et l'on aura

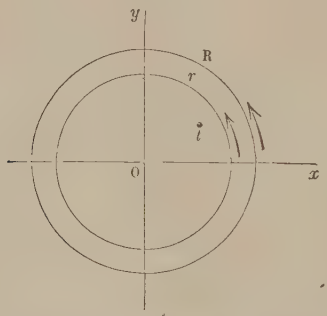
$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z - t)^2}\, dz.$$

convergence de la série, et il reste à prouver que cette condition est *suffisante*.

C'est à quoi l'on parvient comme il suit, à l'aide d'une importante proposition due à Cauchy.

966. Soit un point quelconque t pris à l'intérieur du cercle de convergence supposé R (*fig.* 42). De l'origine comme centre, avec un rayon r moindre que R, décrivons un second cercle qui comprenne le point t.

Fig. 42.



Nous aurons, d'après le théorème fondamental de Cauchy (962),

$$(1) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\frac{\varphi(z)}{z}}{1-\frac{t}{z}}\,dz.$$

Or, on a identiquement (14), les règles de calcul restant les mêmes, que les lettres employées représentent des quantités réelles ou des quantités imaginaires,

$$\frac{1-\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n},$$

et il en résulte

$$\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}.$$

On a donc, en multipliant de part et d'autre par $\frac{\varphi(z)}{z}dz$,

$$\frac{\frac{\varphi(z)}{z}}{1-\frac{t}{z}}dz=\frac{\varphi(z)}{z}\left(1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}+\ldots+\frac{t^n}{z^n}+\frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}\right)dz.$$

On déduit de cette dernière égalité (955) rapprochée de la formule (1), t étant une constante,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(t)=&\frac{1}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z}dz+\frac{t}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z^2}dz+\frac{t^2}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z^3}dz+\ldots\\&+\frac{t^n}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z-t}\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}dz.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $z=re^{\theta i}$, d'où $dz=ire^{\theta i}d\theta=iz\,d\theta$, le dernier terme du second membre de la formule (2) devient

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\,\varphi(z)}{z-t}\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}d\theta.$$

r est le module de z, puisque les intégrales sont prises le long de la circonférence r. Si ρ est le module de t, moindre que r, et si M est le maximum du module de $\varphi(z)$ sur la circonférence r, le module du dernier terme exprimé ci-dessus est moindre que (877)

$$\frac{1}{2\pi}\frac{r\mathrm{M}}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}2\pi=\frac{r\mathrm{M}}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1},$$

c'est-à-dire qu'il tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Il s'ensuit, d'après la formule (2), que la fonction $\varphi(t)$ est la limite de la série convergente

$$(4)\quad \varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z}dz+\frac{t}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z^2}dz+\frac{t^2}{2\pi i}\int_r\frac{\varphi(z)}{z^3}dz+\ldots.$$

[Cette série est bien convergente, puisque la somme de ses $n+1$ premiers termes, pour n aussi grand qu'on voudra, a $\varphi(t)$ pour limite.]

La fonction $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ demeurant continue sur la circonférence r, les intégrales du développement (4) ont des valeurs finies et

déterminées; ces valeurs sont d'ailleurs indépendantes du rayon r, puisqu'elles resteraient les mêmes sur toute circonférence concentrique de rayon moindre (960), décrite dans le même sens.

Si l'on pose

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\,dz, \tag{5}$$

la série (4) prend la forme

$$\varphi(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \dots$$

ou, en remplaçant t par z et en restant pour les valeurs de z en deçà du module R,

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots. \tag{6}$$

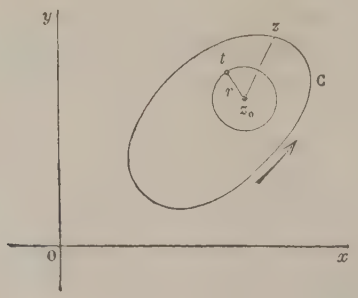
En tenant compte des relations $z = re^{\theta i}$ et $dz = iz\,d\theta$, on peut mettre la valeur de u_n sous la forme

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{\theta i})}{e^{n\theta i}}\,d\theta. \tag{5 bis}$$

967. Série de Taylor. — Nous allons pouvoir maintenant étendre la formule de Taylor (675) aux fonctions imaginaires.

Considérons une fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans l'aire limitée par le contour quelconque C. Décrivons à l'intérieur

Fig. 43.



de cette aire (*fig.* 43) une circonférence de centre z_0 et de rayon r. Pour un point quelconque t de cette circonférence,

nous aurons, d'après le théorème fondamental de Cauchy (962),

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz. \tag{1}$$

L'identité que nous venons de démontrer (966) donne d'ailleurs

$$\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}$$

ou, en divisant par z les deux membres,

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \frac{t^2}{z^3} + \ldots + \frac{t^n}{z^{n+1}} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{z-t}.$$

Le premier membre de cette identité ne changeant pas quand on remplace z et t par $z-z_0$ et $t-z_0$, il en est de même du second membre, et l'on a

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{t-z_0}{(z-z_0)^2} + \frac{(t-z_0)^2}{(z-z_0)^3} + \ldots + \frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{\frac{(t-z_0)^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}}}{z-t}.$$

En opérant comme on vient de le voir (965), c'est-à-dire en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\varphi(z)dz$ et en intégrant ensuite le long du contour C, on a, d'après (1) et $t-z_0$ étant une constante,

$$\begin{aligned}\varphi(t) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz + \frac{t-z_0}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^2}\,dz \\ & + \frac{(t-z_0)^2}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^3}\,dz + \ldots + \frac{(t-z_0)^n}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-t}\,\frac{(t-z_0)^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.\end{aligned}$$

Il est clair (966) que le dernier terme du second membre de cette relation tend vers zéro à mesure que n croît indéfiniment, puisque l'on a $\mathrm{mod}(t-z_0) < \mathrm{mod}(z-z_0)$.

Par conséquent, $\varphi(t)$ se trouve développée suivant une série convergente à l'intérieur du contour C.

Mais nous avons obtenu (963), dans les conditions où nous nous trouvons, la formule générale

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz = \frac{\varphi^{(n)}(t)}{1.2.3\ldots n},$$

ou, en supposant $t = z_0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{3}$$

Faisons varier n depuis 1 jusqu'à n dans l'expression (3) et remarquons que, pour $t = z_0$, on a directement (962)

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz.$$

En substituant les valeurs correspondantes dans (2), il vient

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(t) = \varphi(z_0) &+ \frac{t-z_0}{1}\varphi'(z_0) + \frac{(t-z_0)^2}{1.2}\varphi''(z_0)\\ &+ \frac{(t-z_0)^3}{1.2.3}\varphi'''(z_0) + \ldots + \frac{(t-z_0)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(z_0) + \mathrm{R},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

en posant

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-t}\,\frac{(t-z_0)^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{5}$$

[Il faut bien remarquer que, dans la valeur du reste R, nulle pour $n = \infty$, z est un point quelconque du contour C, tandis que t demeure un point intérieur à ce contour.]

Puisque t est quelconque, on peut, pour plus de généralité, mettre z à la place de t dans l'équation (4), et écrire

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(z) = \varphi(z_0) &+ \frac{z-z_0}{1}\varphi'(z_0)\\ &+ \frac{(z-z_0)^2}{1.2}\varphi''(z_0) + \frac{(z-z_0)^3}{1.2.3}\varphi'''(z_0) + \ldots\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si l'on veut retrouver la forme habituelle du développement, on peut poser

$$z - z_0 = h, \qquad \text{d'où} \qquad z = z_0 + h.$$

On aura ainsi le développement de $\varphi(z_0 + h)$ en fonction de z_0 et de l'accroissement h. Si l'on remplace encore, pour plus de généralité, z_0 par z, il vient, comme au n° 675,

$$(6\ bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(z+h) &= \varphi(z) + \frac{h}{1}\varphi'(z) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(z) \\ &\quad + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(z) + \dots . \end{aligned} \right.$$

C'est la série de Taylor, étendue aux quantités imaginaires.

968. Série de Maclaurin. — On passe de la série de Taylor à celle de Maclaurin, en supposant le point z_0 ou le centre de la circonférence r (*fig.* 43) à l'origine O.

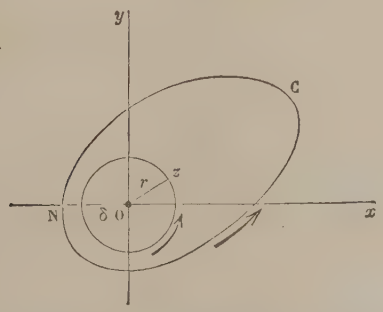
Il faut alors, dans les équations (3), (4), (5), (6) du numéro précédent, faire $z_0 = 0$. L'équation (6) devient alors

$$(7)\quad \varphi(z) = \varphi(0) + \frac{z}{1}\varphi'(0) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{z^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \dots .$$

C'est la formule de Maclaurin (684), étendue des quantités réelles aux fonctions imaginaires.

La fonction $\varphi(z)$ est alors holomorphe dans le cercle ayant

Fig. 44.



son centre à l'origine et, pour rayon r, le module du point z pris à l'intérieur du contour C dans les limites convenables (*fig.* 44).

On a, dans le cas considéré (960), d'après l'équation (3) du n° 967 et l'équation (5 *bis*) du n° 964, en faisant z_0 ou t égal à zéro,

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z^{n-1}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\varphi(z)}{z^{n-1}}\,dz = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

En résumé, une fonction $\varphi(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un contour simple C, est développable en série convergente par la formule de Maclaurin, sous la condition que le module de la valeur donnée à la variable reste inférieur à la plus petite des quantités pour lesquelles la fonction cesse d'être holomorphe. Si cette plus petite quantité est, par exemple (*fig.* 44), ON $= \delta$, il faut qu'on ait $r < \delta$.

On voit qu'on n'a pas ici à se préoccuper de la valeur du reste R (967), qui est toujours nulle pour $n = \infty$, tandis que, dans le cas des fonctions réelles, l'expression de ce reste exige une discussion délicate (684, 691, 696, 704), le plus souvent impossible, et qui restreint par suite beaucoup l'emploi de la formule de Maclaurin.

Applications.

969. On pourra juger dans le *Calcul intégral* de toute l'importance des principes qu'on vient de développer, au point de vue de la transformation et du calcul des intégrales définies dont nous avons exposé les premières propriétés dans le Volume précédent (761 et suiv.), et dont nous avons étendu dans ce Chapitre la définition aux quantités imaginaires. Nous donnerons un seul exemple, et nous nous bornerons ensuite à indiquer quelques applications de la formule de Maclaurin généralisée.

Exemple d'intégration. — Chercher l'expression de l'intégrale $\int_0^z z^m dz$, le long de la droite $x - y = 0$.

On a ici

$$z = x + yi = (1+i)x, \qquad dz = dx + i\,dy = (1+i)\,dx.$$

Par suite,

$$z^m dz = (1+i)^{m+1} x^m dx.$$

D'ailleurs, $z = 0$ répond à $x = 0$, et l'on peut écrire (773)

$$\int_0^z z^m dz = (1+i)^{m+1} \int_0^x x^m dx = (1+i)^{m+1} \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Par exemple, pour $m = 2$ et $x = 1$, on trouve (954, 957, 958)

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$$

970. *Fonction rationnelle.* — Soit la fonction rationnelle (886)

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{F(z)}.$$

Une pareille fonction demeure holomorphe dans toute partie du plan des axes qui ne contient aucun de ses pôles (947). Ces pôles répondent aux racines ou aux zéros de son dénominateur.

On marquera dans le plan des axes les points a, b, c, ..., qui correspondent à ces zéros, c'est-à-dire les points critiques (920) pour lesquels la fonction devient infinie.

Si a est celui de ces points qui est le plus rapproché de l'origine, la fonction rationnelle sera développable par la série de Maclaurin (968) *dans* le cercle décrit de l'origine comme centre, avec Oa pour rayon. *Sur* le cercle ou *au delà*, la série devient divergente, parce que la fonction est infinie au point a (965, 966).

De même, si, d'un point z_0 pris dans le plan des axes, on décrit un cercle ayant pour rayon la distance du point z_0 à celui des pôles de la fonction qui en est le plus rapproché, la fonction rationnelle sera développable *dans* ce cercle suivant la série de Taylor (967), c'est-à-dire suivant les puissances croissantes de $z - z_0$.

971. *Fonction* $(1+z)^m$, *lorsque l'exposant m n'est pas entier.* — Dans le cas des quantités réelles, nous avons vu (691) que l'expression $(1+x)^m$ n'est alors développable par la for-

mule de Maclaurin (684), en série convergente de la forme

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n + \dots,$$

que lorsque la variable x est moindre que l'unité en valeur absolue. Il en résulte que le développement analogue (968)

$$(1)\quad \left\{ (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}z^n + \dots \right.$$

n'est applicable aux quantités imaginaires que lorsque le module de la variable z est inférieur à l'unité (891). La fonction $(1+z)^m$ n'est donc holomorphe que *dans* un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

Il faut remarquer que, d'après la formule de Moivre (846), la fonction $(1+z)^m$, quand m n'est pas entier, admet, pour chaque valeur de z, plusieurs valeurs distinctes, tandis que la série convergente du second membre de la relation (1) n'en a qu'une seule. Ce second membre tendant vers l'unité quand z se rapproche de zéro d'une manière continue, la série correspondante représente spécialement celle des valeurs de $(1+z)^m$ qui jouit de la même propriété, c'est-à-dire qui répond (846, 847) à $k=0$.

972. *Fonction* $l(1+z)$. — x étant une quantité réelle, la série

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

n'est convergente que si la variable x est, en valeur absolue, moindre que l'unité ou égale à l'unité (696).

Le développement analogue (968)

$$(1)\qquad l(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

n'est donc applicable aux quantités imaginaires que lorsque le module de la variable z est inférieur ou égal à l'unité (891). La fonction $l(1+z)$ n'est, par suite, holomorphe que

dans et *sur* le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

La difficulté que nous venons de rencontrer (971) se présente encore ici. Nous avons reconnu, en effet (909), qu'une quantité imaginaire a une infinité de logarithmes népériens imaginaires formant une progression arithmétique de raison $2\pi i$, tandis que la série convergente indiquée n'a qu'une seule limite.

Nous remarquerons, à ce sujet, que le second membre de la relation (1) tendant vers zéro quand z se rapproche de zéro d'une manière continue, la série correspondante doit représenter spécialement celle des valeurs de $l(1+z)$ qui jouit de la même propriété.

Or, en désignant par ρ le module de $1+z$ et par α la plus petite valeur de son argument, on a (909)

$$l((1+z)) = l\rho + (\alpha + 2k\pi)i,$$

et l'on voit que la condition indiquée ne peut être remplie que par la *valeur principale* du logarithme, qui est (910)

$$l\rho + \alpha i;$$

car, z tendant vers zéro, $1+z$ tend vers 1, dont le logarithme a pour valeur principale zéro. Ainsi, la série obtenue représente la valeur principale du logarithme cherché.

973. I. *Fonction* arc tang$z$. — x étant une quantité réelle, arc tang$x$ est développable en une série convergente de la forme (704)

$$\text{arc tang}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

à la condition que la variable x soit, en valeur absolue, moindre que l'unité ou égale à l'unité.

A une valeur donnée de x répondent d'ailleurs une infinité de valeurs de la fonction arc tang$x$ (*Trigon.*, 43). Mais, parmi ces valeurs et dans l'intervalle où la convergence de la série existe, une seule se réduisant à zéro quand x approche de zéro d'une manière continue, c'est celle-là qu'il faut choisir comme limite de la série ou que la série fait connaître, c'est-à-dire la valeur de arc tang$x$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas des quantités imaginaires, on voit d'abord que le développement analogue (968)

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

n'est applicable que lorsque le module de la variable z est inférieur ou égal à l'unité (891). La fonction $\operatorname{arc\,tang} z$ n'est donc holomorphe que *dans* et *sur* le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

Mais la difficulté qui se présente déjà dans le cas des quantités réelles a lieu *a fortiori* dans le cas des quantités imaginaires. Comme nous l'avons vu (918, III), $\operatorname{arc\,tang} z$ est susceptible d'une infinité de valeurs renfermées dans la formule

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i} l\left(\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\right),$$

et la série convergente qui constitue le second membre de la relation (1) n'a qu'une seule limite.

Or, z tendant vers zéro d'une manière continue, il en est de même de la série. Il faut, par suite, qu'il en soit aussi de même de $\operatorname{arc\,tang} z$; ce qui exige (972) que l'on choisisse pour valeur de cette quantité celle qui correspond à la valeur principale de

$$l\left(\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\right);$$

car z tendant vers zéro, ce logarithme tend vers celui de 1.

Si l'on désigne par ρ le module et par α la plus petite valeur de l'argument de $\frac{1+zi}{1-zi}$, la série (1) représentera la valeur de $\operatorname{arc\,tang} z$ qui est égale à

$$\frac{l\rho + \alpha i}{2i}.$$

II. *Fonction* $\operatorname{arc\,sin} z$. — x étant une quantité réelle, $\operatorname{arc\,sin} x$ est développable en une série convergente de la forme (798, 3°)

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots,$$

à la condition que la variable x ne surpasse pas l'unité en valeur absolue.

A une valeur donnée de x répondent d'ailleurs une infinité de valeurs de la fonction arc sin$x$ (*Trigon.*, 43). Mais, parmi ces valeurs et dans l'intervalle où la convergence de la série existe, une seule se réduisant à zéro quand x approche de zéro d'une manière continue, c'est cette valeur que la série fait connaître, c'est-à-dire celle de arc sin$x$ qui est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Si l'on remplace maintenant x par la quantité imaginaire z, la nouvelle série

$$(2) \qquad \text{arc sin}\, z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots$$

demeure convergente, tant que le module de la variable z ne surpasse pas l'unité (891). La fonction arc sin z n'est donc holomorphe que *dans* et *sur* le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

Nous avons vu d'ailleurs (918, II) que cette fonction est susceptible d'une infinité de valeurs renfermées dans la formule

$$\text{arc sin}\, z = \frac{1}{i} l\left(\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)\right).$$

Comme la limite de la série (2) tend vers zéro lorsque la variable z tend elle-même vers zéro d'une manière continue, la série, parmi toutes les valeurs données par la formule ci-dessus, représente spécialement celle qui jouit de la même propriété.

La limite de la quantité $iz \pm \sqrt{1 - z^2}$, pour $z = 0$, étant ± 1, on verra facilement, en raisonnant comme dans le cas précédent et en se reportant au n° 911, que la limite de la série correspond encore à la valeur principale de

$$l\left(\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\right).$$

APPENDICE AU SIXIÈME LIVRE.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

Des fonctions hyperboliques générales.

974. On a, quel que soit z (900),

$$(1) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots$$

et, par suite, en changeant z en $-z$,

$$(2) \qquad e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots$$

En retranchant et en ajoutant successivement, membre à membre, les relations (1) et (2), puis en divisant par le facteur commun 2 les résultats obtenus, on trouve

$$(3) \qquad \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots,$$

$$(4) \qquad \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots.$$

Lorsque z est réel, ces deux séries sont convergentes pour toute valeur finie de z (397, 3°). Il en résulte qu'elles le sont encore, lorsque z représente une quantité imaginaire quelconque, de module fini (891). Les séries ou les résultats (3) et (4) sont appelés *le sinus et le cosinus hyperboliques de* z, que z soit une quantité réelle ou imaginaire.

On représente ces deux nouvelles fonctions par les notations $\sinh z$, $\cosh z$, et l'on écrit

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Les quatre autres fonctions hyperboliques générales sont

$$\operatorname{tangh} z = \frac{\sin \mathrm{h} z}{\cos \mathrm{h} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

$$\operatorname{coséch} z = \frac{1}{\sin \mathrm{h} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}},$$

$$\operatorname{séch} z = \frac{1}{\cos \mathrm{h} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}},$$

$$\operatorname{coth} z = \frac{1}{\operatorname{tangh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

973. Nous avons trouvé (903, 904), pour les deux premières fonctions circulaires directes générales, les formules suivantes, analogues aux formules (3) et (4) du numéro précédent :

$$(5)\quad \sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

$$(6)\quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}.$$

On en déduit, en remplaçant z par zi,

$$\sin zi = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}, \qquad \cos zi = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2};$$

c'est-à-dire (974)

$$\sin zi = -\frac{\sin \mathrm{h} z}{i}, \qquad \cos zi = \cos \mathrm{h} z,$$

ou

$$\sin \mathrm{h} z = \frac{\sin zi}{i}, \qquad \cos \mathrm{h} z = \cos zi.$$

On a donc, en même temps (974),

$$\operatorname{tangh} z = \frac{\sin zi}{i \cos zi} = \frac{\operatorname{tang} zi}{i},$$

$$\operatorname{coséch} z = \frac{i}{\sin zi} = i \operatorname{coséc} zi,$$

$$\operatorname{séch} z = \frac{1}{\cos zi} = \operatorname{séc} zi,$$

$$\operatorname{coth} z = \frac{i}{\operatorname{tang} zi} = i \operatorname{cot} zi.$$

Si, dans les valeurs qu'on vient de trouver pour les six fonctions hyperboliques, on change de nouveau z en zi, il vient, en renversant

les deux membres,

$$\sin z = \frac{\sinh zi}{i}, \qquad \cos z = \cosh zi, \qquad \operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{tangh} zi}{i},$$

$$\operatorname{cosec} z = i \operatorname{cosech} zi, \qquad \sec z = \operatorname{sech} zi, \qquad \cot z = i \coth zi.$$

976. Il est visible que les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires directes générales rentrent au fond les unes dans les autres et ne sont que des cas particuliers des mêmes séries; la tangente, la cosécante, la sécante et la cotangente se déduisant d'ailleurs du sinus et du cosinus, de la même manière dans les deux groupes de fonctions. Ainsi, quand on remplace z par zi, la série (3) du n° 974 donne la série (5) du n° 975, multipliée par i; et, réciproquement, la série (5), divisée par i, donne la série (3). Quant aux séries (4) et (6), elles permutent l'une avec l'autre.

Pour les fonctions hyperboliques, comme pour les fonctions circulaires directes, le cosinus et la sécante sont des fonctions paires, tandis que le sinus, la cosécante, la tangente et la cotangente sont des fonctions impaires (903).

Malgré les analogies que nous venons de signaler plus haut, il existe quelques différences entre les formules fondamentales applicables aux deux groupes de fonctions. Nous allons donc établir rapidement celles qui se rapportent aux fonctions hyperboliques.

977. A la formule (907)

$$\sin^2 zi + \cos^2 zi = 1$$

répond (975) la formule

$$\frac{\sinh^2 z}{i^2} + \cosh^2 z = 1,$$

c'est-à-dire

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \tag{1}$$

Si l'on divise les deux membres de cette relation par $\cosh^2 z$, on a (974)

$$1 - \operatorname{tangh}^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z.$$

On en déduit

$$\operatorname{sech} z = \sqrt{1 - \operatorname{tangh}^2 z}, \tag{2}$$

et ensuite

$$\cosh z = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tangh}^2 z}}, \qquad \sinh z = \frac{\operatorname{tangh} z}{\sqrt{1 - \operatorname{tangh}^2 z}}. \tag{3}$$

En divisant au contraire les deux membres de la relation (1) par $\sinh^2 z$, on trouve

$$\coth^2 z - 1 = \frac{1}{\sinh^2 z} = \operatorname{cosech}^2 z,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \operatorname{cosech} z = \sqrt{\coth^2 z - 1},$$

et ensuite

$$(5) \qquad \sinh z = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 z - 1}}, \qquad \cosh z = \frac{\coth z}{\sqrt{\coth^2 z - 1}}.$$

978. Les formules fondamentales $\cos(z_1 + z_2)$, $\sin(z_1 + z_2)$, avec toutes leurs conséquences, sont applicables, sauf une modification de signe, aux fonctions hyperboliques.

Prenons, en effet, les formules démontrées au n° 907,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

et remplaçons dans ces formules z_1 et z_2 par $z_1 i$ et $z_2 i$. Il viendra

$$\cos(z_1 + z_2) i = \cos z_1 i \cos z_2 i - \sin z_1 i \sin z_2 i,$$
$$\sin(z_1 + z_2) i = \sin z_1 i \cos z_2 i + \cos z_1 i \sin z_2 i,$$

c'est-à-dire, d'après les relations du n° 975,

$$(1) \qquad \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$
$$(2) \qquad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

En divisant membre à membre ces deux dernières relations, puis les deux termes de la fraction du second membre par le produit $\cosh z_1 \cosh z_2$, on aura

$$(3) \qquad \tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2}.$$

En changeant z_2 en $-z_2$ dans les trois formules qu'on vient d'obtenir et en tenant compte des propriétés des fonctions paires et impaires (976, 903), on trouvera enfin

$$(4) \qquad \cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2,$$
$$(5) \qquad \sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2,$$
$$(6) \qquad \tanh(z_1 - z_2) = \frac{\tanh z_1 - \tanh z_2}{1 - \tanh z_1 \tanh z_2}.$$

On remarquera que, contrairement à ce qui a lieu pour les fonctions circulaires directes, les signes se correspondent dans les deux membres pour le cosinus hyperbolique d'une somme ou d'une différence, ainsi

qu'aux deux termes de la tangente hyperbolique d'une somme ou d'une différence.

979. En continuant, on établira facilement pour les fonctions hyperboliques des formules analogues à toutes celles usitées en Trigonométrie.

Par exemple, en faisant $z_1 = z_2 = z$ dans les formules (1), (2), (3) du numéro précédent, on a

$$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z, \tag{1}$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z, \tag{2}$$

$$\tanh 2z = \frac{2 \tanh z}{1 + \tanh^2 z}. \tag{3}$$

Comme on a aussi (977)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

la relation (1) ci-dessus donne

$$\cosh 2z = 1 + 2 \sinh^2 z,$$

d'où

$$\sinh z = \sqrt{\frac{\cosh 2z - 1}{2}}. \tag{4}$$

En éliminant, au contraire, $\sinh^2 z$, on obtient

$$\cosh 2z = 2 \cosh^2 z - 1,$$

d'où

$$\cosh z = \sqrt{\frac{\cosh 2z + 1}{2}}. \tag{5}$$

Par suite,

$$\tanh z = \sqrt{\frac{\cosh 2z - 1}{\cosh 2z + 1}}. \tag{6}$$

En remplaçant $2z$ par z ou z par $\frac{z}{2}$ dans les dernières formules ci-dessus (4), (5), (6), on a encore

$$\sinh \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{\cosh z - 1}{2}}, \tag{4 bis}$$

$$\cosh \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{\cosh z + 1}{2}}, \tag{5 bis}$$

$$\tanh \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1}}. \tag{6 bis}$$

980. On peut considérer des fonctions hyperboliques inverses géné-

rales, comme on a considéré des fonctions circulaires inverses générales (917 et suiv.).

1° Adoptons la notation

$$\text{Arg. sinh} z,$$

que nous lirons : *Argument dont le sinus hyperbolique est* z, et posons

$$u = \text{Arg. sinh} z.$$

Nous entendons par là que le sinus hyperbolique de u ou la limite de la série correspondante (974) est égale à z. Nous aurons donc

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = z.$$

Il en résulte

$$e^{2u} - 2ze^u - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^u = z \pm \sqrt{z^2+1},$$

c'est-à-dire

$$u = \text{Arg. sinh} z = l\left(\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right)\right).$$

2° En posant

$$u = \text{Arg. cosh} z,$$

on a de même (974)

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = z.$$

Il en résulte

$$e^{2u} - 2ze^u + 1 = 0, \qquad e^u = z \pm \sqrt{z^2-1},$$

$$u = \text{Arg. cosh} z = l\left(\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)\right).$$

3° En posant

$$u = \text{Arg. tangh} z,$$

on a (974)

$$\text{tangh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = z.$$

Il en résulte

$$e^{2u} = \frac{1+z}{1-z}, \qquad u = \text{Arg. tangh} z = \frac{1}{2} l\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right).$$

4° En posant

$$u = \text{Arg. coséch} z,$$

on a (974)

$$\text{coséc} u = \frac{2}{e^u - e^{-u}} = z.$$

Il en résulte

$$ze^{2u} - 2e^u - z = 0, \qquad e^u = \frac{1 \pm \sqrt{1+z^2}}{z},$$

$$u = \text{Arg. coséch} z = l\left(\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+z^2}}{z}\right)\right).$$

5° En posant

$$u = \text{Arg. séch}\, z,$$

on a (974)

$$\text{séc}\, u = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = z.$$

Il en résulte

$$z e^{2u} - 2 e^u + z = 0, \qquad e^u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - z^2}}{z},$$

$$u = \text{Arg. séc.}\, z = l\left(\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)\right).$$

6° En posant enfin

$$u = \text{Arg. coth}\, z,$$

on a (974)

$$\coth u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = z.$$

Il en résulte

$$e^{2u} = \frac{z+1}{z-1}, \qquad u = \text{Arg. coth}\, z = \frac{1}{2} l\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right).$$

On voit (909 et suiv.) que les fonctions hyperboliques inverses générales, comme les fonctions circulaires inverses générales (917 et suiv.), admettent, pour chaque valeur de la variable, une infinité de valeurs distinctes.

981. Nous indiquerons un peu plus loin les résultats relatifs à la différentiation des fonctions hyperboliques générales, directes et inverses.

Des fonctions hyperboliques réelles.

982. Quand on se borne aux fonctions hyperboliques réelles, auxquelles toutes les relations démontrées précédemment sont applicables, il est facile de déterminer le champ de leurs variations.

En considérant alors $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ (x étant une quantité réelle), il suffit de faire varier x depuis zéro jusqu'à l'infini positif, puisque (976), lorsqu'on change le signe de x, $\cosh x$ demeure invariable, tandis que $\sinh x$ et $\tanh x$ ne font que changer de signe en gardant la même valeur absolue.

On a d'abord (974)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right).$$

Pour $x = 0$, $\sinh x = 0$; x croissant jusqu'à $+\infty$, e^x croît et tend vers l'infini, $\frac{1}{e^x}$ décroît et tend vers zéro; $\sinh x$ croît donc, comme la variable, depuis 0 jusqu'à $+\infty$. En réalité, d'après ce qu'on vient de rap-

peler, les limites de $\sinh x$ sont (comme celles de $\tang x$) $-\infty$ et $+\infty$.

On a ensuite (974)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right).$$

Pour $x = 0$, $\cosh x = 1$; x croissant jusqu'à $+\infty$, il en est de même de $\cosh x$, dont les limites sont $+1$ et $+\infty$ (comme celles de $\sec x$, lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$).

On a enfin (974)

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}.$$

Pour $x = 0$, $\tanh x = 0$; x croissant jusqu'à $+\infty$, $\frac{1}{e^{2x}}$ décroît jusqu'à 0. La fonction croît donc de 0 à $+1$. En réalité, elle a pour limites -1 et $+1$ (comme $\sin x$ et $\cos x$).

Quant aux fonctions inverses des précédentes, $\cosech x$ a les mêmes limites que $\sinh x$; $\sech x$ varie de 1 à 0 (comme $\cos x$, lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$); enfin, $\coth x$ varie de $+\infty$ à $+1$ et de $-\infty$ à -1 (comme $\sec x$).

983. La remarque suivante est utile dans les applications.

On a (403)

$$e = 2,718281828\ldots.$$

Il en résulte que e^3, égal à 20,0855..., est très peu supérieur à 20. Par suite, pour une faible valeur de x, eu égard à l'échelle parcourue, pour $x = 18$ par exemple, on a, par excès,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^{18}} = \frac{1}{(20)^6} = \frac{1}{64000000} = 0,000000015625,$$

quantité moindre que 2 cent-millionièmes.

A partir de cette valeur de x, on a donc très sensiblement, en négligeant e^{-x} dans les expressions du n° 974,

$$\cosh x = \sinh x = \frac{1}{2}e^x \qquad \text{et} \qquad \tanh x = 1.$$

984. Si l'on avait à sa disposition une Table des valeurs des fonctions hyperboliques réelles, on pourrait s'en servir pour calculer les valeurs des fonctions circulaires directes lorsqu'elles sont imaginaires, Nous avons trouvé, en effet (975),

$$\cos zi = \cosh z \qquad \text{et} \qquad \sin zi = i \sinh z.$$

Or, pour $z = x + yi$, on a (907)

$$\cos z = \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$
$$\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi,$$

c'est-à-dire

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

985. Le plus simple, pour former ces Tables des fonctions hyperboliques réelles, est d'utiliser comme il suit les Tables des fonctions circulaires directes réelles.

Soit θ un angle compris entre $-90°$ et $+90°$ et ayant le même signe que la variable x. C'est ce qu'on appelle l'*amplitude hyperbolique* de x.

Posons

$$\cosh x \cos\theta = 1.$$

Cette équation de condition conduit évidemment (974, 977) aux relations

$$\cosh x = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta,$$
$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \tan\theta,$$
$$\tanh x = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \sin\theta,$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \cos\theta,$$
$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \cot\theta,$$
$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \operatorname{cosec}\theta.$$

En remplaçant z par x dans la formule (6 *bis*) du n° 979, on a aussi (*Trigon.*, 66)

$$\tanh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Des valeurs (974)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

on déduit d'ailleurs (*Trigon.*, 70, 32), en tenant compte des relations précédentes,

$$e^x = \cosh x + \sinh x = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

Il en résulte

$$x = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

ou, en désignant par M le module relatif qui permet de passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires (566), et qui est égal à $\log e$ ou à 0,43429448...,

$$\mathrm{M}x = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

Lorsque x est assez grand, on a, d'après la remarque du n° 983,

$$\cosh x = \sinh x = \frac{1}{2} e^x$$

ou

$$\log \cosh x = \log \sinh x = \log e^x - \log 2 = \mathrm{M}x - 0{,}3010300\ldots.$$

986. Cela posé, voici comment M. Hoüel a composé sa Table des valeurs des fonctions hyperboliques réelles (1).

Six colonnes renferment les valeurs naturelles de $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{tang}\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\cos\theta$ et, par suite (985), les valeurs naturelles de $\operatorname{tangh} x$, $\coth x$, $\sinh x$, $\operatorname{cosech} x$, $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$. Deux colonnes adjacentes contiennent les valeurs correspondantes de x et de θ. Ces dernières sont données de millième en millième du quadrant ou de 5′,4 en 5′,4.

De la valeur attribuée à θ, on déduit la valeur conjuguée de x par la formule (985)

$$x = \frac{\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{\mathrm{M}};$$

puis, à l'aide des Tables trigonométriques naturelles (*voir* t. II), les nombres à écrire dans les six autres colonnes. Les logarithmes de ces nombres sont, en outre, inscrits dans des pages placées en face de celles dont nous venons d'expliquer la composition.

La Table est, comme à l'ordinaire, à double entrée. Puisque

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,$$

la valeur de $\operatorname{tangh} x$ qui répond à $90^\circ - \theta$ équivaut à la valeur de $\operatorname{sech} x$, qui répond à θ ; etc.

---

(1) *Recueil de formules et de Tables numériques*, nouvelle édition, Gauthier-Villars, 1885.

987. Lorsque la variable imaginaire z se trouve remplacée par la variable réelle x, les fonctions hyperboliques inverses (980) ont évidemment les mêmes expressions et admettent aussi une infinité de valeurs pour chaque valeur de la variable.

Si l'on ne veut conserver que les valeurs réelles de chacune d'elles, on devra (980, 911) adopter les formules suivantes, en astreignant dans chaque cas la variable x aux limites indiquées :

$$\operatorname{Arg}\sinh x = l\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arg}\cosh x = \pm l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad [x > 1],$$

$$\operatorname{Arg}\tanh x = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} \qquad [x^2 < 1],$$

$$\operatorname{Arg}\operatorname{cosech} x = l\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$\operatorname{Arg}\operatorname{sech} x = \pm l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad [0 < x \leq 1],$$

$$\operatorname{Arg}\coth x = \frac{1}{2} l \frac{x+1}{x-1} \qquad [x^2 > 1].$$

988. Au point de vue de la différentiation des fonctions hyperboliques réelles, on a immédiatement (568, 571, 574, 575)

$$d\sinh x = d\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2})e^x + e^{-x})dx = \cosh x\,dx,$$

$$d\cosh x = d\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})dx = \sinh x\,dx,$$

$$d\tanh x = d\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x\,dx - \sinh^2 x\,dx}{\cosh^2 x} = \frac{dx}{\cosh^2 x}.$$

On a de même, pour les autres fonctions,

$$d\operatorname{cosech} x = d\frac{1}{\sinh x} = \frac{-\cosh x\,dx}{\sinh^2 x} = -\coth x \operatorname{cosech} x\,dx,$$

$$d\operatorname{sech} x = d\frac{1}{\cosh x} = \frac{-\sinh x\,dx}{\cosh^2 x} = -\tanh x \operatorname{sech} x\,dx,$$

$$d\coth x = d\frac{1}{\tanh x} = \frac{-\dfrac{dx}{\cosh^2 x}}{\tanh^2 x} = -\frac{dx}{\sinh^2 x}.$$

Ces formules, sauf les signes des différentielles du cosinus et de la sécante hyperboliques, sont identiques à celles qui concernent les fonctions circulaires directes (598 et suiv.).

On a encore (587), dans des conditions analogues,

$$dl\sinh x = \frac{\cosh x\,dx}{\sinh x} = \coth x\,dx,$$

$$dl\cosh x = \frac{\sinh x\,dx}{\cosh x} = \tanh x\,dx.$$

$$dl\tanh x = \frac{\frac{dx}{\cosh^2 x}}{\tanh x} = \frac{dx}{\sinh x\cosh x}.$$

Enfin, on peut remarquer que l'équation tabulaire (985)

$$\cosh x\cos\theta = 1$$

donne (570)

$$\sinh x\,dx\cos\theta - \sin\theta\,d\theta\cosh x = 0.$$

Il en résulte (985)

$$\frac{dx}{d\theta} = \tanh\theta\coth x = \frac{1}{\cos\theta} - \cosh x \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{dx} = \cos\theta.$$

989. Les formules établies au n° 988 entraînent immédiatement (766) la connaissance des intégrales indéfinies correspondantes.

On a ainsi, successivement,

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C,$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,$$

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}\,dx = -\operatorname{séch} x + C,$$

$$\int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x}\,dx = -\operatorname{coséch} x + C,$$

$$\int \coth x\,dx = l\sinh x + C,$$

$$\int \tanh x\,dx = l\cosh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sinh x\cosh x} = l\tanh x + C.$$

990. En considérant maintenant les fonctions hyperboliques inverses réelles (987) et en se reportant aux nombreux exemples donnés dans la

première partie, on a facilement, pour leurs différentielles,

$$d\operatorname{Arg\,sinh} x = dl\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$d\operatorname{Arg\,cosh} x = \pm dl\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \qquad [x>1],$$

$$d\operatorname{Arg\,tanh} x = d\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} = \frac{dx}{1-x^2} \qquad [x^2<1],$$

$$d\operatorname{Arg\,coséch} x = dl\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{-dx}{x\sqrt{1+x^2}},$$

$$d\operatorname{Arg\,séch} x = \pm dl\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \mp\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad [0<x<1],$$

$$d\operatorname{Arg\,coth} x = d\frac{1}{2}l\frac{x+1}{x-1} = \frac{-dx}{x^2-1} = \frac{dx}{1-x^2} \qquad [x^2>1].$$

On en déduit les intégrales indéfinies correspondantes :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arg\,sinh} x + C,$$

$$\int\pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg\,cosh} x + C \qquad [x>1],$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg\,tanh} x + C \qquad [x^2<1],$$

$$\int\frac{-dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arg\,coséch} x + C,$$

$$\int\mp\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arg\,séch} x + C \qquad [0<x<1],$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg\,coth} x + C \qquad [x^2>1].$$

Toutes les formules ci-dessus sont analogues, sauf des changements de signes, à celles qui concernent les fonctions circulaires inverses (609 et suiv., 766 et suiv.).

991. D'après les détails dans lesquels nous sommes entré au point de vue de la différentiation des fonctions simples imaginaires (933 et suiv.), tous les résultats précédents sont applicables à la recherche des différentielles des fonctions hyperboliques générales (981), directes ou inverses (974, 980).

Quant aux intégrales correspondantes, les difficultés qui se présentent lorsqu'il s'agit de fonctions imaginaires ont été exposées dans le dernier Chapitre du VI^e^ Livre (948 et suiv.), et nous n'y reviendrons pas ici.

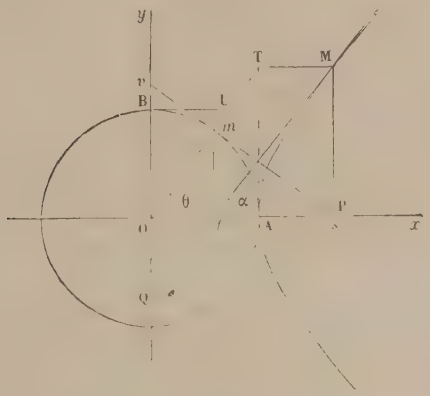
Représentation géométrique des fonctions hyperboliques.

992. La liaison constatée analytiquement (976) entre les fonctions circulaires directes générales et les fonctions hyperboliques directes générales est susceptible, lorsqu'on passe aux fonctions réelles (982 et suiv.), d'une interprétation géométrique remarquable, fondée sur la correspondance qui existe entre le cercle et l'hyperbole équilatère. C'est ce que nous allons montrer succinctement.

Nous rappellerons d'abord la définition géométrique des fonctions circulaires.

Considérons (*fig.* 45) le cercle OA, décrit de l'origine comme centre

Fig. 45.



avec l'unité pour rayon. Son équation sera (*Géom.*, 445)

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Pour un point m de la circonférence, en désignant par θ l'angle AOm, on a (*Trigon.*, 8, 12)

$$y = mp = \sin\theta, \qquad x = Op = \cos\theta,$$

d'où la relation fondamentale (*Trigon.*, 34)

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Si l'on prolonge le rayon Om jusqu'à ses rencontres U et T avec les tangentes en B et en A à la circonférence, et si l'on mène à cette circonférence la tangente en m qui coupe les axes coordonnés en s et en v, on a (*Trigon.*, 7)

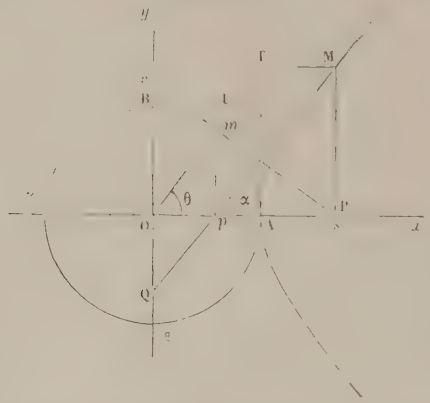
$$AT = ms = \operatorname{tang}\theta, \qquad BU = mv = \operatorname{cot}\theta,$$
$$OT = Os = \operatorname{séc}\theta, \qquad OU = Ov = \operatorname{coséc}\theta.$$

993. Cela posé, considérons à son tour (*fig.* 45) l'hyperbole équilatère, de demi-axe transverse égal à l'unité, dont la branche de droite est alors tangente en A à la circonférence OA et qui a pour équation (*Géom.*, 438)

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Prenons le point M de l'hyperbole dont l'ordonnée MP est égale à AT et

Fig. 45.



dont l'abscisse est OP. Il est facile de voir que le point P se confond avec le point s. En effet, puisque

$$MP = y = AT = \operatorname{tang}\theta,$$

l'équation de la courbe donne

$$OP = x = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta} = \sec\theta = Os.$$

Si l'on admet maintenant que l'ordonnée y de l'hyperbole représente le sinus hyperbolique d'une certaine variable t, la relation fondamentale (977)

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

comparée à l'équation de la courbe, conduit nécessairement à

$$OP = x = \cosh t.$$

Puisqu'on a à la fois, dans cette hypothèse,

$$\sinh t = MP = \operatorname{tang}\theta, \qquad \cosh t = OP = \sec\theta,$$

toutes les autres relations établies au n° 985 s'ensuivent forcément.

Menons la tangente à l'hyperbole au point M. Sa tangente d'incli-

naison sur l'axe des x ou son coefficient angulaire sera (535), d'après l'équation de la courbe, d'où l'on déduit

$$2x\,dx - 2y\,dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}} = \frac{\operatorname{séc}\theta}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Désignons, pour un instant, par p' le point d'intersection de la tangente en M avec l'axe des x. La sous-tangente Pp' aura pour valeur

$$y\cot\alpha = \operatorname{tang}\theta\sin\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

D'autre part, on a, dans le triangle rectangle OmP,

$$\mathrm{P}p = \frac{\overline{mp}^2}{\mathrm{O}p} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Il en résulte que le point p' se confond avec le point p, c'est-à-dire que la tangente en M à l'hyperbole passe par le point p, comme la tangente en m à la circonférence passe par le point P.

On a, sur la figure,

$$\operatorname{tangh} t = \frac{\operatorname{sinh} t}{\operatorname{cosh} t} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{séc}\theta} = \sin\theta = mp,$$

$$\operatorname{coséch} t = \frac{1}{\operatorname{sinh} t} = \frac{1}{\operatorname{tang}\theta} = \cot\theta = \mathrm{BU} = mv,$$

$$\operatorname{séch} t = \frac{1}{\operatorname{cosh} t} = \frac{1}{\operatorname{séc}\theta} = \cos\theta = \mathrm{O}p,$$

$$\coth t = \frac{1}{\operatorname{tangh} t} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{coséc}\theta = \mathrm{OU} = \mathrm{O}v.$$

On peut remarquer que l'on a, en valeur absolue,

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{O}p\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \operatorname{coséch} t = \mathrm{BU}.$$

On retrouve aussi, par le triangle rectangle OmP, la relation tabulaire (985)

$$\overline{\mathrm{O}m}^2 = \mathrm{OP}.\mathrm{O}p,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{cosh} t\cos\theta = 1.$$

De l'équation de condition (974)

$$\operatorname{sinh} t = \mathrm{MP} = \operatorname{tang}\theta = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

on déduit d'ailleurs

$$e^{2t} - 2\tang\theta . e^t - 1 = 0$$

ou

$$e^t = \tang\theta \pm \sqrt{\tang^2\theta + 1}.$$

t, d'après ce qui précède, doit être réel et de même signe que θ. Les nombres positifs ayant seuls un logarithme réel (911), on devra, en prenant les logarithmes des deux membres de la valeur précédente, rejeter le signe moins du radical et écrire

$$t = l\left(\tang\theta + \sqrt{\tang^2\theta + 1}\right).$$

Il est facile de vérifier que ce résultat revient (985) à

$$t = l\tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

994. On voit que, pour appliquer les relations que nous venons de démontrer et qui permettent de conclure immédiatement des fonctions circulaires les fonctions hyperboliques correspondantes, il n'est pas nécessaire que l'hyperbole équilatère soit tracée.

En effet, le choix du point m sur la circonférence entraîne, par la détermination du point T et du point s, la connaissance du point M de l'hyperbole et de la tangente en ce point, puisqu'elle doit contenir le point p.

Remarque générale.

995. En résumé, l'emploi des fonctions circulaires ou des fonctions hyperboliques générales ou particulières revient au fond absolument au même et l'un ne doit pas présenter plus de difficultés que l'autre.

Seulement, dans certaines questions, dans certains problèmes d'Algèbre, de Géométrie ou de Mécanique, ce sont tantôt les fonctions hyperboliques, tantôt les fonctions circulaires, qui s'introduisent naturellement.

Il y a lieu alors de conserver dans la solution du problème qu'on a à traiter, sans transformations et sans complications inutiles, les fonctions qui apparaissent explicitement dans sa mise en équations.

QA
37
C6
1915
t.4

JUL 3 1975

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
DATE DUE

BOOKS ARE SUBJECT TO
RECALL AFTER TWO WEEKS

UNIV OF MAINE
3 7550 01007322 0